

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2018 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽個人賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

1. 已知 $\triangle ABC$ 三個邊的長度均為整數 cm，若 $\triangle ABC$ 最長邊的長度為 13 cm，則滿足這樣條件且互不全等的三角形共有_____個。(註：邊長為 13 cm 的正三角、兩腰長為 13 cm 的等腰三角形都要計算在內。)

答：_____個

2. 設 a 、 b 為兩個不相等的實數且滿足 $a^2 + \sqrt{3}b = 4$ 、 $b^2 + \sqrt{3}a = 4$ ，則 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 之值為_____。

答：_____

3. 已知 a 、 b 、 c 為滿足 $ax + by + 2c = 0$ 、 $c \neq 0$ 、 $ab - c^2 \geq 0$ 的實數，則 xy 的最大值為_____。

答：_____

4. 設 $\{a_n\}$ 為等差數列且其公差為負數，已知 $a_2a_{10} + a_2a_6 + a_6a_{14} + a_{10}a_{14} = 0$ 。當此數列前 n 項的和 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 的值為最大時，則 n 之最小值為_____。

答：_____

5. 設 $m = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{2\sqrt{100}}$ ，則 m 的整數部分為_____。

答：_____個

6. 已知兩個整數 x 、 y ，其中 $x \geq y$ ，若 $(x+y)$ 、 $(x-y)$ 、 xy 、 $\frac{x}{y}$ 之和恰等於 1800。則這樣的序對 (x, y) 共有_____組。

答：_____

7. 若一個正整數可以表示為兩個連續奇數的平方差，稱該正整數為「幸運數」，例如 $8 = 3^2 - 1^2$ 、 $32 = 9^2 - 7^2$ ，故 8、32 均為幸運數。則在不超過 2018 的正整數中，幸運數的總和為_____。

答：_____

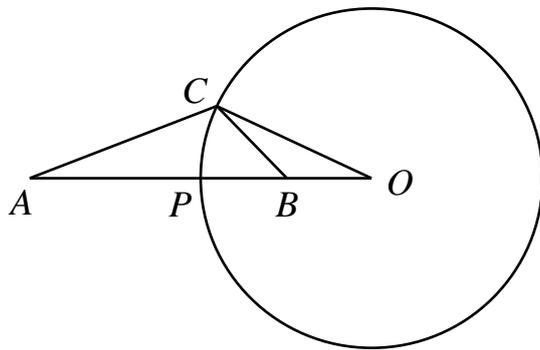
8. 在多項式 $(x^7 + x^3 + 1)^{20}$ 展開並合併同類項之後所得的多項式中，則 x^{20} 的係數為_____。

答：_____

9. 數列中的第 1 項為 1、第 2 項為 $4+10+19$ 、第 3 項為 $31+46+64+85+109$ 、第 4 項為 $136+166+\dots+361$ 、...。前面所敘述的 19 稱為第 2 項中第 3 個數，而 46 稱為第 3 項中的第 2 個數，則此數列中第 18 項中的第 19 個數為_____。

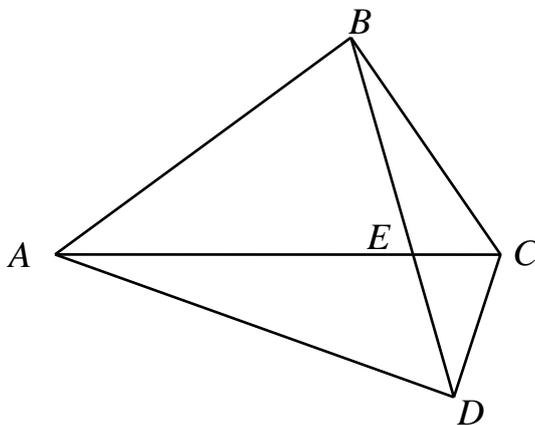
答：_____

10. 已知點 P 在線段 AB 上、點 O 在線段 AB 延長線上。再以點 O 為圓心、 OP 為半徑作圓，並在圓上取一點 C ，如圖所示。若 $AP=2BP$ 、 OP 是 OA 與 OB 的比例中項，則 $AC:BC$ 的比值為_____。



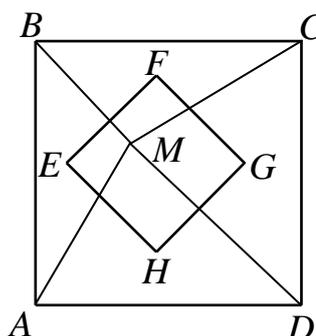
答：_____

11. 在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ 、 $AB = BD$ 且點 E 為對角線 AC 與 BD 的交點，如圖所示。若 AC 的長度為 90 cm、 CE 的長度為 18 cm，則邊 CD 的長度為_____ cm。



答：_____ cm

12. 已知正方形 $ABCD$ 的面積為 360 cm^2 ，點 M 為正方形內部一點。令點 E 、 F 、 G 、 H 分別為三角形 MAB 、 MBC 、 MCD 、 MDA 的重心，如圖所示。則四邊形 $EFGH$ 之面積為_____ cm^2 。



答：_____ cm^2

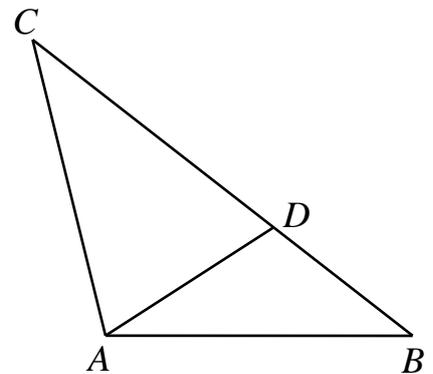
第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

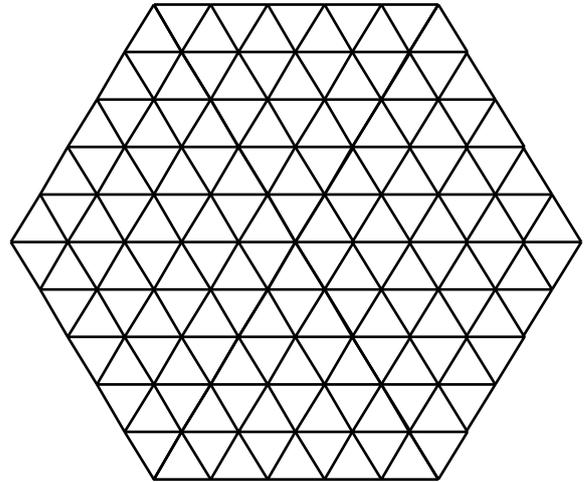
1. 已知正整數 $n \leq 2018$ 。請問使得 $14^n + 10^n - 3^n - 1$ 之值可被 143 整除的 n 值有多少個？

答： _____ 個

2. 在 $\triangle ABC$ 中，點 D 在 BC 邊上使得 $AB = CD$ 且 $2\angle BAD + 3\angle ABD = 180^\circ$ ，如圖所示。請證明 $\angle CAD = \angle BAD + \angle ABD$ 。



3. 將一個邊長為 5 單位的正六邊形分割為許多邊長為 1 的小正三角形，如圖所示。將這些正三角形的頂點(共 91 個)任意塗上紅色或藍色。在此圖上以任意頂點、任意半徑作圓，若在這 91 個點中塗上 A 色的點數較多。無論如何塗色，請問在 A 色的點最多的圓上至少有多少個塗上 A 色的點？



答：

個
