

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2017/2018 小學中年級組第二輪檢測試題詳解

1. 將 30 個三角排成一列，然後依照下面的規律塗上黑色或白色，請問塗上黑色的三角形總共比塗上白色的三角形多幾個？



- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 20

【參考解答】

由圖可知，從第一個三角形開始，以每三個三角形為一個週期，每個週期內有 2 個黑色三角形與 1 個白色三角形，黑色三角形比白色三角形多 1 個。30 個三角形共有 10 個週期，所以黑色三角形總共比白色三角形多 10 個。故選 B。

答案：(B)

2. 已知 $A \times B \times C = 30$ 、 $B \times C \times D = 90$ 、 $C \times D \times E = 120$ ，請問 $A \times C \times E$ 等於多少？

- (A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 50 (E) 60

【參考解法】

由於 $A \times C \times E = (A \times B \times C) \times (C \times D \times E) \div (B \times C \times D)$ ，因此

$$A \times C \times E = 30 \times 120 \div 90 = 40。$$

答案：(C)

3. 將算式 $1\Delta 2\Delta 3\Delta 8\Delta 15$ 的 Δ 處分別填入「+」或「-」號後計算此算式的值，請問總共可以得到多少個不同的正整數值？

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

【參考解法 1】

當 15 前面的符號是「-」號時， $1+2+3+8=14 < 15$ ，故得不到正整數；當 15 前面的符號是「+」號時，由於 1 前面沒有空格，相當於有一個加號，所以無論後面怎麼填，這個算式的結果都是大於 1 的，而 2、3、8 之間的差各不相等，因此，這三個數前面任意一個符號不同時得到的結果都不相同，因此總共可以得到 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個不同的正整數值。

【參考解法 2】

可知共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 種填入「+」或「-」號的方式：

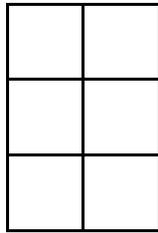
- (1) $1+2+3+8+15=29$ ；
- (2) $1+2+3+8-15=14-15 < 0$ ，不為正整數；
- (3) $1+2+3-8+15=13$ ；
- (4) $1+2-3+8+15=23$ ；
- (5) $1-2+3+8+15=25$ ；
- (6) $1+2+3-8-15=6-23 < 0$ ，不為正整數；
- (7) $1+2-3+8-15=11-18 < 0$ ，不為正整數；
- (8) $1-2+3+8-15=10-15 < 0$ ，不為正整數；

- (9) $1+2-3-8+15=7$;
 (10) $1-2+3-8+15=9$;
 (11) $1-2-3+8+15=19$;
 (12) $1+2-3-8-15=3-26<0$, 不為正整數 ;
 (13) $1-2+3-8-15=4-25<0$, 不為正整數 ;
 (14) $1-2-3+8-15=9-20<0$, 不為正整數 ;
 (15) $1-2-3-8+15=3$;
 (16) $1-2-3-8-15=1-28<0$, 不為正整數。

其中總共有 29、13、23、25、7、9、19、3 共 8 個不同的正整數值。

答案：(A)

4. 用六個相同的白色小正方形構成矩形，如下圖所示。將其中四個小正方形塗上黑色，使得每一橫列都有黑色的小正方形，且經過旋轉後兩種塗色方法的矩形若相同則視為相同的塗色方法。請問總共有多少種不同的塗色方法？

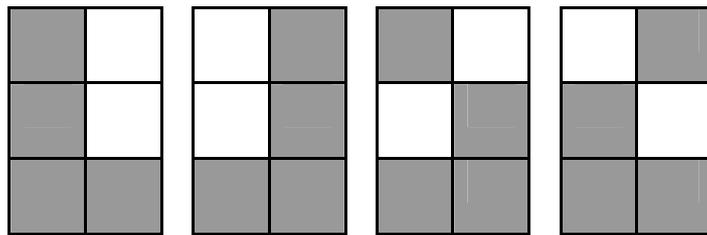


- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 10

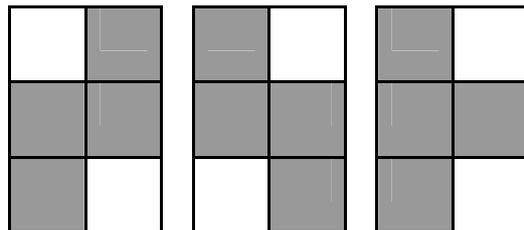
【參考解法】

可知共有三條橫列，故由抽屜原理知塗色方法一定是有兩條橫列各恰有一個塗黑色的小正方形、一條有二個塗黑色的小正方形。再因經過旋轉後兩種塗色方法的矩形若相同則視為相同的塗色方法，故：

- (i) 若由上而下各橫列塗上黑色的小正方形數量依序為 1、1、2，則不同的塗色法有：



- (ii) 若由上而下各橫列塗上黑色的小正方形數量依序為 1、2、1，則不同的塗色法有：



- (iii) 若由上而下各橫列塗上黑色的小正方形數量依序為 2、1、1，則皆可由(i)的圖形旋轉而得，故都與(i)相同。

因此共有 7 種不同塗色的方法。

答案：(D)

5. 快車與慢車同時從南北兩地沿著同一條公路以勻速相向開出。已知快車每小時行駛 40 km。經過 2 小時後，快車已駛過公路中點 20 km，此時快車與慢車還相距 6 km。請問慢車每小時行駛多少 km？
(A) 17 (B) 19 (C) 21 (D) 23 (E) 25

【參考解法 1】

因快車出發 2 小時後，快車駛過公路中點 20 km，這時快車與慢車還相距 6 km，由此可判斷出 2 小時內快車行駛了總路程的一半還多 20 km，而慢車行駛了總路程的一半還少 26 km，即快車 2 小時比慢車多行駛了 46 km，因此兩車的速度之差為每小時 $46 \div 2 = 23$ km，因此慢車每小時行駛 $40 - 23 = 17$ km。

【參考解法 2】

可知 2 小時快車總共行駛了 $40 \times 2 = 80$ km，由此時快車已駛過公路中點 20 km 知兩地相距 $2 \times (80 - 20) = 120$ km，再由快車與慢車此時還相距 6 km 知此時慢車僅行駛了 $120 - 80 - 6 = 34$ km，所以慢車每小時行駛 $34 \div 2 = 17$ km。

答案：(A)

6. 從 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 這十二個數中，任取三個相異的數使得它們的平均數是 5。請問總共有多少種不同的取法？

【參考解法】

對所取出的三個數之總和 $5 \times 3 = 15$ 表示成三個相異數之和，按由大至小之順序枚舉的方法把所有可能的取法都枚舉出來，如下：

$$15 = 12 + 2 + 1 = 11 + 3 + 1 = 10 + 4 + 1 = 10 + 3 + 2 = 9 + 5 + 1 = 9 + 4 + 2 \\ = 8 + 6 + 1 = 8 + 5 + 2 = 8 + 4 + 3 = 7 + 6 + 2 = 7 + 5 + 3 = 6 + 5 + 4$$

因此總共有 12 種不同的取法。

答案：12 種

7. 有一本書從 1、2、3、… 接續下去兩面編頁，它的中間一張紙被撕掉使得此時餘下各頁的頁碼之總和為 1133，請問被撕掉的這張紙上的兩個頁碼之和是多少？

【參考解法 1】

此書的頁數等於 50 時，其頁碼總和等於 $1 + 2 + 3 + \dots + 49 + 50 = 1275$ ，而 $1275 - 1133 = 142$ ，但在 50 頁之前不存在兩頁的頁碼和為 142，且顯然 50 頁以上的數會更大，都不符合題意；

此書有 49 頁時，其頁碼總和為 $1 + 2 + 3 + \dots + 48 + 49 = 1225$ ，而 $1225 - 1133 = 92$ 為偶數，也不符合題意；

此書有 48 頁時，其頁碼總和為 $1 + 2 + 3 + \dots + 47 + 48 = 1176$ ，而 $1176 - 1133 = 43$ 且 $43 = 21 + 22$ ，故被撕掉的紙上之頁碼為 21、22 時符合題意；

此書有 47 頁時，其頁碼總和為 $1 + 2 + 3 + \dots + 46 + 47 = 1128 < 1133$ ，故不符合題意，小於 47 頁的就更不符合題意了。

因此被撕掉的這張紙上的兩個頁碼之和為 $43 = 21 + 22$ 。

【參考解法 2】

可以判斷出同一張紙上的兩個頁碼為連續的兩個正整數，因此其和必為奇數，故這本書的頁碼總和為 1133 與一個奇數的和，此必為偶數。而再由書的頁碼總和是從 1 開始的連續正整數之和，因此這本書的頁數一定是 4 的倍數或 4 的倍數加 3。因 $1+2+3+\dots+46+47=1128 < 1133$ ，因此這一本書至少有 48 頁，即這本書的頁數可能為 48、51、52、55、56、...

若這本書至少有 51 頁，則未被撕掉的頁碼總和至少為 49 個頁碼之和，即未被撕掉的頁碼總和至少為 $1+2+3+\dots+48+49=1225 > 1133$ ，故不合。

若為 48 頁，則 $1+2+3+\dots+47+48=1176$ ，而 $1176-1133=43=21+22$ ，此滿足題意，故被撕掉的這張紙上的兩個頁碼之和可為 43。

因此被撕掉的這張紙上的兩個頁碼之和為 $43=21+22$ 。

答案：43

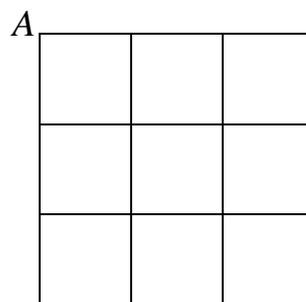
8. 已知某班男同學人數是女同學人數的 2 倍。在一次數學測試中，全班的平均分數是 86 分，其中女同學的平均分數是 90 分。請問男同學的平均分數是多少分？

【參考解法】

對全班同學分組，每組有 1 位女同學、兩位男同學，則每一組裡三位同學的總分可視為 $86 \times 3 = 258$ 分、女同學的分數可視為 90 分，則兩位男同學的總分可視為 $258 - 90 = 168$ 分，因此每一組裡每一位男同學的分數可視為 $168 \div 2 = 84$ 分，即男同學的平均分數是 84 分。

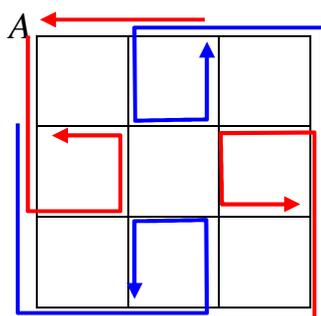
答案：84 分

9. 某個城市的街道圖是由 3×3 的方格所構成，如圖所示，其中每個小正方形的邊長是 20 m。一位清潔工人從點 A 出發，沿著道路清掃街道，他必須打掃每一條街道，最後回到 A 點。當他完成工作時，請問他至少走了多少 m？



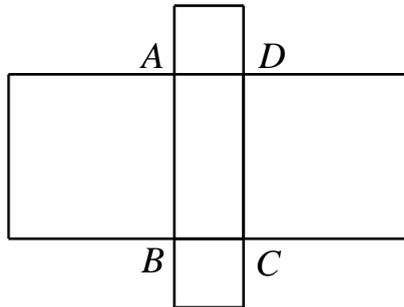
【參考解法】

觀察可知大正方形的四條邊上除了四個角之外共還有八個路口，且這八個路口為三條街的交點，而因清潔工人必須走過每一條街道，故為了使路程最短，他必須經過連接這八個路口中在同一條邊上兩個路口的這四條街道各兩次，即他最少走 $(24+4) \times 20 = 560$ m。此時清潔工人的路徑可為：



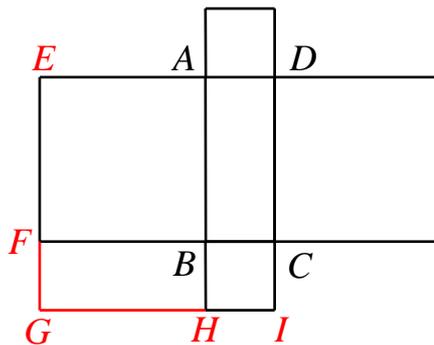
答案：560 m

10. 矩形 $ABCD$ 的周長為 34 cm ，在它的每條邊上往矩形外部各畫一個以該邊為邊長的正方形，如下圖所示。若這四個正方形的面積之和為 338 cm^2 ，請問矩形 $ABCD$ 的面積是多少 cm^2 ？



【參考解法】

如圖所示之方式標記各點，並在左下角補上矩形 $BFGH$ ，則由矩形 $BFGH$ 與矩形 $ABCD$ 的長、寬相等可知其面積相等，且四邊形 $EGID$ 的四個角都是直角、四條邊之長度都恰為矩形 $ABCD$ 的一條長與一條寬之和，因此是正方形。而正方形 $EGID$ 的邊長為 $34 \div 2 = 17\text{ cm}$ ，因此面積為 $17 \times 17 = 289\text{ cm}^2$ 。再由題意可知正方形 $EFBA$ 與 $BHIC$ 的面積之和為 $338 \div 2 = 169\text{ cm}^2$ ，故矩形 $ABCD$ 的面積為 $(289 - 169) \div 2 = 60\text{ cm}^2$ 。



答案： 60 cm^2

11. 小明有 60 顆紅色珠子、50 顆黑色珠子與一台神奇的機器，當每次投入 4 顆紅色珠子後機器只會吐出 1 顆黑色珠子；當每次投入 5 顆黑色珠子後機器只會吐出 2 顆紅色珠子。小明操作這台機器 30 次後，沒有剩下任何紅色珠子而只剩下黑色珠子。請問此時剩下的黑色珠子共有多少顆？

【參考解法】

每操作一次機器會使各色珠子的數量以及珠子的總數量產生的變化如下：

操作 (1) 紅色珠子減少 4 顆、黑色珠子增加 1 顆，因此珠子總數減少 3 顆；

操作 (2) 紅色珠子增加 2 顆，黑色珠子減少 5 顆，因此珠子總數減少 3 顆。

即兩種變化的珠子總數均減少 3 顆，所以操作了 30 次以後，珠子的總數減少了 $3 \times 30 = 90$ 顆，而一開始珠子的總數為 $50 + 60 = 110$ 顆，所以最後剩下的珠子之數量為 $110 - 90 = 20$ 顆，又因為最後沒有剩下任何紅色珠子而只剩下黑色珠子，所以剩下的 20 顆都是黑色珠子。而此可利用以下操作順序而得：先連續操作 (2) 10 次，此時僅剩紅色珠子 80 顆；接著連續操作 (1) 20 次，此時僅剩黑色珠子 20 顆。

答案：20 顆

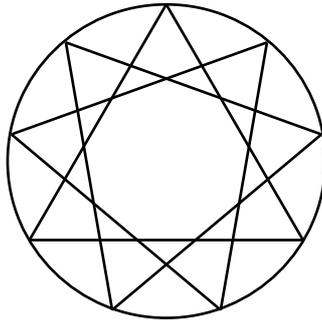
12. 一個三位數 \overline{abc} 滿足 $a \times b \times c$ 仍然是一個三位數，請問滿足條件的三位數 \overline{abc} 之最小值是多少？

【參考解法】

因 $b、c$ 最大值都為 9，故 $b \times c \leq 81$ ，故若要使 $a \times b \times c \geq 100$ ，則有 $a \geq 2$ 。當 $a = 2$ 時，若要使 $a \times b \times c \geq 100$ ，則 $9 \times b$ 至少為 50，因此 $b \geq 6$ 。當 $a = 2、b = 6$ 時， $a \times b = 12$ ，故若要使 $a \times b \times c \geq 100$ ，則 $c \geq 9$ 。因此 \overline{abc} 的最小值為 269，此時 $a \times b \times c = 108$ 。

答案：269

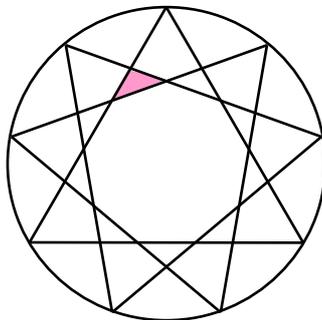
13. 將圓內的一個內接正三角形分別以順時針、逆時針各旋轉 40° ，如圖所示。請問圖中總共有多少個不在相同位置的三角形？



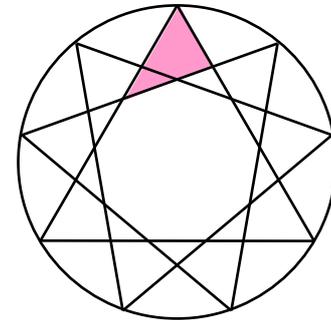
【參考解法】

觀察可知

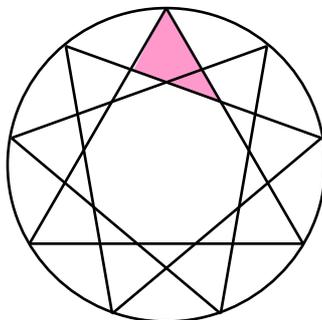
(i) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



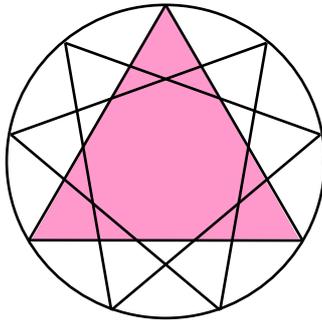
(ii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



(iii) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 9 個：



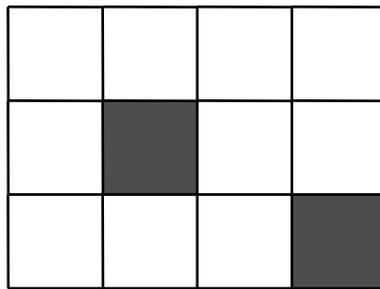
(iv) 與下圖中陰影三角形相同但位置不同的三角形共有 3 個：



因此圖中總共有 $9+9+9+3=30$ 個不在相同位置的三角形。

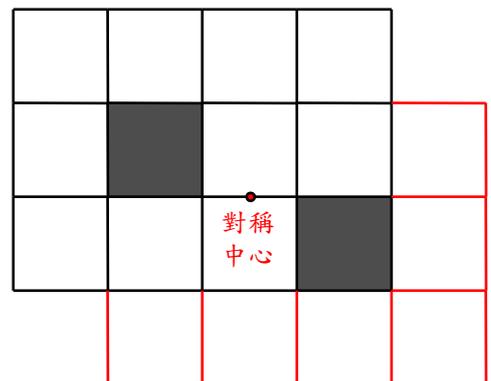
答案：30 個

14. 有 12 個大小相同的小正方形拼成一個矩形，其中 10 個為白色、2 個為黑色，如下圖所示。請問至少要再加入多少個同樣大小且僅為白色的小正方形才能使得所得到的圖形是中心對稱的圖案？請畫出這個中心對稱的圖案。



【參考解法】

由於僅有 2 個黑色小正方形，故所得圖形的對稱中心必為這兩個黑色小正方形的對稱中心。(5 分)
從而可知在原圖的右方與下方共加入 6 個白色小正方形(5 分)，如圖所示，即可成為中心對稱的圖案。(10 分)



答案：6 個

15. 有 12 個兩兩相異的正整數，其中任意五個相異正整數的乘積都是偶數，全部 12 個正整數的和是奇數。請問這 12 個正整數的和之最小值是多少？

【參考解法】

由於 12 個兩兩相異的正整數中，任意五個相異正整數的乘積都是偶數，故 12 個數中最多有四個奇數；(5 分)全部 12 個數的和是奇數，則說明奇數的個數一定是奇數個，又由於最多四個奇數，故奇數的個數為 3 或 1。(5 分)現要使這些數的總和盡可能地小：

- (i) 若僅有 1 個奇數，則可取最小的 1 個奇數與最小的 11 個偶數，其和為
 $1+2+4+6+8+10+12+14+16+18+20+22=133$ (5 分)
- (ii) 若僅有 3 個奇數，則可取最小的 3 個奇數與最小的 9 個偶數，其和為
 $1+3+5+2+4+6+8+10+12+14+16+18=99$
- 因此這 12 個正整數的和最小是 99。(5 分)

答案： 99