

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2016 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽個人賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。若答案為數值，請用阿拉伯數字；若答案為分數，請化為最簡分數)

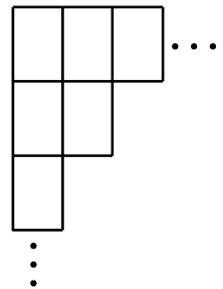
1. 設 $P = 2^{2016}$ ，則 P 除以 13 的餘數為_____。

答：_____

2. 某校辦理三年級戶外教學時向每位同學都收取相同費用，此費用為整數元。如果甲班有 $2m$ 位男生與 13 位女生、乙班有 7 位男生與 $2n$ 位女生，其中 m 、 n 都是正整數。兩班收取費用的總數相等，都是 $2mn + 7m + 13n + 84$ 元。則每一位同學收取的費用為_____元。

答：_____元

3. 阿哲有一副 52 張撲克牌，每張牌都是長 6 cm、寬 4 cm。他想用這副撲克牌以長邊對長邊、短邊對短邊且不重疊地拼出一個最大的正方形(如圖所示)，則拼完最大的正方形後，這副撲克牌還會剩下_____張牌。

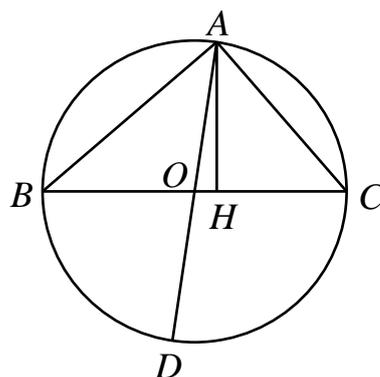


答：_____張

4. 設 $N = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 42^2 - 41^2$ ，則 N 共有_____個不同的正質因數。

答：_____個

5. 三角形 ABC 內接於圓 O 中，線段 AD 為圓 O 的直徑，點 H 在線段 BC 上，且 $AH \perp BC$ ，如圖所示。已知 $AH = 32$ 、 $BH = 16\sqrt{5}$ 、 $CH = 2\sqrt{185}$ ，則 $AD \times AH$ 之值為_____。



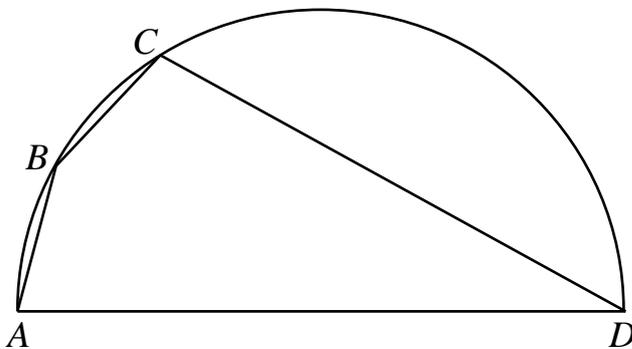
答：_____

6. 將正整數依照下圖所示方式填入一個很大的方格表中，由左上至右下的對角線上的正整數分別是 1、3、7、13、...，則此對角線上第一個超過 50 的正整數為_____。

1	2	9	10	...
4	3	8	11	
5	6	7	12	
16	15	14	13	...
⋮			⋮	

答：_____

7. 四邊形 $ABCD$ 內接於一圓， AD 為該圓的直徑其長度為 4 cm，如下圖所示。如果 AB 與 BC 的長度皆為 1 cm，則 CD 的長度為_____cm。

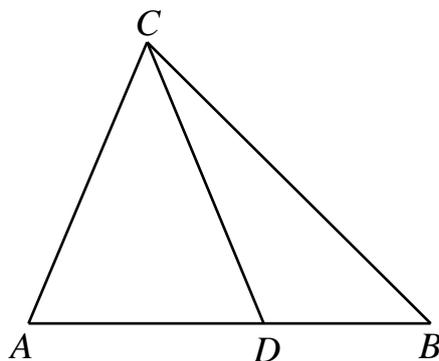


答：_____ cm

8. 已知 $a > 0$ ，且方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 的二根之差為 2，則 $a =$ _____。

答：_____

9. 已知 $AD = 6$ cm、 $\angle ACD = 2\angle DCB = \angle B = 45^\circ$ ，如下圖所示，則 BD 長度為_____cm。

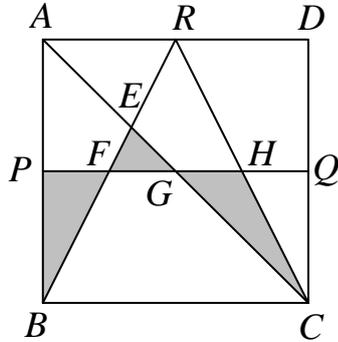


答：_____ cm

10. 已知 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 都是實數，且對於所有的正整數 n ，等式 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + na_n = (n+1)^3$ 恆成立。則 $\frac{1}{a_1-1} + \frac{1}{2a_2-1} + \dots + \frac{1}{49a_{49}-1}$ 之值為_____。

答：_____

11. 已知點 P 、 Q 、 R 分別為正方形 $ABCD$ 的 AB 、 CD 、 DA 邊之中點，若線段 BR 與 AC 、 PQ 分別交於點 E 、 F ，線段 PQ 與 AC 、 RC 分別交於 G 、 H 點，如下圖所示。令陰影區域之面積總和為 m 、正方形 $ABCD$ 的面積為 n ，則 $\frac{m}{n}$ 之值為_____。



答：_____

12. 將一些紅色珠子與藍色珠子排成一直線，且紅、藍色珠子都各至少有一顆，並使得若任意兩顆珠子之間恰有 6 顆或 9 顆珠子，則這兩顆珠子必須是同顏色的。請問這一排珠子最多能有多少顆？

答：_____顆

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 設 a 、 b 為直角三角形的兩股長， c 為斜邊長，其中 $a \neq b$ 。若實數 x 、 y 滿足

$$\frac{x}{2a^2} + \frac{y}{c^2} = 1 \quad \text{且} \quad \frac{x}{c^2} + \frac{y}{2b^2} = 1, \quad \text{請證明} \quad x + y = 2c^2.$$

