

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2019 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第二試：應用題 (考試時間 90 分鐘)

◎ 請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。
本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分

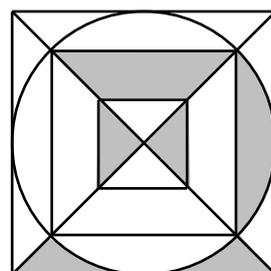
1. 在一次數學測驗中，座號 1 號的同學之得分為 60 分、2 號同學之得分為 81 分、3 號同學之得分為 90 分，且接下來的每一位同學的得分恰等於所有座號在前的同學之平均得分。請問座號 15 號的同學之得分為多少？

【參考解法】

可知前三位同學的平均分數為 $\frac{60+81+90}{3}=77$ 分，即座號 4 號的同學所得的分數。接著將他的分數考慮進來，可以判斷出平均分數不會改變，所以 5 號同學的分數也是 77 分。繼續依此方式考慮，可以得知座號 15 號的同學之得分數為 77 分。

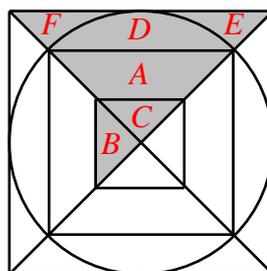
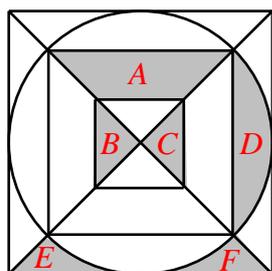
答：77 分

2. 在農業博覽會裡，要在一個邊長為 150 m 的正方形農地內種植彩色稻作構成一個如圖所示的幾何圖案，圖中最外圈正方形內部有一個內接圓及兩個全部頂點都在大正方形對角線上的正方形。已知陰影區域要種植紫色稻作。主辦單位經過精算後，可以種出紫色稻作的面積為 5850 m^2 。請問主辦單位設計時，內部的最小正方形之邊長為多少 m？



【參考解法】

如下左圖所示之方式標記各陰影區域：



因最外圈正方形內部的圖形由其二條對角線、一個圓與二個正方形所構成的，所以在以兩條對角線的交點為中心，分別旋轉區域 C 與 D 90° 、旋轉區域 E 與 F 180° 後，可得上右圖之圖形。因此可以判斷出區域 A 、 C 、 D 、 E 、 F 的面積總和恰為大正方形面積的 $\frac{1}{4}$ ，即 $\frac{1}{4} \times 150 \times 150 = 5625 \text{ m}^2$ ，所以可得知區域 B 的面積為 $5850 - 5625 = 225 \text{ m}^2$ 。而因區域 B 的面積恰為內部的最小正方形面積的 $\frac{1}{4}$ ，故內部的最小正方形面積為 $225 \times 4 = 900 \text{ m}^2$ ，即知此正方形之邊長為 30 m。

答：30 m

3. 已知有一個數的數碼和為 42，且將這個數加 1 後所得的數之數碼和為 25。
請問這個數的最小可能值是多少？

【參考解法】

可知一個數加 1 之後若沒有進位，則所得的數之數碼和會比原數之數碼和增加 1；一個數加 1 之後若有進位，則所得的數之數碼和會比原數之數碼和減少 9 的倍數減 1，且這一個倍數會恰與所進的位數相等。故要使數碼和減少 $42 - 25 = 17 = 9 \times 2 - 1$ 需要進 2 位，因此此數的後二位均為 9、百位數不可為 9 且由後二位數碼和為 18 可判斷出此數的其餘位之數碼和是 24。因 $24 > 9 \times 2 = 18$ ，故這一個數除了後二位皆為 9 以外，其餘至少仍有三個位數。因此滿足條件的最小的數為 79899。

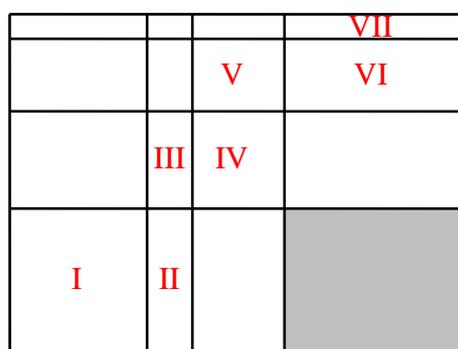
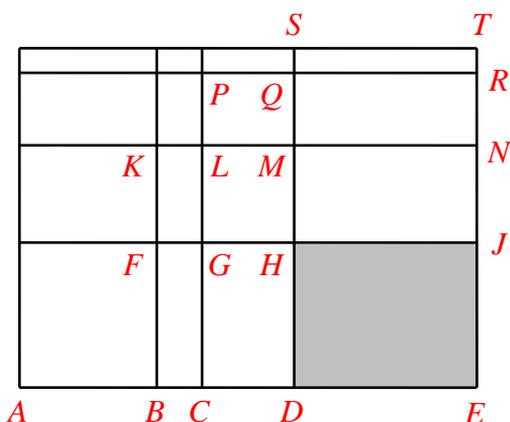
答：79899

4. 用三條水平直線與三條直線將一個大長方形切割為有四行、四列共 16 個面積不一定相等的小長方形，如下圖所示。一些小長方形內的數為其面積且單位為 cm^2 ，請問位於右下角塗上陰影的長方形之面積為多少 cm^2 ？

			8
		12	24
	8	16	
36	12		

【參考解法 1】

如下左圖所示之方式標記各頂點、如下右圖所示之方式標記各長方形：



由長方形 III 與長方形 IV 的面積比為 $8 : 16 = 1 : 2$ 知 $FG : GH = 1 : 2 = BC : CD$ ；
由長方形 V 與長方形 VI 的面積比為 $12 : 24 = 1 : 2$ 知 $LM : MN = 1 : 2 = CD : DE$ 。
因此 $BC : CD : DE = 1 : 2 : 4$ ，即可得知陰影長方形面積為 $12 \times 4 = 48 \text{cm}^2$ 。

【參考解法 2】

如參考解法 1 之方式標記各頂點與各長方形。

由長方形 II 與長方形 III 的面積比為 $12 : 8 = 3 : 2$ 知 $CG : GL = 3 : 2 = EJ : JN$ ；
由長方形 IV 與長方形 V 的面積比為 $16 : 12 = 4 : 3$ 知 $HM : MQ = 4 : 3 = JN : NR$ ；

因此 $EJ : JN : NR = 6 : 4 : 3$ ，即可得知陰影長方形面積為 $24 \times \frac{6}{3} = 48 \text{cm}^2$ 。

答：48 cm^2

5. 五位大學生與二位國中生在河的東岸欲利用一艘船渡河到西岸。已知這艘船最多只能同時承載二位國中生，或是一位大學生，且渡河時船上必須至少有一個人。請問這艘船至少要橫越這條河幾次才能讓這七個人都渡到河的西岸？(船從河的一岸移動到另一岸即視為橫越一次)

【參考解法】

明顯可以判斷出一定是由兩位國中生同時渡河開始且其中一位再渡河回來，否則若是由一位大學生或一位國中生渡河開始且接下來一定是由他渡河回來，此時與一開始的情況無異且已浪費二次橫越。因此前四次橫越順序如下：

1. 兩位國中生同時渡河至西岸，此時東岸有五位大學生、西岸有二位國中生
2. 一位國中生渡河至東岸，此時東岸有五位大學生與一位國中生、西岸有一位國中生
3. 一位大學生渡河至西岸，此時東岸有四位大學生一位國中生、西岸有一位大學生一位國中生
4. 一位國中生渡河至東岸，此時東岸有四位大學生二位國中生、西岸有一位大學生

可發現經此四次橫越後，已有一位大學生成功渡河至西岸。故知要使五位大學生都成功渡河至西岸需橫越 $4 \times 5 = 20$ 次，最後還需一次讓二位國中生渡河至西岸，因此這艘船至少要橫越這條河 $20 + 1 = 21$ 次。

答：21 次

6. 在 110 到 120 之間共 11 個整數中，刪去一個數 113 後並將剩下的數重排可得數列 119、112、116、118、114、117、111、120、115、110，此數列滿足任兩個相鄰的數之最大公因數不為 1。請問在 42 到 62 之間共 21 個整數中，最少要刪除多少個數後並將剩下的數重排使得任兩個相鄰的數之最大公因數不為 1？

【參考解法】

可知 42 到 62 之間的質數為 43、47、53、59、61 共五個，因為它們的兩倍都大於 62，故至少需刪除這五個質數。將剩下的 16 個數依以下方式排列即滿足條件：
44、46、48、50、52、54、58、56、49、42、62、60、55、45、51、57

答：5 個

7. 某村莊共有 2019 位村民，他們要互選推出最高票的 32 位村民代表組成村議會。已知每位村民只能投一票且在沒有廢票的情形下，請問至少要得多少張票才能保證當選村民代表？

【參考解法 1】

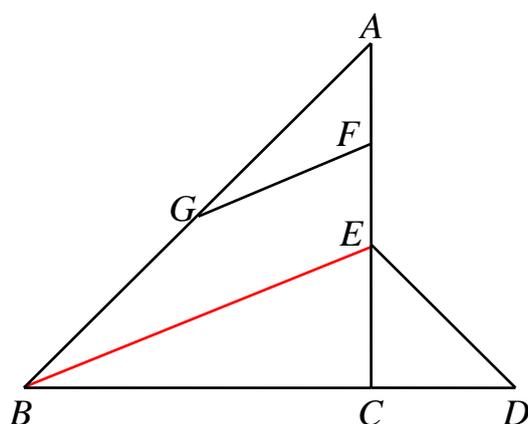
可把所有的落選人都視為同一個人所得的票，則可將題目視為 33 人中選出 32 位代表。此時落選人的票數必少於平均值。因 $\frac{2019}{33} = 61\frac{6}{33}$ ，故落選人至多獲得 61 張票，即至少要獲得 62 張票才能保證當選。

【參考解法 2】

可假設至少需 x 張票才能一定當選代表，則 32 位當選的代表至少共得 $32x$ 張，即所有落選人共得 $2019 - 32x$ 張，故落選人中的最高票至多為 $2019 - 32x$ 張。因

【參考解法】

連接 BE ，如圖所示。



由勾股定理可以得知 $BE^2 = CE^2 + BC^2 = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$ ，所以 $BE = 26\text{cm}$ 。因點 F 、 G 依序分別為 AE 、 AB 的中點，故 $FG = \frac{1}{2}BE = 13\text{cm}$ 。

答：13 cm

10. 校際籃球比賽共有 56 隊報名參賽。預賽共分為八組，每組各恰有七隊。預賽各組內採單循環賽制，即同一組內的任兩支球隊都要彼此恰比賽一次，而不同組之間的球隊在此階段不會互相比賽。預賽結束後，每一組各只取四隊晉級複賽。複賽共 32 支球隊，採單淘汰賽制，即兩兩配對比賽，勝者晉級下一輪、敗者被淘汰。請問這次校際籃球比賽共需要舉辦多少場比賽才能決定出冠軍球隊？

【參考解法 1】

在預賽時，每一組各需舉辦 $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ 場比賽，因此預賽總共舉辦 $21 \times 8 = 168$ 場。

而複賽共 32 支球隊，第一輪可配成 16 對比賽，即要舉辦 16 場；第二輪 16 支球隊可配成 8 對比賽，即要舉辦 8 場；第三輪 8 支球隊可配成 4 對比賽，即要舉辦 4 場；第四輪 4 支球隊可配成 2 對比賽，即要舉辦 2 場；最後還有一場冠軍賽。所以這次校際籃球比賽共需要舉辦 $168 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 199$ 場比賽才能決定出冠軍球隊。

【參考解法 2】

在預賽時，每一組各需舉辦 $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ 場比賽，因此預賽總共舉辦 $21 \times 8 = 168$ 場。

而到了複賽，因每舉辦一場比賽即淘汰一支球隊，而冠軍球隊即為最後一支未被淘汰的球隊，即 32 支球隊要淘汰 31 支球隊，故需舉辦 31 場比賽。所以這次校際籃球比賽共需要舉辦 $168 + 31 = 199$ 場比賽才能決定出冠軍球隊。

答：199 場

11. 已知分數 $\frac{404}{2019}$ 可被寫成 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的形式，其中 m 、 n 都是正整數。請問 $m+n$ 的所有可能值之和是多少？

【參考解法】

因 $\frac{404}{2019} < \frac{1}{4}$ ，故 $m、n$ 都是大於 4。注意到 $\frac{404}{2019} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn}$ ，故可以得知 $2019(m+n) = 404mn$ ，且因 2019 的質因數僅有 3 與 673，所以 m 或 n 可被 673

整除。不失一般性，假設 n 可被 673 整除，則有 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{673}$ ，故

$$\frac{1}{m} \geq \frac{404}{2019} - \frac{1}{673} = \frac{401}{2019} > \frac{1}{6}，即 4 < m < 6，因此 m = 5，此時 \frac{404}{2019} - \frac{1}{5} = \frac{1}{10095}，$$

即可得知僅可把 $\frac{404}{2019}$ 寫成 $\frac{1}{5} + \frac{1}{10095}$ ，即 $m+n$ 的所有可能值之和是 10100。

答：10100

12. 編號 1 至 23 號共 23 張的卡片以號碼面向上的方式依某種順序疊好，並在不翻轉卡片的狀況下進行以下的兩個操作：將最上面的第一張牌放到整疊卡片的最下面，再把第二張卡片放到桌面上，操作時一直保持卡片的面向上。不斷重複這兩個操作，而放到桌面上的卡片依次疊放在之前的卡片上，直到恰剩一張卡片時，就直接將這張卡片疊放在之前的卡片上使得所有 23 張卡片都在桌面上疊成一堆。已知最後桌上的卡片之編號從上到下恰依序排成 1、2、3、...、23，請問在開始時這疊卡片倒數第七張卡片上之編號是什麼？

【參考解法 1】

不妨假設卡片從上到下的排列順序如同下表從左往右所示。原先的第二張成了最底下的牌，所以一定是 23、第四張牌一定是 22，接著以此類推可得

	23		22		21		20		19		18		17		16		15		14		13	
--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--	----	--

由於上面的 12 張牌拿掉了，所以最左邊的牌即為 13 之後的牌，應該放到桌面上新的一疊牌之最上方，即最左邊的牌是 12，而接下來為左邊數來第三張牌，會放到手上這一疊牌的最下方。接著以此類推可得

12	23		22	11	21		20	10	19		18	9	17		16	8	15		14	7	13	
----	----	--	----	----	----	--	----	----	----	--	----	---	----	--	----	---	----	--	----	---	----	--

依同樣的想法，接著可得：

12	23	6	22	11	21		20	10	19	5	18	9	17		16	8	15	4	14	7	13	
----	----	---	----	----	----	--	----	----	----	---	----	---	----	--	----	---	----	---	----	---	----	--

再依同樣的想法，接著可得：

12	23	6	22	11	21	3	20	10	19	5	18	9	17		16	8	15	4	14	7	13	2
----	----	---	----	----	----	---	----	----	----	---	----	---	----	--	----	---	----	---	----	---	----	---

最後可得知原來疊好的牌依序為：

12	23	6	22	11	21	3	20	10	19	5	18	9	17	1	16	8	15	4	14	7	13	2
----	----	---	----	----	----	---	----	----	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---

所以這疊卡片倒數第七張卡片上之編號是 8。

【參考解法 2】

由最後桌上的卡片逆向操作回去，則此時每一階段的兩個操作為：將桌面上最上方的卡片疊放到手上這一疊卡片的最上面，再把手上這一疊卡片最下面的一張卡片放到手上這一疊卡片的最上面。故知：

- (i) 可知恰只剩一張卡片時，這張卡片一定是 1；
- (ii) 當手上這一疊卡片有二張卡片且兩個操作都完成時，另一張卡片一定是 2，且此時手上這一疊卡片由上而下的順序為
1、2；
- (iii) 當手上這一疊卡片有三張卡片且兩個操作都完成時，另一張卡片一定是 3，且此時手上這一疊卡片由上而下的順序為
2、3、1；
- (iv) 當手上這一疊卡片有四張卡片且兩個操作都完成時，另一張卡片一定是 4，且此時手上這一疊卡片由上而下的順序為
1、4、2、3；
- (v) 當手上這一疊卡片有五張卡片且兩個操作都完成時，另一張卡片一定是 5，且此時手上這一疊卡片由上而下的順序為
3、5、1、4、2；

此時可以判斷出，每一次兩個操作都完成時，最上方的卡片為前一階段最下方的卡片、由上往下第二張卡片為從桌面上取出的卡片，接著卡片的順序與前一階段相同。一直操作下去，逐次可得：

- (vi) 2、6、3、5、1、4；
- (vii) 4、7、2、6、3、5、1；
- (viii) 1、8、4、7、2、6、3、5；
- (ix) 5、9、1、8、4、7、2、6、3；
- (x) 3、10、5、9、1、8、4、7、2、6；
- (xi) 6、11、3、10、5、9、1、8、4、7、2；
- (xii) 2、12、6、11、3、10、5、9、1、8、4、7；
- (xiii) 7、13、2、12、6、11、3、10、5、9、1、8、4；
- (xiv) 4、14、7、13、2、12、6、11、3、10、5、9、1、8；
- (xv) 8、15、4、14、7、13、2、12、6、11、3、10、5、9、1；
- (xvi) 1、16、8、15、4、14、7、13、2、12、6、11、3、10、5、9；
- (xvii) 9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2、12、6、11、3、10、5；
- (xviii) 5、18、9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2、12、6、11、3、10；
- (xix) 10、19、5、18、9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2、12、6、11、3；
- (xx) 3、20、10、19、5、18、9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2、12、6、11；
- (xxi) 11、21、3、20、10、19、5、18、9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2、12、6；
- (xxii) 6、22、11、21、3、20、10、19、5、18、9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2、12；
- (xxiii) 12、23、6、22、11、21、3、20、10、19、5、18、9、17、1、16、8、15、4、14、7、13、2。

所以這疊卡片倒數第七張卡片上之編號是 8。