

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics
Intercity Competition

2005 青少年數學國際城市邀請賽



個人賽試題 答題時間：120 分鐘 2005/8/3 高雄市

第一部份： 填充題，請將答案填寫在空格內。不須列出演算過程，共 12 題，每題五分。

1. 已知 n 為四位數的正整數，如果 n 和它的四個數字之和正好等於 2005，則 n 值為何？

答案： _____

2. 在 ABC 中， $\overline{AB} = 10$ ， $\overline{AC} = 18$ ， M 是 \overline{BC} 中點，過 M 作一直線平行於 $\angle CAB$ 的角平分線且交 \overline{AC} 於 D ，則 \overline{AD} 之長為何？

答案： _____

3. 已知 x 、 y 、 z 是正數且滿足
$$\begin{cases} x + y + xy = 8, \\ y + z + yz = 15, \\ z + x + zx = 35, \end{cases}$$
 則 $x + y + z + xy$ 之值為何？

答案： _____

4. 有 11 個男孩和 n 個女孩去採蘑菇。他們採得蘑菇總數是 $n^2 + 9n - 2$ ，且每个孩子採得蘑菇數量相同，則正整數 n 的值為何？

答案： _____

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics
Intercity Competition
2005 青少年數學國際城市邀請賽



5. 使得 x 和 $x + 99$ 都是完全平方數的所有正整數 x 的可能值的總和是多少？

答案：_____

6. 已知一個直角三角形的三條邊均為正整數，其中一條直角邊不超過 20，其外接圓半徑與內切圓半徑之比為 5 : 2，則此三角形周長的最大值為何？

答案：_____

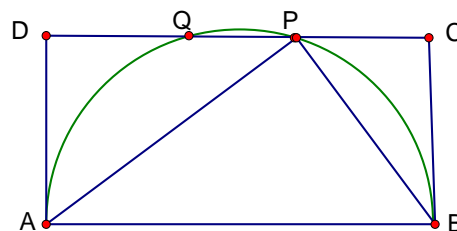
7. 設方程式 $(2004x)^2 - 2003 \cdot 2005x - 1 = 0$ 較大的根為 α ， $x^2 + 2003x - 2004 = 0$ 較小的根為 β ，則 $\alpha - \beta$ 之值為何？

答案：_____

8. 設 a 為正實數。已知 $a^2 + \frac{1}{a^2} = 5$ ，則 $a^3 + \frac{1}{a^3}$ 之值為何？

答案：_____

9. 右圖中，四邊形 $ABCD$ 為矩形。以 \overline{AB} 為直徑的圓與矩形交於 P, Q 兩點。設 $\overline{AP} = 4$ ， $\overline{AB} = 5$ ，則矩形 $ABCD$ 的面積為何？



答案：_____

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics
Intercity Competition
2005 青少年數學國際城市邀請賽



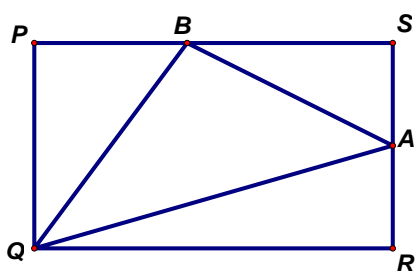
10. 設 $a = 9 \left[n \left(\frac{10}{9} \right)^n - 1 - \left(\frac{10}{9} \right) - \left(\frac{10}{9} \right)^2 - \cdots - \left(\frac{10}{9} \right)^{n-1} \right]$ ，其中 n 為正整數。若 a 為整數，則 a 的最大值為何？

答案：_____

11. 有一個二位數，它的十位數大於個位數，且個位數字不為零。它的十位數與個位數的乘積可被它的十位數與個位數的和所整除，則這個二位數是什麼？

答案：_____

12. 如圖， $PQRS$ 的面積為 10 的任意矩形，點 A, B 分別是線段 RS, PS 上的一點。若三角形 ABQ 的面積為 4，則對於所有這樣的矩形， $\overline{PB} + \overline{AR}$ 所能取到的最小值為何？



答案：_____

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition

2005 青少年數學國際城市邀請賽



第二部份：計算及證明題，必須寫下計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 設 a, b, c 為實數，滿足 $a + bc = b + ca = c + ab = 501$ 。若 M 為 $a + b + c$ 的最大值， m 為 $a + b + c$ 的最小值，則 $M + 2m$ 之值為何？
2. 已知某個四邊形的一個內點到四個頂點的距離分別是 1, 2, 3 及 4，這樣的四邊形的最大面積為何？
3. 有一張很長的但只有兩行的方格表，開始時，將正整數 $1, 2, 3, \dots, 2005$ 寫在第一列的首 2005 個方格內，接著進行以下操作：首先把第一列上最前面的兩個數的和當作一個新數添加在第一列最後一個數後面的方格內，然後把這兩個被相加的數移到它們正下方第二列相對應的方格內。依此方式繼續對第一列上的數進行操作，直到第一列上的數剩下一個數，並也將它移到第二列相對應的方格內為止。請問最後在第二列上所有數的總和是多少？
(例如，若開始時第一列所寫的數為: 1, 2, 3, 4 及 5，操作結束後，則在第二列上所寫的數為: 1, 2, 3, 4, 5, 3, 7, 8 及 15，其總和為 48)