

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2005 Kaohsiung Invitational World Youth Mathematics
Intercity Competition

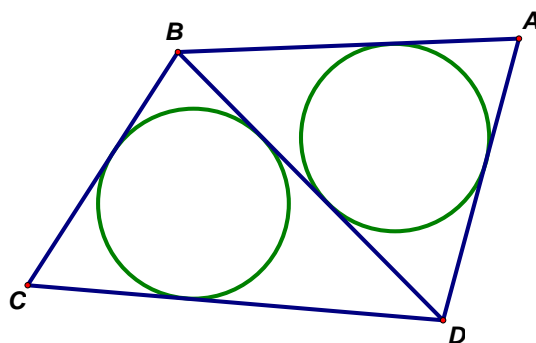
2005 青少年數學國際城市邀請賽

隊際賽試題

2005/8/3 高雄市

隊名：_____ 得分：_____

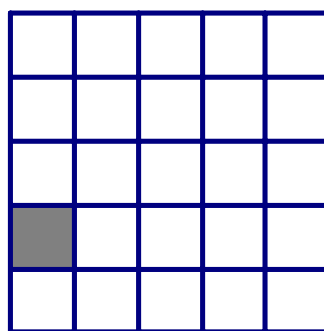
1. 已知 a, b, c 為正整數且滿足： $a + b + c = 20$ 與 $ab + bc - ca - b^2 - 20 = 0$ 。
試求 abc 的所有可能值。
2. 已知 a_1, a_2, \dots, a_{49} 為 49 個正整數，這 49 個正整數的總和是 624。試證這 49 個正整數中至少有三個數是相等的。
3. 把既不是平方數，也不是立方數的所有自然數依照由小到大的順序排列，得到前六項為：2, 3, 5, 6, 7, 10。請問這些自然數的排列中其第 2005 個數是什麼？
4. 如圖所示， $ABCD$ 是一個凸四邊形。如果 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的內切圓與線段 BD 相切於同一點，試證明：四邊形 $ABCD$ 有內切圓。




5. 試找出一個三角形使得我們可以將該三角形分割成 20 個全等的小三角形。
並請將分割方式畫出來。

6. A 與 B 二人對賭，由 B 作莊，A 每次可下注 0 元或多達至他所現擁有的賭金。若某局 A 贏了，則 B 賠付 A 同額的投注金；若 A 輸了，則 B 沒收 A 的投注金。開始時 A 有賭資 3 元，二人共賭五局，B 向 A 保證只讓 A 輸一局，但每局要等 A 下注完後他才決定要不要贏這一局。請問 A 有何策略可以保證在五局結束後能擁有最多的錢？共有多少元？

7. 一隻青蛙位於如下圖所示 5×5 方格表塗上陰影的方格內，它可以水平或鉛直跳到的相鄰的方格內，但不得斜著跳。試證這隻青蛙無法恰好跳經過每個方格一次。



8. 試求正整數 n ，使得 $n^4 - 4n^3 + 15n^2 - 30n + 27$ 之值為正的質數。

9. 在 7×7 的正方形方格中，任意空去一個 1×1 的小方格後得到一個 48 個小方格圖案。試證此圖案可以沿格線完整地剪成 16 個  形圖案。

10. 已知 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是正整數， $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 1$ 且滿足

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{a_0}\right).$$

請找出 $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ 所有可能的解。