

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2006 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初選

個人數學競賽試題

(參考答案)

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(1) ans: $= (10^{2006})^2 = 10^{4012}$

(7) ans : 1800

(2) ans: 14

(8) ans : $\frac{2005 \times 2006}{4} = 1005507.5$

(3) ans : 296

(9) ans : 1 : 4

(4) ans : 600

(10) ans : 17(原題目漏打三邊長
都為整數，故答 $\sqrt{181}$ 、 $\sqrt{73}$ 、 $\sqrt{37}$ 等使面積為整數之答案亦給分)

(5) ans : 48

(11) ans: 5 : 6

(6) ans : 3

(12) ans : 15

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 將數字 2006 用二個或二個以上連續正整數之和來表示，問共有幾種不同表示法(這些連續正整數由小而大排列)。

(Sol.) 令 $2006 = n + (n+1) + \cdots + m$

$$\begin{aligned} &= \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 + n}{2} \\ &= \frac{(m-n)(m+n) + (m+n)}{2} = \frac{(m+n)(m-n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 4012 = (m+n)(m-n+1) = 2^2 \times 1003 = 2^2 \times 17 \times 59$$

$$\because 2 \leq m-n+1 < m+n$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c|c|c|c} m+n & 68 & 2 \times 59 & 17 \times 59 & 2 \times 17 \times 59 & 2^2 \times 59 \\ \hline m-n+1 & 59 & 2 \times 17 & 4 & 2 & 17 \\ & & \text{(不合)} & & \text{(不合)} & \end{array}$$

$$\Rightarrow m+n+m-n+1=4m+1$$

$$\therefore \begin{array}{c|c|c|c} m & 63 & 503 & 126 \\ \hline n & 5 & 500 & 110 \end{array}$$

共有三組不同表法。

2. 設 x, y 為正整數，已知 $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ ，求 (x, y) 的解。

解：令 $a = xy$, $b = x + y$

$$\text{原題即} \begin{cases} a + b = 35 \\ a \cdot b = 286 \end{cases}$$

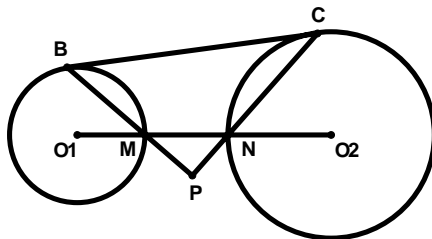
$\therefore a, b$ 為 $z^2 - 35z + 286 = 0$ 之解。

$$(a, b) = (13, 22) \text{ or } (22, 13)$$

$$\text{但} \begin{cases} a = x \cdot y = 13 \\ b = x + y = 22 \end{cases} \text{無正整數解，不合。}$$

$$\begin{cases} a = x \cdot y = 22 \\ b = x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2, 11) \text{ or } (11, 2)$$

3. 已知圓 O_1 、圓 O_2 外離， \overline{BC} 是圓 O_1 與圓 O_2 的外公切線，B、C 為切點，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 分別交圓 O_1 、圓 O_2 於 M、N， \overline{BM} 、 \overline{CN} 的延長線交於點 P（如下圖）。請問 \overline{BP} 與 \overline{CP} 是否垂直？證明你的結論。



解：作 $\overline{O_1B}$ 與 $\overline{O_2C}$

$$\angle PNM = \angle CNO_2 = \frac{1}{2}(\pi - \angle NO_2C)$$

$$\angle PMN = \angle BMO_1 = \frac{1}{2}(\pi - \angle MO_1B)$$

$$\text{又 } \overline{O_1B} \perp \overline{BC}, \overline{O_2C} \perp \overline{BC}$$

$$\therefore \angle NO_2C + \angle MO_1B = \pi$$

$$\therefore \angle PNM + \angle PMN = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \angle BPC = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \overline{BP} \perp \overline{CP}$$

2006 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初選

隊際競賽試題

編號:_____校名:_____國中 姓名:_____

作答時間: 一小 時

每大題各 30 分，共 120 分

1. 設三個正整數 a 、 b 、 c 的最大公因數為 1，且滿足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 。求證：

$a+b$ 、 $a-c$ 和 $b-c$ 都是完全平方數。

pf: $a+b = \frac{ab}{c}$ (*) $\Rightarrow c \mid ab$

\therefore 令 $c = xy$ ，其中 $x \mid a$, $y \mid b$

$\because (a, b, c) = 1 \Rightarrow (x, b) = 1, (y, a) = 1$

令 $a = ux$, $b = vy$

由(*)得 $ux + vy = uv$ (**)

$u \mid uv - ux = vy$, $\because (y, a) = (y, ux) = 1$

$\Rightarrow (u, y) = 1$, $\therefore u \mid v$

同理可證 $v \mid u$, $\therefore u = v$ #

由(**)得 $x + y = u$

而 $a + b = ux + uy = u^2$

$a - c = ux - xy = x(u - y) = x^2$

$b - c = uy - xy = y(u - x) = y^2$

2. 令 $n=2006$, $x_0 = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1})$, 其中 $k=1, 2, \cdots, n-1$ 。求 $x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005}$ 之值。

< 參考解法 >

$$x_k = \frac{1}{2006-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}) \quad , \quad \text{故 } (2006-k)x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1}$$

$$x_0 = \frac{1}{2006} \quad , \quad 2006x_0 = 1$$

$$k=1 \quad , \quad 2005x_1 = x_0 \quad , \quad \text{故 } 2006x_1 = x_0 + x_1$$

$$k=2 \quad , \quad 2004x_2 = x_0 + x_1 \quad , \quad \text{故 } 2006x_2 = x_0 + x_1 + 2x_2$$

$$k=3 \quad , \quad 2003x_3 = x_0 + x_1 + x_2 \quad , \quad \text{故 } 2006x_3 = x_0 + x_1 + x_2 + 3x_3$$

\vdots

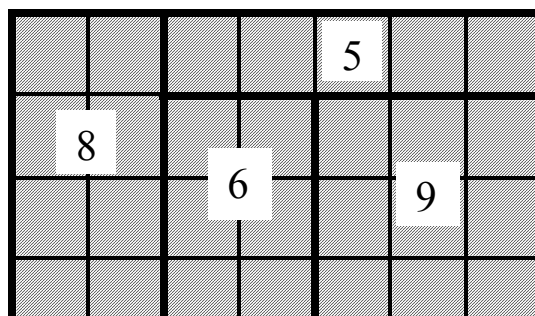
$$k=2005 \quad , \quad 2006x_{2005} = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{2004} + 2005x_{2005}$$

故可得

$$2006(x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005}) = 1 + 2005(x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005})$$

$$x_0 + x_1 + \cdots + x_{2005} = 1$$

3. 有一塊巧克力糖被劃分成 4×7 的小方格，我們可以把巧克力糖沿著格線從頭到尾剝開，但不可以只剝到一半或斜剝或疊合在一起剝。小明欲將這塊巧克力糖剝為四塊與朋友分享，請問剝出的四塊巧克力糖的小方格數共有幾種不同的可能(剝下的巧克力糖只考慮小方格數，不考慮順序)? 下圖是一個剝為 $5:6:8:9$ 的例子。

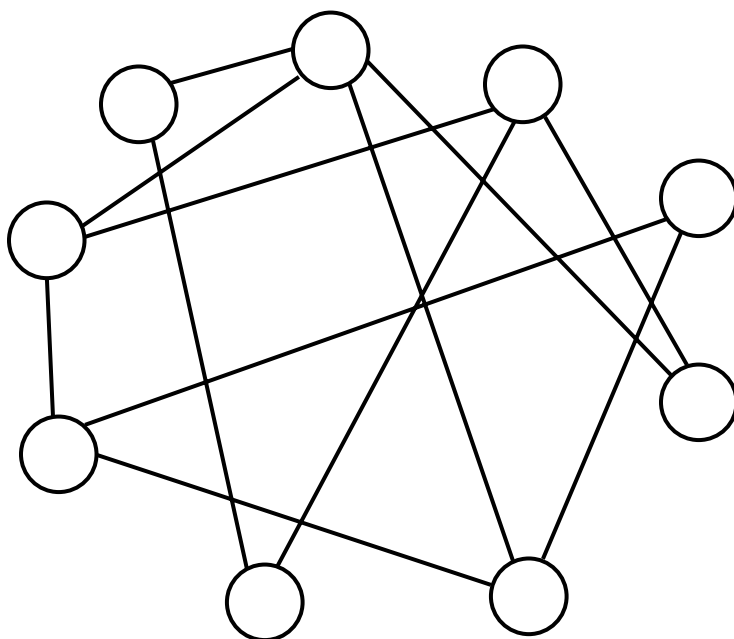


<參考解法>

考慮所有可能剝法，並刪除相同方格數的剝法後，可得以下共 69 種情況：

1	1	2	24	2	3	3	20	3	5	8	12
1	1	5	21	2	3	5	18	3	6	7	12
1	1	6	20	2	3	8	15	3	7	9	9
1	1	12	14	2	4	4	18	3	8	8	9
1	2	4	21	2	4	6	16	4	4	4	16
1	2	7	18	2	4	7	15	4	4	5	15
1	2	9	16	2	4	8	14	4	4	6	14
1	3	3	21	2	4	10	12	4	4	8	12
1	3	4	20	2	5	6	15	4	4	10	10
1	3	6	18	2	5	7	14	4	5	5	14
1	3	12	12	2	5	9	15	4	6	6	12
1	3	16	8	2	6	6	14	4	6	8	10
1	4	5	18	2	6	8	12	4	6	9	9
1	4	8	15	2	6	10	10	4	7	7	10
1	6	6	15	2	7	7	12	4	7	8	9
1	6	7	14	2	8	8	10	4	8	8	8
1	6	9	12	3	3	4	18	5	5	8	10
2	2	3	21	3	3	6	16	5	6	7	10
2	2	4	20	3	3	7	15	5	6	8	9
2	2	8	16	3	3	8	14	6	6	7	9
2	2	10	14	3	4	6	15	6	6	8	8
2	2	12	12	3	4	7	14	6	7	7	8
2	2	6	18	3	4	9	12	7	7	7	7

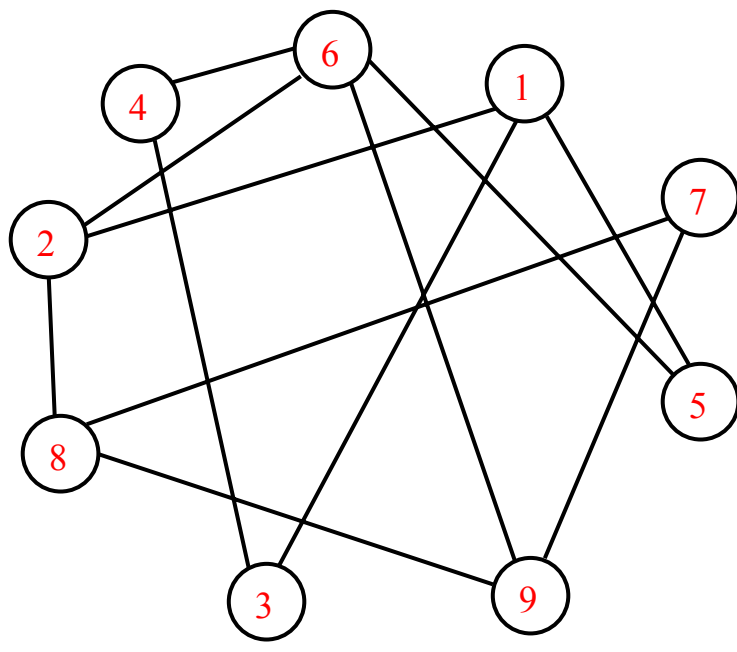
4. 將數字 1~9 不重複地填入下圖中的 9 個圓圈內，使得與填入 1 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 10；與填入 2 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 15；……；與填入 9 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 21；其餘填法如下圖右所列。



$\textcircled{1} \approx 10$	$\textcircled{2} \approx 15$
$\textcircled{3} \approx 5$	$\textcircled{4} \approx 9$
$\textcircled{5} \approx 7$	$\textcircled{6} \approx 20$
$\textcircled{7} \approx 17$	$\textcircled{8} \approx 18$
$\textcircled{9} \approx 21$	

解 答

將數字 1~9 不重複地填入圖中的 9 個圓圈內，使得每個圓圈所連接的數字和如圖右所列。



$\textcircled{1} = 10$	$\textcircled{2} = 15$
$\textcircled{3} = 5$	$\textcircled{4} = 9$
$\textcircled{5} = 7$	$\textcircled{6} = 20$
$\textcircled{7} = 17$	$\textcircled{8} = 18$
$\textcircled{9} = 21$	