

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2006 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初選
個人數學競賽試題

編號:_____校名:_____國中 姓名:_____

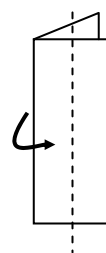
作答時間：二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

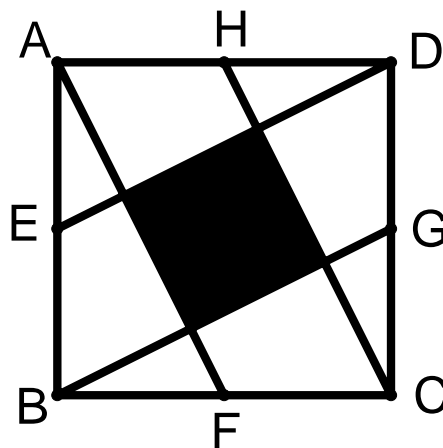
1. 計算 $\underbrace{99\cdots9}_{2006\text{個}} \times \underbrace{99\cdots9}_{2006\text{個}} + 1 \underbrace{99\cdots9}_{2006\text{個}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 設 m 為介於 9 和 17 之間的正整數，若 6，10 和 m 的平均數是偶數，則 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 設 n 為正整數，如果 n 與它的所有的數字之和為 313，則滿足這樣條件的 n 之最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
4. 已知一個五位數 n ，其任意兩個數字之差不小於 2，則滿足這樣條件的 n 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。
5. 設 a, b 為二正數，若 $(a-b):(a+b):ab = 1:7:24$ ，則該兩正數之乘積 $ab = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
6. 已知正整數 m, n 使得 $\frac{1}{3} < \frac{m}{n} < 1$ 成立。若將分數 $\frac{m}{n}$ 的分母乘以一個正整數，而分子加上此正整數，所得新分數的值與原分數的值相同。則滿足此條件的所有分數 $\frac{m}{n}$ 共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個。
7. 把分數依下列方式排成一數列：
 $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots$
其中 n 為正整數。則 $\frac{31}{30}$ 是在第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 項。
8. 計算 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2006}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{2006}\right) + \left(\frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{2006}\right) + \dots + \left(\frac{2004}{2005} + \frac{2004}{2006}\right) + \frac{2005}{2006}$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(翻面繼續作答)

9. 某人訂購 4 雙黑襪子和一些藍襪子，黑襪子每雙的價格是藍襪子的 2 倍，可是訂單上兩種顏色填顛倒了，為此他的支出增加 50 %，那麼原計畫訂購的黑襪子和藍襪子的數量比為_____。
10. 已知三角形之邊長均為整數，其中二邊長分別為 9、10，且其面積值為整數，則其第三邊長為_____。
11. 將正方形的紙片沿鉛直的中線對摺，繼續再將它沿其鉛直的中線對摺，得一摺線 (如右下圖中虛線)，今從虛線處剪開，而得到三張矩形紙片 (一張大的，兩張小的)，則每張小矩形周長和大矩形周長之比為_____。



12. 如下圖，點 E、F、G、H 分別是正方形 ABCD 各邊的中點。已知中間 陰影部分 (小正方形) 的面積是 45，則 \overline{AB} 長=_____。



(翻面繼續作答)

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

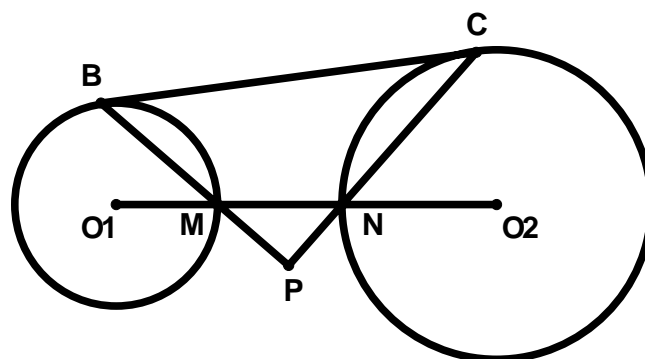
(注意：請在題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 將正整數 2006 用二個或二個以上連續正整數之和來表示，請問共有幾種不同的表示法(這些連續正整數由小而大排列)？

2. 設 x, y 為正整數，已知 $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$ ，求 (x, y) 的解。

(翻面繼續作答)

3. 已知圓 O_1 、圓 O_2 互相外離， \overline{BC} 是圓 O_1 與圓 O_2 的外公切線，點 B 、 C 分別為其切點，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 分別交圓 O_1 、圓 O_2 於 M 、 N ，令 \overline{BM} 、 \overline{CN} 的延長線交於點 P （如下圖）。請問 \overline{BP} 與 \overline{CP} 是否垂直？請證明你的結論。



2006 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初選
隊際競賽試題

編號:_____校名:_____國中 姓名:_____

作答時間：一 小 時

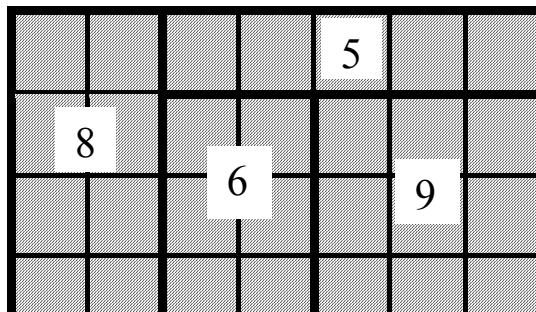
每大題各 30 分，共 120 分

1. 設三個正整數 a 、 b 、 c 的最大公因數為 1，且滿足 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ 。求證：
 $a+b$ 、 $a-c$ 和 $b-c$ 都是完全平方數。

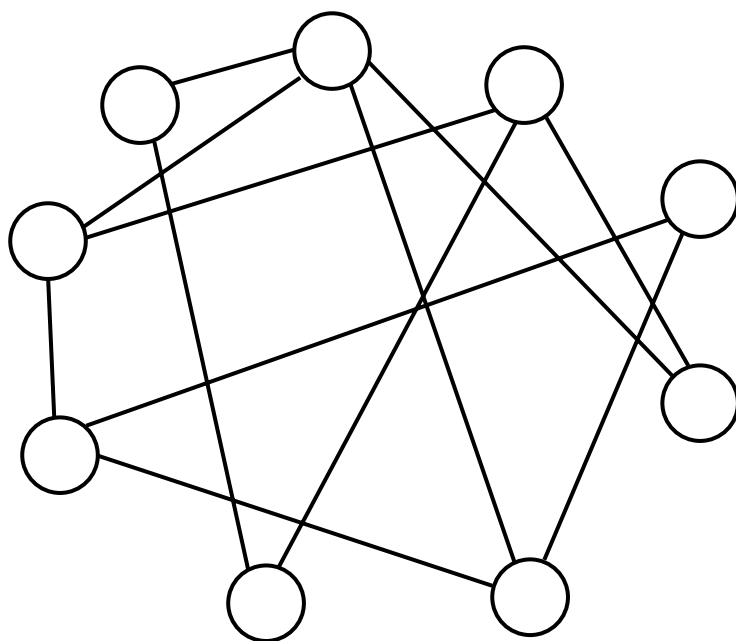
2. 令 $n=2006$ ， $x_0 = \frac{1}{n}$ ， $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \cdots + x_{k-1})$ ，
其中 $k=1, 2, \dots, n-1$ 。求 $x_0 + x_1 + \dots + x_{2005}$ 之值。

(翻面繼續作答)

3. 有一塊巧克力糖被劃分成 4×7 的小方格，我們可以把巧克力糖沿著格線從頭到尾剝開，但不可以只剝到一半或斜剝或疊合在一起剝。小明欲將這塊巧克力糖剝為四塊與朋友分享，請問剝出的四塊巧克力糖的小方格數共有幾種不同的可能(剝下的巧克力糖只考慮小方格數，不考慮順序)? 下圖是一個剝為 $5:6:8:9$ 的例子。



4. 將數字 $1 \sim 9$ 不重複地填入下圖中的 9 個圓圈內，使得與填入 1 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 10；與填入 2 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 15；.....；與填入 9 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 21；其餘填法如下圖右所列。



1 ≈ 10	2 ≈ 15
3 ≈ 5	4 ≈ 9
5 ≈ 7	6 ≈ 20
7 ≈ 17	8 ≈ 18
9 ≈ 21	