「2006 年青少年數學國際城市邀請賽」參賽代表

遴選初選

個人數學競賽試題

(參考答案)

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(1) ans: $=(10^{2006})^2=10^{4012}$

(2) ans: 14

(3) ans：296

(4) ans：600

(5) ans：48

(6) ans：3

(7) ans：1800

(8) ans：$\frac{2005\times2006}{4}=1005507.5$

(9) ans：1：4

(10) ans：17(原題目漏打三邊長都爲整數，故答$\sqrt{181}$等答案亦給分)

(11) ans: 5：6

(12) ans：15

第二部分：計算證明，每題 20 分, 共 60 分

(注意：在答案卷上請依題號作答，須詳列過程及說明理由)

1. 將數字 2006 用二個或二個以上連續正整數之和來表示，問共有幾種不同表示法(這些連續正整數由小而大排列)。

(Sol.)令 $2006 = n + (n+1) + \cdots + m$

$$= \frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{m^2 + m - n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{(m-n)(m+n) + (m+n)}{2} = \frac{(m+n)(m-n+1)}{2}$$

$\therefore 4012 = (m+n)(m-n+1) = 2^2 \times 1003 = 2^2 \times 17 \times 59$

$\because 2 \le m-n+1 < m+n$

$\therefore$

$m+n$	68	2×59	17×59	$2\times17\times59$	$2^2\times59$
$m-n+1$	59	2×17	4	2	17
		（不合）		（不合）	

$\Rightarrow m+n+m-n+1 = 4m+1$

$\therefore$

m	63	503	126
n	5	500	110

共有三組不同表法。

2. 設 x, y 為正整數，已知 $\begin{cases} xy + x + y = 35 \\ x^2y + xy^2 = 286 \end{cases}$，求$(x, y)$的解。

解：令 $a = xy,\ b = x + y$

原題即 $\begin{cases} a + b = 35 \\ a \cdot b = 286 \end{cases}$

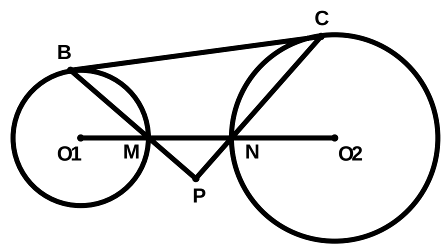
$\therefore a$、b 為 $z^2 - 35 \cdot z + 286 = 0$ 之解。

$(a,b) = (13,22)$ or $(22,13)$

但 $\begin{cases} a = x \cdot y = 13 \\ b = x + y = 22 \end{cases}$ 無正整數解，不合。

$\begin{cases} a = x \cdot y = 22 \\ b = x + y = 13 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2,11)$ or $(11,2)$

3. 已知圓 O_1、圓 O_2 外離，$\overline{BC}$ 是圓 O_1 與圓 O_2 的外公切線，B、C 為切點，連心線 $\overline{O_1O_2}$ 分別交圓 O_1、圓 O_2 於 M、N，$\overline{BM}$ 、$\overline{CN}$ 的延長線交於點 P（如下圖）。請問 $\overline{BP}$ 與 $\overline{CP}$ 是否垂直？證明你的結論。



解：作 $\overline{O_1B}$ 與 $\overline{O_2C}$

$$\angle PNM = \angle CNO_2 = \frac{1}{2}(\pi - \angle NO_2C)$$

$$\angle PMN = \angle BMO_1 = \frac{1}{2}(\pi - \angle MO_1B)$$

又 $\overline{O_1B} \perp \overline{O_1O_2}$, $\overline{O_2C} \perp \overline{O_1O_2}$

$\therefore \angle NO_2C + \angle MO_1B = \pi$

$$\therefore \angle PNM + \angle PMN = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \angle BPC = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \overline{BP} \perp \overline{CP}$

「2006年青少年數學國際城市邀請賽」參賽代表遴選初選

隊際競賽試題

編號:__________校名:_________ 國中　姓名:_______________

作答時間: 一小 時

每大題各30分，共120分

1. 設三個正整數 a、b、c 的最大公因數為1，且滿足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$。求證：

   $a+b,\ a-c$ 和 $b-c$ 都是完全平方數。

pf： $a+b=\dfrac{ab}{c}$　(*)　$\Rightarrow c\,|\,ab$

$\therefore$ 令 $c=xy$ ，其中 $x\,|\,a,\ y\,|\,b$

$\because (a,b,c)=1\ \Rightarrow (x,b)=1,\ (y,a)=1$

令 $a=ux,\ b=vy$

由(*)得　$ux+vy=uv$　(**)

$u\,|\,uv-ux=vy,\quad \because (y,a)=(y,ux)=1$

$\Rightarrow (u,y)=1,\quad \therefore u\,|\,v$

同理可證 $v\,|\,u,\quad \therefore u=v$　#

由(**)得 $x+y=u$

而 $a+b=ux+uy=u^2$

$a-c=ux-xy=x(u-y)=x^2$

$b-c=uy-xy=y(u-x)=y^2$

2. 令 n=2006，$x_0=\dfrac{1}{n}$，$x_k=\dfrac{1}{n-k}(x_0+x_1+\cdots+x_{k-1})$，其中 k =1，2，…，n－1。求 $x_0+x_1+\cdots+x_{2005}$ 之值。

＜參考解法＞

$x_k=\dfrac{1}{2006-k}(x_0+x_1+\cdots+x_{k-1})$，故$(2006-k)x_k=x_0+x_1+\cdots+x_{k-1}$

$x_0=\dfrac{1}{2006}$，$2006x_0=1$

$k=1$，$2005x_1=x_0$，故 $2006x_1=x_0+x_1$

$k=2$，$2004x_2=x_0+x_1$，故 $2006x_2=x_0+x_1+2x_2$

$k=3$，$2003x_3=x_0+x_1+x_2$，故 $2006x_3=x_0+x_1+x_2+3x_3$

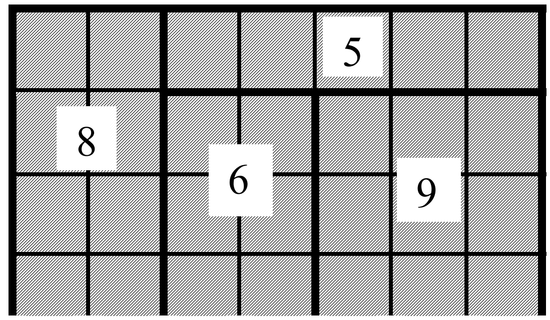
$\vdots$

$k=2005$，$2006x_{2005}=x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{2004}+2005x_{2005}$

故可得

$$2006(x_0+x_1+\cdots+x_{2005})=1+2005(x_0+x_1+\cdots+x_{2005})$$
$$x_0+x_1+\cdots+x_{2005}=1$$

3. 有一塊巧克力糖被劃分成 4×7 的小方格，我們可以把巧克力糖沿著格線從頭到尾剝開，但不可以只剝到一半或斜剝或疊合在一起剝。小明欲將這塊巧克力糖剝為四塊與朋友分享，請問剝出的四塊巧克力糖的小方格數共有幾種不同的可能(剝下的巧克力糖只考慮小方格數，不考慮順序)？下圖是一個剝為 5：6：8：9 的例子。

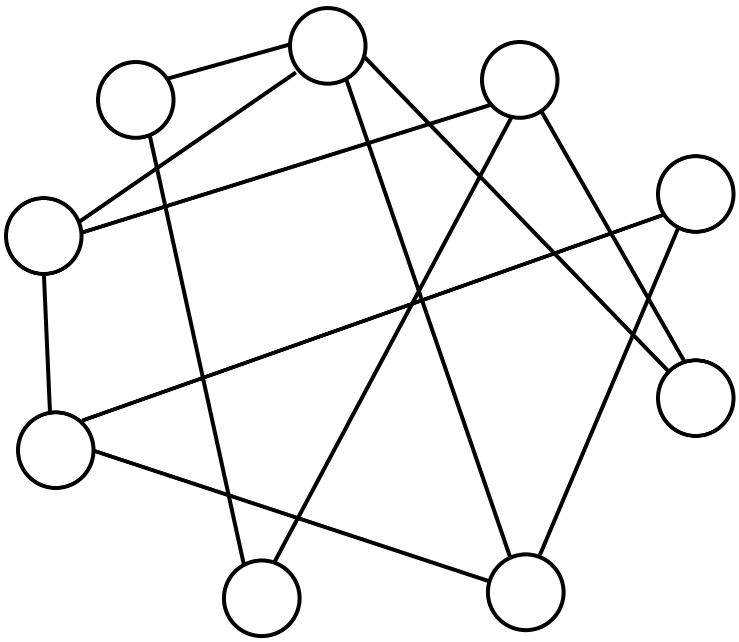


＜參考解法＞

考慮所有可能剝法，並刪除相同方格數的剝法後，可得以下共 61 種情況：

1	1	2	24	2	4	4	18	4	4	4	16
1	1	5	21	2	4	6	16	4	4	5	15
1	1	6	20	2	4	7	15	4	4	6	14
1	1	12	14	2	4	8	14	4	4	8	12
1	2	4	21	2	4	10	12	4	4	10	10
1	2	7	18	2	5	7	14	4	5	5	14
1	2	9	16	2	6	6	14	4	6	6	12
1	3	3	21	2	6	8	12	4	6	8	10
1	3	4	20	2	7	7	12	4	6	9	9
1	3	12	12	2	8	8	10	4	7	7	10
1	3	16	8	3	3	4	18	4	7	8	9
1	4	5	18	3	3	6	16	4	8	8	8
1	4	8	15	3	3	7	15	5	5	8	10
1	6	7	14	3	3	8	14	5	6	7	10
2	2	3	21	3	4	6	15	5	6	8	9
2	2	4	20	3	4	7	14	6	6	7	9
2	2	8	16	3	4	9	12	6	6	8	8
2	2	10	14	3	5	8	12	6	7	7	8
2	2	12	12	3	6	7	12	7	7	7	7
2	3	3	20	3	7	9	9				
2	3	8	15	3	8	8	9				

4. 將數字 1～9 不重複地填入下圖中的 9 個圓圈內，使得與填入 1 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 10；與填入 2 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 15；…..； 與填入 9 的圓圈相連接的圓圈內的數字和等於 21；其餘填法如下圖右所列。



1 ≈ 10　2 ≈ 15

3 ≈ 5　4 ≈ 9

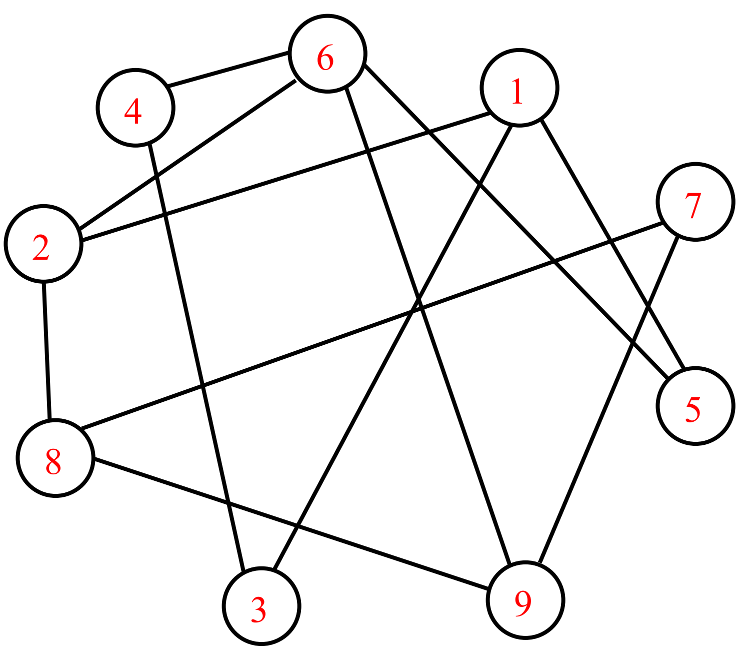
5 ≈7　6 20

7 ≈ 17　8 ≈18

9 ≈21

解　　答

將數字 1～9 不重複地填入圖中的 9 個圓圈內，使得每個圓圈所連接的數字和如圖右所列。



1 ＝10　2 ＝15

3 ＝5　4 ＝9

5 ＝7　6 ＝20

7 ＝17　8 ＝18

9 ＝21