

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2007 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

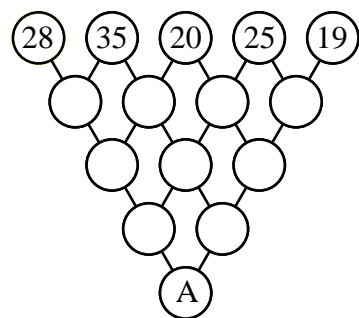
第一試 應用題 (考試時間 90 分鐘)

請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分

1. $1! + 2! + 3! + \cdots + 20!$ 的末位數字是多少？(其中 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$)
因 $5!$ 之後都是 10 的倍數，所以 $1! + 2! + 3! + \cdots + 20!$ 的末位數字即為 $1! + 2! + 3! + 4!$ 的末位數字，故答案為 3。
2. 有一個四位數，它的各位數字中沒有 0，將它的各位數字重新排列後，可得一些新的四位數。這些新數中最大的數比原來的四位數大 3834，這些新數中最小的數比原來的四位數小 4338。請問原來的四位數是什麼？

令最大數為 \overline{abcd} 、最小數為 \overline{dcba} ，則有 $\overline{abcd} - \overline{dcba} = 3834 + 4338 = 8172$ ，即 $111(a-d) + 10(b-c) = 908$ 。因 $10(b-c) \leq 80$ ，故有 $111(a-d) \geq 828$ ，所以 $a-d=8$ ， $b-c=2$ 。因 $a-d=8$ ，可知 $a=9$ 、 $d=1$ 。再由 \overline{abcd} 比原來的四位數大 3834 可知原來的四位數的個位數為 7；由 \overline{dcba} 比原來的四位數小 4338 可知原來的四位數的千位數為 5 或 6。但因現在已確知的數有 1、7、9，第 4 個數需與 7 差 2，故可得原來的四位數的千位數為 5，再利用最大的數比原來的四位數大 3834 可知原來的四位數為 5917。

3. 右圖中將相鄰兩個圓圈內的數之乘積寫在它們之間下方的圓圈內。請問最下方的圓圈內之數 A 的末尾共有多少個連續的 0？



將右圖已知各數因數分解得 $28 = 2^2 \times 7$ 、 $35 = 5 \times 7$ 、 $20 = 2^2 \times 5$ 、 $25 = 5^2$ 、 19 。只需考慮各數因數分解式中 2 與 5 的指數即可，故第二層四個數因數分解式中 2 與 5 的指數部分由左至右依序為 $2^2 \times 5$ 、 $2^2 \times 5^2$ 、 $2^2 \times 5^3$ 及 5^2 ，第三層由左至右依序為 $2^4 \times 5^3$ 、 $2^4 \times 5^5$ 及 $2^2 \times 5^5$ ，第四層由左至右依序為 $2^8 \times 5^8$ 及 $2^6 \times 5^{10}$ ，第五層為 $2^{14} \times 5^{18}$ ，故 A 的末尾有 14 個 0。

4. 有九張卡片，上面分別不重複地寫著 1~9 等九個數，甲、乙、丙、丁四人每人各拿兩張。

甲說：我的兩張牌上的數之和是 9。

乙說：我的兩張牌上的數之差是 6。

丙說：我的兩張牌上的數之積是 12。

丁說：我的兩張牌上的數之商是 3。

請問哪一張牌沒有被這四個人選取？

由四人所說的話可推知四人可能拿牌的情況為：

甲：1 和 8、2 和 7、3 和 6、4 和 5

乙：1 和 7、2 和 8、3 和 9

丙：2 和 6、3 和 4

丁：1 和 3、2 和 6、3 和 9

- (i) 若甲為 1 和 8，則乙必為 3 和 9、丙必為 2 和 6，但此時丁無論如何選取都會重複拿牌，故不合。
- (ii) 若甲為 2 和 7，則丙必為 3 和 4，但此時乙無論如何選取都會重複拿牌，故不合。
- (iii) 若甲為 3 和 6，則此時丙無論如何選取都會重複拿牌，故不合。
- (iv) 由以上三點可知甲必拿 4 和 5、則丙必拿 2 和 6，以及乙拿取 1 和 7、丁拿取 3 和 9，故沒有被選取的牌是 8。

5. 解數謎：每一個字母代表一個數字，且不同的字母代表不同的數字。

$$\begin{array}{rcccccc} & F & O & R & T & Y & \\ & & & & T & E & N \\ + & & & & T & E & N \\ \hline S & I & X & T & Y & & \end{array}$$

請問 SIXTY = ?

由 $Y + 2N$ 的個位數為 Y 可知 N 為 0 或 5；若 N 為 5，則得到 $T + 2E + 1$ 的個位數為 T ，矛盾，故 N 為 0。此時則有 $T + 2E$ 的個位數為 T ，所以 $E = 5$ 且可得 $R + 2T + 1$ 的個位數為 X 。因 $R + 2T + 1 < 27$ 以及 $F、S、O、I$ 皆不同，所以 O 與 $R + 2T + 1$ 的十位數之和必大於 10，因此 $O = 9$ 、 $R + 2T + 1$ 的十位數為 2 以及 $I = 1$ ， $F + 1 = S$ 。因為 $I = 1$ ，所以 $R + 2T + 1 > 21$ ，即 $R + 2T > 20$ ，可得 $T > 5$ 。

- (i) $T = 6$ ，則 $R > 8$ ，即 $R = 9$ ，矛盾。
- (ii) $T = 7$ ，則 $R > 6$ ，故 $R = 8$ ，此時 $X = 3$ ，所以 $F、S、Y$ 為 2、4、8 的一種排列，與 $F + 1 = S$ 矛盾。
- (iii) $T = 8$ ，則 $R > 4$ ，故 $R = 6$ 或 7：
 - (a) 若 $R = 6$ ，則 $X = 3$ ，此時 $F、S、Y$ 為 2、4、7 的一種排列，與 $F + 1 = S$ 矛盾。
 - (b) 若 $R = 7$ ，則 $X = 4$ ，此時 $F、S、Y$ 為 2、3、6，故 $SIXTY = 31486$ 。

6. 一個普通的時鐘，其秒針每次都準確地在時鐘的小分格上移動（由 0° 開始每秒鐘準確地移動 6° ）。請問時針恰好準確地在小分格上，且秒針恰好超前時針 54° 是發生在幾點幾分？

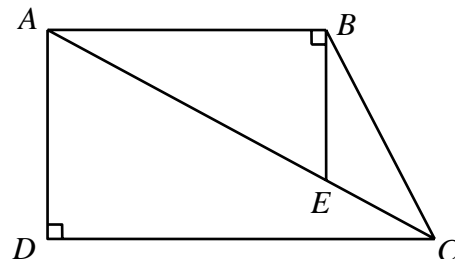
當時針恰好準確地在小分格上，則秒針必須準確地在鐘面數字 12 處。秒針超前時針 54° ，即秒針與時針相距 9 個小分格，這是發生在時針位於鐘面數字 10 前面一小分格上，此時的時刻是 10 時 12 分。

7. 如右圖， \overline{CD} 垂直 \overline{AD} ， \overline{AB} 垂直 \overline{BE} ， \overline{AB} 垂直 \overline{AD} 。

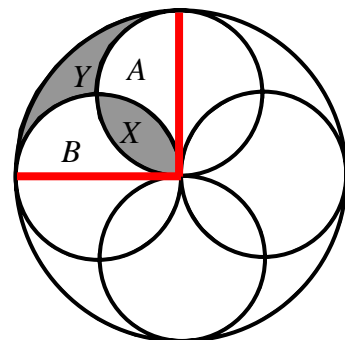
已知 $\overline{AB} = 15$ ， $\overline{AD} = 12$ ， $\triangle BEC = 15$ 。求 $\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = ?$

$$\triangle ABC = 15 \times 12 \div 2 = 90, \triangle ABE = 90 - 15 = 75。$$

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = \frac{\triangle BCE}{\triangle ABE} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5}。$$



8. 如圖，四個小圓的半徑皆為大圓半徑的一半，陰影 X 的面積為 30 cm^2 ，請問陰影 Y 之面積為多少 cm^2 ？（ $\pi = 3.14$ ）
令小圓半徑為 a ，則大圓半徑為 $2a$ 。如圖，自大圓圓心做兩個小圓的直徑。可得知區域 A 、 B 、 X 、 Y 的總面積為大圓面積的 $\frac{1}{4}$ 倍，即 $A+B+X+Y = \pi a^2$ ；而區域 A 與區域 X 、

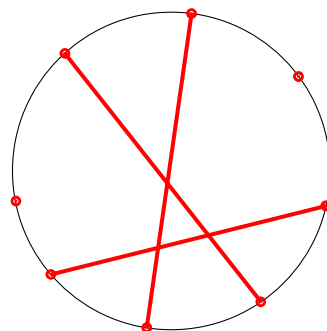


區域 B 與區域 X 的面積都是小圓面積的 $\frac{1}{2}$ 倍，即為 $B+X$

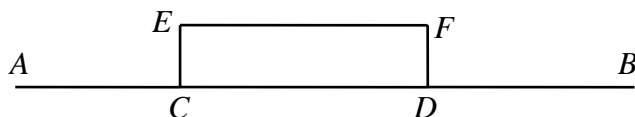
$$= A+X = \frac{1}{2} \pi a^2, \text{ 故 } B=A = \frac{1}{2} \pi a^2 - X, Y = \pi a^2 - X - A - B = X = 30 \text{ cm}^2.$$

9. 在圓周上有 8 個點，做出連接這 8 個點的所有線段，其中任何三條直線都不在圓的內部相交於同一點。請問這些線段所相交圍出的三角形中，有多少個三角形其頂點全部落在圓的內部？（註：圓周上的點不算是在圓的內部）

每三條線可圍成一個三角形，而這三條線的端點都必須相異，它們所相交圍出的三角形的頂點才會全部落在圓的內部，故每 6 點可決定一個符合條件的三角形，也就是從 8 個點中挑選 2 個點不用，故共有 $8 \times 7 \div 2 = 28$ 個。



10. 如下圖，甲從 A 出發，不斷往返 A 、 B 之間行走。乙從 C 出發，沿 $C-E-F-D-C$ 圍繞矩形不斷行走，兩人同時出發。已知 $\overline{AC} = 80 \text{ m}$ ， $\overline{CD} = \overline{EF} = 120 \text{ m}$ ， $\overline{CE} = \overline{DF} = 30 \text{ m}$ ， $\overline{DB} = 100 \text{ m}$ ，甲的速度是每秒 5 m ，乙的速度是每秒 4 m ，請問甲從背後第一次追上乙的地點距離 D 點多少 m ？



由乙的行進方式可知甲從背後追上乙時必是甲乙都從 D 往 C 走時。

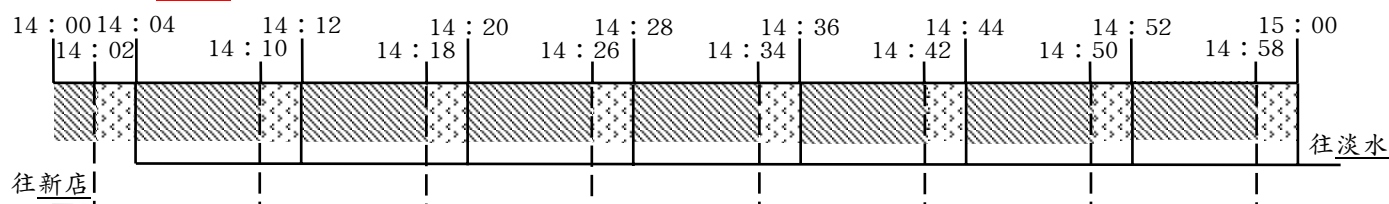
- (i) 當甲第一次從 A 到 B 後往回走到 D 時共花 $(80+120+100+100) \div 5 = 80$ 秒，此時乙走了 $4 \times 80 = 320 \text{ m}$ ，此位置在 C 、 E 之間離 C 點 20 m 、離 E 點 10 m 的位置，甲無法在此處追上乙。
- (ii) 甲第二次由 B 往 A 的方向走到 D 點是在出發 $(300 \times 3 + 100) \div 5 = 200$ 秒後，而乙走了 $200 \times 4 = 800 \text{ m}$ ，位置在 \overline{CD} 上離 D 點 20 m 處，即在甲前面 20 公尺處。此時甲要追上乙需花 $20 \div (5 - 4) = 20$ 秒，在距 D 點 $5 \times 20 = 100 \text{ m}$ 處追上乙。

11. 小強和小美兩人每次都在下午兩點到三點間隨意的一個時刻於捷運劍潭站月台上碰面，再一起搭捷運出遊，兩人約定如果往新店的列車先來，就去新店玩；如果往淡水的列車先來，就去淡水玩。經查詢列車時刻表後發現在這個時段每班往返列車的間距都是 8 分鐘（如下表），且列車運行準時無誤。

請問兩人到淡水玩的機會與到新店玩的機會之比是多少？

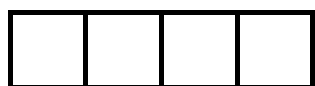
往 <u>淡水</u>	14 : 04	14 : 12	14 : 20	14 : 28	14 : 36	14 : 44	14 : 52	15 : 00
往 <u>新店</u>	14 : 02	14 : 10	14 : 18	14 : 26	14 : 34	14 : 42	14 : 50	14 : 58

由時刻表可觀察出，若於 14 : 00 到 14 : 02 這 2 分鐘內碰面則會去新店；若於 14 : 02 到 14 : 04 這 2 分鐘內碰面則會去淡水；若於 14 : 04 到 14 : 10 這 6 分鐘內間碰面，就會去新店；若於 14 : 10 到 14 : 12 這 2 分鐘內碰面則會去淡水。可將觀察得到的結果用下圖表示：



在 的區間內會到新店去，在 的區間內會到淡水去。共有 16 分鐘的機會去淡水，共有 44 分鐘的機會去新店，其比是 $16:44=4:11$ 。

12. 小英用 1×4 只有單面為紅色的卡紙三張，將其中二張左右側邊黏貼在一起，再用第三張穿過它們連成一個鍊環的紙製玩具（如下右圖所示）。



適當調整此玩具可組成一個立在桌面上，外表五個面(蓋在桌面上這一面除外)全為紅色的正六面體。小明非常頑皮，偷偷地把這三張卡紙的某些紅色小方格改塗為藍色，想迫使小英組成此紙製玩具時無法達成外表五個面全為紅色的目的(但小英會盡量使塗有藍色的表面藏在內部或蓋在底面而不露在外部)。請問小明至少要將幾個小方格塗為藍色？

由組裝方法可知，若將此鍊環組成正六面體，則組成之正六面體的六個面中，有兩個面會由位於中央的環提供，兩側的環分別提供一個面及三個面。由正六面體立於桌面上可知小英可讓六面體至多有一面為藍色。

當小明只塗五面：

- (i) 四面都在同一張卡紙上、一面在另一張卡紙上：小英可將四面都塗成藍色的卡紙選為提供一面的側環，另一張卡紙塗成藍色的小方格藏在內部，全部可只有露出一面為藍色，小明無法得逞。
- (ii) 三面在同一張卡紙上、二面在另一張卡紙上：將三面藍色的卡紙選為提供一面的側環，將紅色的小方格露出，再將另一張塗有二面藍色的卡紙選為提供二面的中央環，無論二個藍色的小方格如

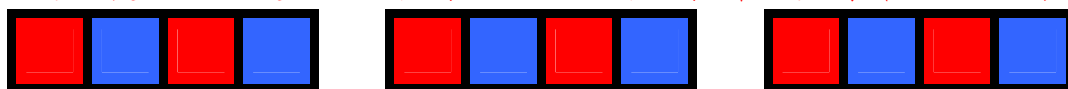
何塗，均可經適當調整後至多只露出一面為藍色，小明無法得逞。

(iii) 三面在同一張卡紙上、一面在另一張卡紙上、一面在第三張卡紙上：將三面藍色的卡紙選為提供一面的側環，將紅色的小方格露出，其他兩張卡紙均可經適當調整將藍色的小方格全藏在內部，小明無法得逞。

(iv) 二面在同一張卡紙上、二面在另一張卡紙上、一面在第三張卡紙上：將二面藍色的卡紙都選為側環，無論二個藍色的小方格如何塗，均可經適當調整全部至多只露出一面為藍色，第三張卡紙可經適當調整將藍色的小方格藏在內部，小明無法得逞。

綜合以上各項得知，小明只塗五面是無法得逞的。

因此至少需塗 6 面，塗法如下圖，無論如何組裝都至少會露出二面為藍色：



2007 小學數學競賽選拔賽決賽(一)試題

第 二 試: 綜合能力測驗 (考試時間 60 分鐘)

1. 小田宣稱他有魔法，可以從撲克牌的背面透視它的花色，於是大家把包括有黑桃、紅心、方塊及梅花各 1 張的一疊牌洗好後，交由小方把這疊牌的牌面向下放在小田面前，要他說出這疊牌最上面一張牌的花色。當小田說出答案後即把這張牌翻開來驗證他的答案是否正確，並將這張牌放在一旁不再加入這疊牌中；接著繼續猜測下一張牌，重複以上程序。他試圖使猜測的正確次數愈多愈好。這副牌背面的圖樣完全相同但並非對稱的(即可以分辨出圖案朝前或朝後)。小方雖然知道這疊牌的排列順序，但他不能更動，也不能偷偷告訴小田。但是他可以依照事先與小田約定好的方式擺置撲克牌背面圖案的朝向來暗中協助小田。事實上小田並無魔法，他只是利用數學方法來作分析判斷。請問在小方的協助下，小田至少能準確地猜測到幾張牌？兩人如何約定擺置撲克牌的方式？

(一)牌背有朝前、朝後兩種不同的情況，設朝前為 1、朝後為 0，等於一個訊息。

(二)將指示黑桃、紅心、方塊或梅花的兩張牌的牌背之訊息分別設定為(1, 1)、(1, 0)、(0, 1)、(0, 0)。(說明此情況得 5 分)

(三)第一張牌一定猜不到，因為猜中一張牌至少要有兩個訊息。

(四)第二張牌可用第一、第二張牌的牌背之訊息猜到，例如第二張牌為方塊可用(0, 1)，即第一張牌的牌背朝後、第二張牌的牌背朝前。

(說明此情況得 5 分)

(五) 第三、第四張牌，只用第三張的牌背的訊息就可全部猜中。只要將四種花色排序：黑桃>紅心>方塊>梅花，第三張的花色可能大於或小於第四張的花色。

(a)大於時：兩人約定第三張的牌背為 1。(b)小於時：兩人約定第三張的牌背為 0。

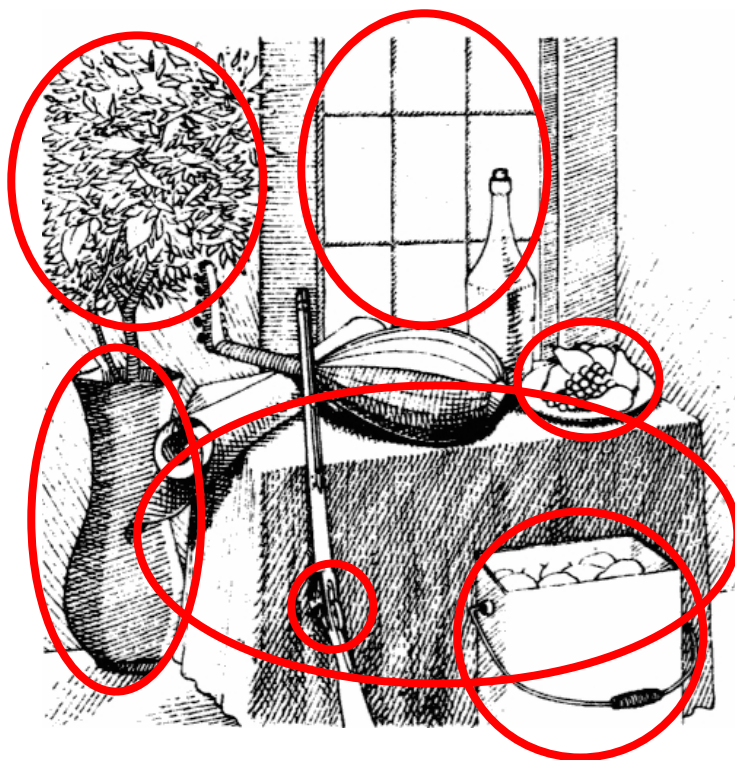
(說明此情況得 10 分)

例如：觀眾交給小方這疊牌由上至下為梅花、黑桃、方塊、紅心，則小方可將牌背圖案的朝向擺置為(後、後、前、隨意)，即傳遞給小田的訊息為(0, 0, 1, x)。故在小方的協助下，小田至少能準確地猜測到 3 張牌。

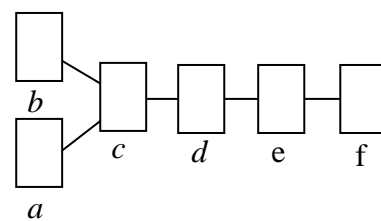
(張數正確得 5 分)

2. 下圖與反面下方之圖是一位畫家從不同角度所畫的素描。這二張圖看起來相似，但有七樣物品是明顯不同的，請用黑筆在本頁圈出不同之處。

(每圈對一個正確答案給 3 分，每圈出一個錯誤答案倒扣 3 分，直到 0 分為止，全對給 25 分)



3. A、B 二人玩紙牌遊戲，紙牌共 6 張，牌上分別不重複地印有數 1、2、3、4、5、6。B 將牌依任意次序在桌面上排入如右圖的小方格內，每個人都可看到牌上的號碼。由 A 先開始輪流每人每次拿一張牌，每次只能從整列牌的兩端拿牌(只有一個分支拿光， c 不算端點)，直到拿光為止，所取得的牌上的數的總和較大者為贏家。請問無論 B 如何安排這些牌，無論 B 如何取牌，A 有無必勝的策略？請詳細說明您的理由。



【引理一】4 張紙牌排成一列，先手必勝。

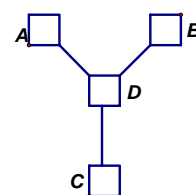
如同複賽第 4 題，將紙牌黑白相間塗色，先手取牌上的數的總和較大的顏色。

【引理二】4 張紙牌排成如右圖三支叉形狀，先手必勝。

先手先取 A, B, C 中較大者，因為 D 不算端點，後手只能拿 B 或 C。

先手再取剩下二者中較大者，故先手必勝。

(會正確引用此二引理每個得 5 分)



回到原題：

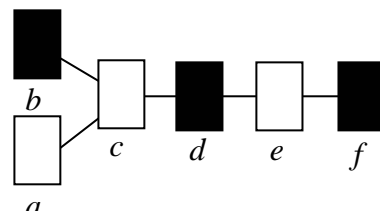
若 a, b, f 三者中 a 或 b 最大，則先手先取這張最大者，後手只能拿 f 或 a (或 b)，第一輪先手就較大。剩下 4 張紙牌化歸為【引理一】的情況，故先手必勝。
(說明此情況先手必勝得 5 分)

若 a, b, f 三者中 f 最大，此時，分 (1) $f > e$ ；(2) $e > f$ 二種情況討論：

(1) 先手先取 f ，後手無論如何取第一輪都比先手小。剩下 4 張紙牌化歸為【引理一】或【引理二】的情況，故先手必勝。

(2) 將 a, b 二者中較小者塗上黑色(不仿假設 b 較小)，同時也將 d, f 也塗上黑色，其餘塗白色。

若塗白色牌上的數的總和較大，則先手先取 a ，迫使後手必須取黑色的 b 或 f ，接著先手可取盡所有白色的牌而獲勝。(說明此情況先手必勝得 5 分)

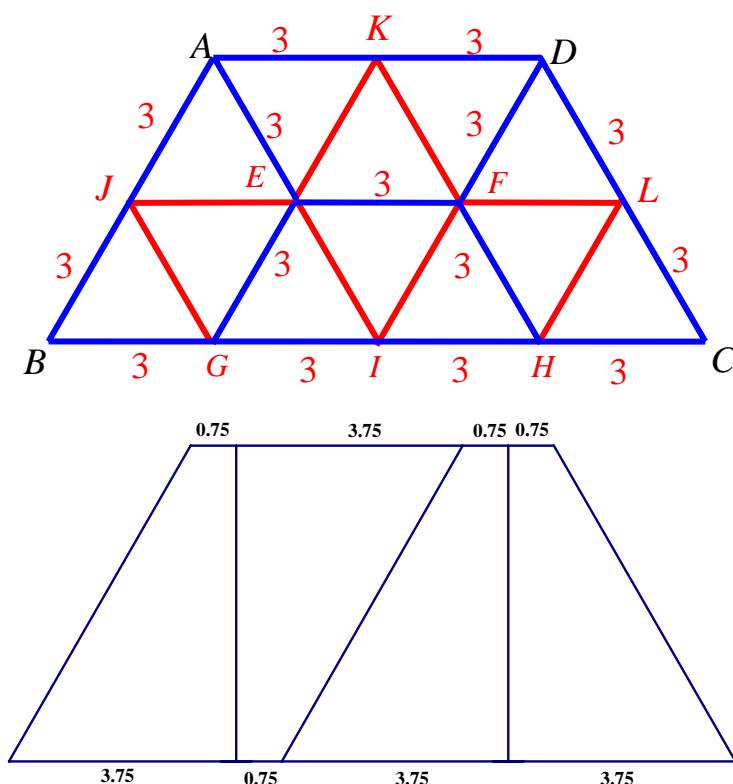


若塗黑色牌上的數的總和較大，則先手先取 f ，(甲)接著後手若取 a 或 e ，先手可取盡所有黑色的牌而獲勝；(乙)後手若取 b ，先手再取 a ，因為 $a > b$ 先手並不吃虧，先手可得 $a + d + f > b + d + f > a + c + e$ 而獲勝。(說明此情況先手必勝得 5 分)

綜合以上分析，無論 B 如何安排這些牌，無論 B 如何取牌， A 必勝。

4. 下圖是一個等腰梯形的紙片， $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD} = 6$ ， $\overline{BC} = 12$ 。請將它分割為四片全等的四邊形。

如圖，取 \overline{BC} 中點 I 。連接 \overline{AI} 、 \overline{DI} 。
因 $\overline{CI} = \overline{BI} = 6 = \overline{AD}$ 且 \overline{AD} 平行 \overline{BC} ，
所以 $AICD$ 、 $ABID$ 為平行四邊形，且
 $\overline{CI} = \overline{BI} = 6 = \overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD} = \overline{AI} = \overline{DI}$ ，
所以 $\triangle ABI$ 、 $\triangle AID$ 、 $\triangle CDI$ 均為正三角形。過 \overline{AB} 的中點 J 做 \overline{AI} 的平行線 \overline{JG} ，過 \overline{DC} 的中點 L 做 \overline{DI} 的平行線 \overline{LH} ，取 \overline{AD} 的中點 K ，連接 \overline{KG} 、 \overline{KH} 分別交 \overline{AI} 、 \overline{DI} 於 E 、 F ，連接 \overline{JE} 、 \overline{EF} 、 \overline{FL} ，可利用平行線與比例關係得知每個小三角形都是正三角形。而四邊形 $AEGB$ 、 $AEFD$ 、 $DFHC$ 、 $EFHG$ 都是由三個全等的小正三角形所組成，故都是全等的四邊形。



(切法正確得 15 分，證明正確得 10 分)

解法二：如圖：