注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。**可直接下載而不須申請**。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2008 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選初賽

個人數學競賽試題

編號:_____校名:_____ 國中　　姓名:_____

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1.由 2008 個 1 組成的數$\underbrace{111.....11}_{2008個「1」}$，被 41 除所得的餘數是____29_____。

2. 在 1 與 2008 之間的所有整數，同時以 3, 5, 7 除之都餘 2 的數有____20_____個。

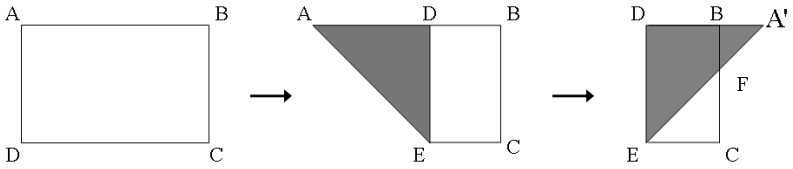
3. 若 $a=1000,\ b=100,\ c=10,\ d=1$，則

$(a+b+c-d)+(a+b-c+d)+(a-b+c-d)+(-a+b+c+d)=$___2220____。

4. 若 $1+x+x^2+x^3=0$，則多項式 $1+x+x^2+.....+x^{2007}$ 的值等於___0_____。

5. 將一長方形切去一個角之後得到一個五邊形，其邊長分別為 13，19，20，25 和 31(單位)，則此五邊形的面積為__745____(平方單位)。

6. 將一張矩形紙片 *ABCD* 摺疊，使得 *AD* 邊落在 *AB* 邊上，而得摺痕 *AE*，再將三角形 *AED* 以 *DE* 為摺痕向右摺疊，使得 *A'E* 與 *BC* 交於點 *F*，已知 *AB* =13，且 *CF* =5，則 *AD* 的長為 ____8____。



7. 小王用 1000 元買了三種不同的零食共 100 包，巧克力每包 50 元、洋芋片每包 10 元、糖果 2 包 1 元，則小王買了__19___包巧克力。

8. 已知 *a* 為整數且方程式 $(x-a)(x-5)-1=0$ 有二個整數根，則 *a* 的值為_____5___。

(翻面繼續作答)

9. 已知 a,b 兩數的比為 5：3，並且它們的最大公因數與最小公倍數的和是 1040，則 $a+b=$__520____。

10. 從 1, 2, 3,…., 9 九個數中選取不相等的兩數使其和為偶數，則共有___16____種取法。

11. 設 k 為整數，若兩個質數 p 和 q 恰為方程式 $x^2-19x+k=0$ 的兩個根，則 $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ 的值為__ $\frac{293}{34}$ 或 $8\frac{21}{34}$._。

12. 有一個人在西元 1925 年跟朋友說：「在西元 a^4+b^4 年時我的年紀為 a^2+b^2 歲；在西元 $2m^2$ 年時我 $2m$ 歲」。此人出生於西元___1860___年。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 兩個四位數 m 與 n 相加之後得到的和 $m+n$ 仍為四位數，且 $m+n$ 沒有任何一位數有進位的情況發生，我們則稱 m 與 n 為一對簡單數對(簡單數對(a, b)與(b, a)視為相同。例如：$m=1234$，$n=2345$，兩數之和為 $m+n=3579$，沒有任何一位數有進位，則稱(1234, 2345)為一對簡單數對)。請問和為 9999 的簡單數對共有多少對？

參考解法及配分：

若 $m+n=9999$，則 $n=9999-m$。(5pts)

可觀察出無論四位數 m 之值為 1000~8999 時，運算過程中都不會有借位的運算，(5pts)

故知共有(8999-1000+1)÷2=4000 對簡單數對。(10pts)

答：4000 對

2. 若一個等腰三角形的一個內角之角度為 $x°$，則另一個角度不等於 $x°$ 的內角之角度可能的值有兩種。當這兩種可能的值之差恰為 $x°$ 時，請問 x 之值為何？

參考解法及配分：

若 $x°$ 為等腰三角形的頂角，則另一個角度不為 $x°$ 的角為底角，其角度為 $\frac{1}{2}(180°-x°)$；(5pts)

若 $x°$ 為等腰三角形的底角，則另一個角度不為 $x°$ 的角為頂角，其角度為 $180°-2x°$。(5pts)

(i)若 $\frac{1}{2}(180°-x°)-(180°-2x°)=x°$，則知 x=180，故不可能； (4pts)

(ii)若 $(180°-2x°)-\frac{1}{2}(180°-x°)=x°$，則知 x=36。 (6pts)

答：36

3. 有一艘船逆流而上，從甲地航行到乙地需時$8\frac{4}{7}$小時，在靜水中這艘船從甲地到乙地所需的時間比一塊木板從乙地順流漂到甲地所需時間少 7 小時。請問這艘船順流從乙地航行到甲地需多少小時？

參考解法及配分：

假設船速為 x、水流速為 y、甲、乙兩地相距 S。故可得以下聯立方程組：

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x-y}=8\dfrac{4}{7}=\dfrac{60}{7} \\ \dfrac{S}{x}=\dfrac{S}{y}-7 \end{cases} (6\,pts) \Rightarrow \begin{cases} 7S=60(x-y) \\ 7xy=S(x-y) \end{cases} \Rightarrow xy=\frac{S^2}{60};(4\,pts)$$

而船順流航行從乙地到甲地則需$\dfrac{S}{x+y}$小時。(3pts)

因$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$，(3pts)

故有$(x+y)^2=\left(\dfrac{7S}{60}\right)^2+\dfrac{S^2}{15}=\left(\dfrac{17S}{60}\right)^2$，因此$\dfrac{S}{x+y}=\dfrac{60}{17}=3\dfrac{9}{17}$。(4pts)

答：$3\dfrac{9}{17}$小時