2008 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

編號:__________校名:____________ 國中　　　姓名:_______________

作答時間: 二 小 時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. $\frac{2008}{1000}+\frac{2008}{1001}+\frac{2008}{1002}+\frac{2008}{1003}+\frac{2008}{1004}+\frac{2008}{1005}+\frac{2008}{1006}+\frac{2008}{1007}+\frac{2008}{1008}+\frac{2008}{1009}$ 所得結果的整數部分為__19__。

2. 計算 $\underbrace{99\cdots9}_{99個}\times\underbrace{99\cdots9}_{99個}+1\underbrace{99\cdots9}_{99個}$ 之值為__10^{198}__。

3. 今有 n 個自然數（可以相等），其中任何 7 個數之和都小於 15，已知 n 個自然數之和為 100，則 n 的最小值是__50__。

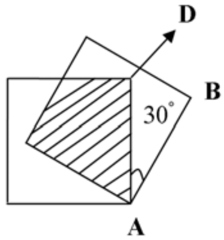
4. 設 m 為 13 的倍數且由 4017 個數碼組成，前面 2008 個以及後面的 2008 個數碼都是 7，則正中間的數碼是__8__。

5. 若 $f(x)=(2x^5+2x^4-53x^3-57x+54)^{2008}$，則 $f(\frac{\sqrt{111}-1}{2})$ 之值為__1__。

6. 設 P 為正方形 $ABCD$ 內的一點，已知邊長 AB=2，且 P 到正方形 $\overline{AB}$ 的兩端點 A、B，以及到對邊 $\overline{CD}$ 的距離都相等，若 d 表示這個相同的距離，則 d=__5/4__。

7. 已知方程式 $x^2-8x+m+6=0$ 有兩個相等實根，且它的根是 ΔABC 的 $\overline{BC}$ 邊長，若 ΔABC 的面積為 6，則它的重心 G 到 $\overline{BC}$ 的距離為__1__。

8. 設兩個邊長皆為 1 的正方形有一頂點 A 重合，重疊部分如下圖斜線所示，其中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AD}$ 的夾角為 30°，則重疊部分的面積為__$\frac{\sqrt{3}}{3}$__。



9. 正整數 2008 的數碼和為 10，則數碼和為 10 的四位數共有__219__個。

10. 某人的年齡是兩位數，如把兩個數碼換位，則等於他父親的年齡。有人發現，如將父子其中一人之的年齡加 1，可得父親的年齡是兒子的年齡之兩倍。但這樣得出的兒子年齡有兩種可能，則兒子兩個可能年齡值之差為___12___。

11. 小王以勻速從向下運行的電扶梯最頂端走到最低端共走了 50 階，小丁以 3 倍於小王的勻速從向下運行的電扶梯最頂端走到最低端共走了 75 階。當電扶梯停止運行時，則此電扶梯從最頂端到最低端共有___100___階。

12. 設 m,n 為二個不同的正整數，若 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{5}$，則 $m+n$ 的值為___18___。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

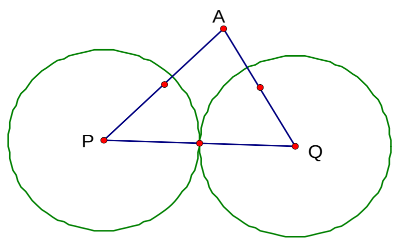
(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 平面上有 2008 個相異點，每兩個相異點連結成一條線段，並把該線段中點塗上紅色：
   (1) 證明平面上紅色點的個數不小於 4013；
   (2) 請設計一種特殊情況，使得塗上紅色點的個數恰好等於 4013 個。

【參考解法】

(1) 在所有點中找出距離最大的兩點 P 和 Q。令 P, Q 兩點的距離為 d，分別以 P, Q 為圓心，$\frac{d}{2}$ 為半徑做兩個圓 O_P 和 O_Q，在剩下的 2006 個點中，對於任意的一點 A 來說，由於 $\frac{1}{2}AP \le \frac{1}{2}PQ$。因此，$AP$ 的中點必在圓 O_P 內(或圓周上)。(給 2 分)

同理，AQ 的中點必在圓 O_Q 內(或圓周上)。 (給 2 分)



可見，在 O_P 和 O_Q 中都至少各有 2006 個紅色的點，(給 3 分)

再加上 PQ 的中點(即兩圓的切點)，所以平面上至少有 2(2006)+1=4013 個紅點。 (給 3 分)

(註：試圖用歸納法證明並給出 n=3, n=4 的結果，(給 1 分)；宣佈當 n 大於 5，點必須全在一條直線上， 且相鄰兩點間的距離都相等時，紅點數才能最少(但 n=3, n=4 並不須如此)。(給 2 分))

(2) 當 2008 個點全都在一條直線上， (給 2 分)

且相鄰兩點間的距離都相等時，即 $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_{2006}A_{2007} = A_{2007}A_{2008}$。(給 2 分)

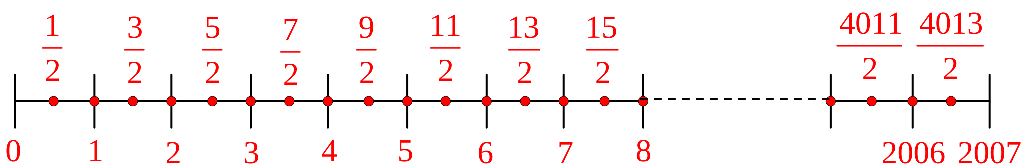
顯然，每對相鄰點所成線段的中點應塗紅色，共得 2007 個紅點。(給 3 分)

此外，除 A_1, A_{2008} 外,其餘 $A_2, A_3, \dots, A_{2007}$ 這 2006 個點都至少是某一個線段 A_iA_j 的中點，這 2006 個點也應塗紅色，因此恰好有 4013 個紅點。(給 3 分)

(另解)

將第 1 個點放在數軸的 0 上，第 n 個點放在數軸的 $n-1$ 上。(給 5 分)

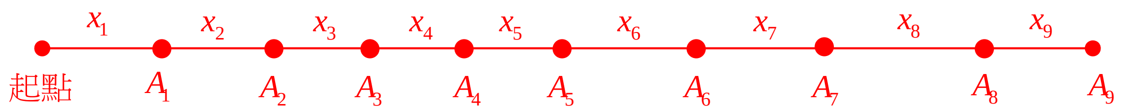
則紅點依序為 $\frac{1}{2}$、$1=\frac{2}{2}$、$\frac{3}{2}$、$2=\frac{4}{2}$、⋯、$2006=\frac{4012}{2}$、$\frac{4013}{2}$。因此共有 4013 個紅點。(給 5 分)



2. 有九輛越野車要深入沙漠探險，每輛車的油箱都最多可加滿一桶汽油，而加一桶汽油可行駛 400 公里，每輛車上最多可再載運 9 桶汽油。未加入汽車油箱內的汽油可隨意整桶加入油箱或整桶轉至別輛汽車，但不可丟在路上。所有的車都加滿油後由沙漠東部的邊緣出發向西方行駛，除加油外都不停止，而中途並無加油站，且每輛車最後都必須回到原出發點(不須同時)。請問該車隊有一輛車最遠可深入沙漠多少公里？(您必須 1. 證明您所給的最遠答案是無法更遠；2. 給出達成最遠的方案。)

【參考解法】

1. 假設下圖為每輛車最遠行駛的地點，各相鄰兩點間每輛汽車所耗之汽油桶數分別為 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8、x_9。



已知 9 輛車全部油量為 10×9＝90 桶。要使車隊中有一輛汽車達到最遠則在 A_1 點有一輛車必須留有不小於 x_1 的油量才能回到原點，其它的 8 輛汽車的油量愈多愈好。(給 2 分)

(i) 若 $x_1 < 1$，則從 A_1 來回起點所需油量 $2x_1 < 2$。到達此點後，其他的油量若全部分給其他 8 輛繼續前進，則 $90 - 2x_1 - 8x_1 > 90 - 10 = 80$，必定要有一輛車上的油量大於 10，不合。(給 2 分)

(ii) 若 $x_1 > 1$，則從 A_1 來回起點所需油量 $2x_1 > 2$。到達此點後，其他的油量若全部分給其他 8 輛繼續前進，則 $90 - 2x_1 - 8x_1 < 90 - 10 = 80$，必定有一輛車上的油量不滿，不符達到最遠的要求。(給 2 分)

因此知 $x_1 = 1$ (給 2 分)，此時預定從 A_1 返回起點的車可將其他 8 桶油分給其他 8 輛車，而其他 8 輛車可看成相當於由 A_1 點出發，每輛車上有 9 桶油。同理可證，$x_2 = 1$、$x_3 = 1$、$x_4 = 1$、$x_5 = 1$、$x_6 = 1$、$x_7 = 1$、$x_8 = 1$、$x_9 = 1$，即 A_9 離起點最遠可達到 9×400＝3600 公里。(給 2 分，只給正確答案共給 2 分)

2. 以下為恰深入沙漠 3600 公里的方法：(答對以下每項給 1 分，全對給 10 分)

令這九輛車分別為 A、B、C、D、E、F、G、H、I。

行駛至 400 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 I 車上的九桶汽油將這九輛車都加滿油，然後 I 車駛回原出發點，其餘八輛車繼續前進；

行駛至 800 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 H 車上的八桶汽油將這八輛車都加滿油，然後 H 車駛回原出發點，其餘七輛車繼續前進；因車上仍有一桶汽油，故 H 車可回到原出發點；

行駛至 1200 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 G 車上的七桶汽油將這七輛車都加滿油，然後 G 車駛回原出發點，其餘六輛車繼續前進；因車上仍有二桶汽油，故 G 車可回到原出發點；

行駛至 1600 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 F 車上的六桶汽油將這六輛車都加滿油，然後 F 車駛回原出發點，其餘五輛車繼續前進；因車上仍有三桶汽油，故 F 車可回到原出發點；

行駛至 2000 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 E 車上的五桶汽油將這五輛車都加滿油，然後 E 車駛回原出發點，其餘四輛車繼續前進；因車上仍有四桶汽油，故 E 車可回到原出發點；

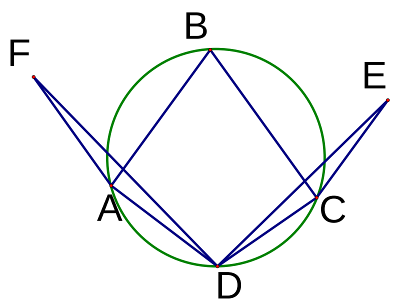
行駛至 2400 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 D 車上的四桶汽油將這四輛車都加滿油，然後 D 車駛回原出發點，其餘三輛車繼續前進；因車上仍有五桶汽油，故 D 車可回到原出發點；

行駛至 2800 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 C 車上的三桶汽油將這三輛車都加滿油，然後 C 車駛回原出發點，其餘二輛車繼續前進；因車上仍有六桶汽油，故 C 車可回到原出發點；

行駛至 3200 公里處後，每輛車的油都恰用盡，此時用 B 車上的二桶汽油將 A、B 這二輛車都加滿油，然後 B 車駛回原出發點，A 車繼續前進；因車上仍有七桶汽油，故 B 車可回到原出發點；

行駛至 3600 公里處後，A 車的油都恰用盡，此時 A 車加滿油後往原出發點回去；因車上仍有八桶汽油，故 A 車可回到原出發點。 ANS：3600 公里

3. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，點 E 與點 D 分別在 BC 的異側，點 F 與點 D 分別在 AB 的異側，如圖所示。若 $CE=CD$，$CE//AB$，且 $AF=AD$，$AF//BC$。試證 $\angle EDF=90°$。



【參考解法】

令四邊形 $ABCD$ 內 $\angle DAB=\alpha$、$\angle ABC=\beta$、$\angle BCD=\gamma$、$\angle CDA=\delta$。

因四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，故可知 $\angle DAB+\angle BCD=\angle CDA+\angle ABC=180^\circ$，即 $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$；(給 4 分)

因 $CE=CD$，故可令 $\angle CED=\angle CDE=a$；因 $AF=AD$，故可令 $\angle AFD=\angle ADF=b$。

因 $CE//AB$、$AF//BC$，故知 $\angle ECB=\angle ABC=\angle BAF$。(給 3 分)

在△ADF 中，可知 $\angle AFD+\angle ADF+\angle FAD=\angle AFD+\angle ADF+\angle FAB+\angle BAD=180^\circ$，即 $2b+\beta+\alpha=180^\circ$；(給 3 分)

在△CDE 中，可知 $\angle CDE+\angle CED+\angle DCE=\angle CDE+\angle CED+\angle BCD+\angle BCE=180^\circ$，即 $2a+\gamma+\beta=180^\circ$；(給 3 分)

因此有 $(2b+\beta+\alpha)+(2a+\gamma+\beta)=360^\circ$，即 $2(a+b+\beta)+(\alpha+\gamma)=360^\circ$，故

$$a+b+\beta=90^\circ$$ (給 3 分)

所以 $\angle EDF=\angle CDA-\angle CDE-\angle ADF$

$=\delta-a-b=(180^\circ-\beta)-a-b=180^\circ-(a+b+\beta)=90^\circ$(給 4 分)

(另解)

過 D 點做 $DG//CE$ 交 BC 於 G、

過 D 點做 $DH//AF$ 交 BC 於 H。

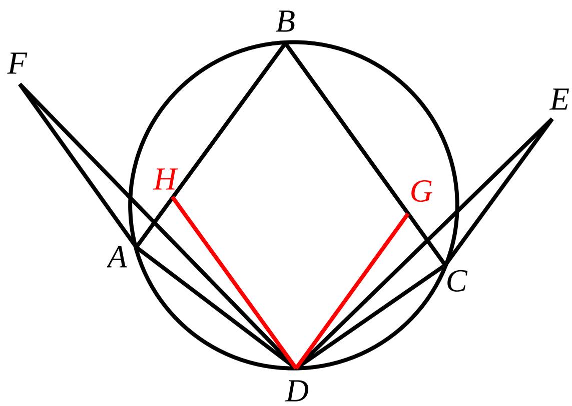
因 $CD=CE$、$AF=AD$，故

$\angle EDC=\angle CED=\angle EDG$、

$\angle ADF=\angle AFD=\angle FDH$。(給 5 分)

因 $DG//CE//AB$、$DH//AF//BC$，可知 $CDHB$ 為平行四邊形，故 $\angle HBC=\angle HDG$。(給 5 分)

因四邊形 ABCD 為圓內接四邊形，故 $\angle HBC+\angle HDG=180^\circ$。(給 4 分)



所以 $\angle ADC+\angle HDG=180^\circ$

且 $\angle ADC+\angle HDG=\angle ADF+\angle FDH+\angle HDG+\angle GDE+\angle EDC+\angle HDG$

$=2\angle FDH+2\angle HDG+2\angle GDE$ (給 3 分) $=2\angle FDE$，即 $\angle FDE=90^\circ=\angle EDF$。(給 3 分)