

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2008 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

編號: _____ 校名: _____ 國中 _____ 姓名: _____

作答時間: 二小時

第一部分: 填充題, 每小題 5 分, 共 60 分

(注意: 請將答案直接填入各題預留空白處, 不須列出計算過程)

1. $\frac{2008}{1000} + \frac{2008}{1001} + \frac{2008}{1002} + \frac{2008}{1003} + \frac{2008}{1004} + \frac{2008}{1005} + \frac{2008}{1006} + \frac{2008}{1007} + \frac{2008}{1008} + \frac{2008}{1009}$ 所得結果的整數部分為 _____。

2. 計算 $\underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ 個}} \times \underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ 個}} + 1 \underbrace{99 \dots 9}_{99 \text{ 個}}$ 之值為 _____。

3. 今有 n 個自然數 (可以相等), 其中任何 7 個數之和都小於 15, 已知 n 個自然數之和為 100, 則 n 的最小值是 _____。

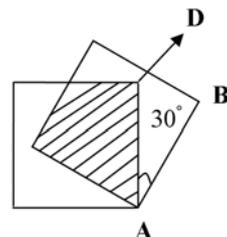
4. 設 m 為 13 的倍數且由 4017 個數碼組成, 前面 2008 個以及後面的 2008 個數碼都是 7, 則正中間的數碼是 _____。

5. 若 $f(x) = (2x^5 + 2x^4 - 53x^3 - 57x + 54)^{2008}$, 則 $f\left(\frac{\sqrt{111}-1}{2}\right)$ 之值為 _____。

6. 設 P 為正方形 $ABCD$ 內的一點, 已知邊長 $AB=2$, 且 P 到正方形 \overline{AB} 的兩端點 A 、 B , 以及到對邊 \overline{CD} 的距離都相等, 若 d 表示這個相同的距離, 則 $d=$ _____。

7. 已知方程式 $x^2 - 8x + m + 6 = 0$ 有兩個相等實根, 且它的根是 $\triangle ABC$ 的 \overline{BC} 邊長, 若 $\triangle ABC$ 的面積為 6, 則它的重心 G 到 \overline{BC} 的距離為 _____。

8. 設兩個邊長皆為 1 的正方形有一頂點 A 重合, 重疊部分如下圖斜線所示, 其中 \overline{AB} 和 \overline{AD} 的夾角為 30° , 則重疊部分的面積為 _____。



9. 正整數 2008 的數碼和為 10, 則數碼和為 10 的四位數共有 _____ 個。

10. 某人的年齡是兩位數，如把兩個數碼換位，則等於他父親的年齡。有人發現，如將父子其中一人之的年齡加 1，可得父親的年齡是兒子的年齡之兩倍。但這樣得出的兒子年齡有兩種可能，則兒子兩個可能年齡值之差為_____。
11. 小王以勻速從向下運行的電扶梯最頂端走到最低端共走了 50 階，小丁以 3 倍於小王的勻速從向下運行的電扶梯最頂端走到最低端共走了 75 階。當電扶梯停止運行時，則此電扶梯從最頂端到最低端共有_____階。
12. 設 m, n 為二個不同的正整數，若 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{5}$ ，則 $m+n$ 的值為_____。

第二部分：計算證明，每題 20 分,共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 平面上有 2008 個相異點，每兩個相異點連結成一條線段，並把該線段中點塗上紅色：
- (1) 證明平面上紅色點的個數不小於 4013；
 - (2) 請設計一種特殊情況，使得塗上紅色點的個數恰好等於 4013 個。
2. 有九輛越野車要深入沙漠探險，每輛車的油箱都最多可加滿一桶汽油，而加一桶汽油可行駛 400 公里，每輛車上最多可再載運 9 桶汽油。未加入汽車油箱內的汽油可隨意整桶加入油箱或整桶轉至別輛汽車，但不可丟在路上。所有的車都加滿油後由沙漠東部的邊緣出發向西方行駛，除加油外都不停止，而中途並無加油站，且每輛車最後都必須回到原出發點(不須同時)。請問該車隊有一輛車最遠可深入沙漠多少公里？(您必須 1. 證明您所給的最遠答案是無法更遠；2. 給出達成最遠的方案。)
3. 已知四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，點 E 與點 D 分別在 BC 的異側，點 F 與點 D 分別在 AB 的異側，如圖所示。若 $CE=CD$ ， $CE\parallel AB$ ，且 $AF=AD$ ， $AF\parallel BC$ 。試證 $\angle EDF=90^\circ$ 。

