

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

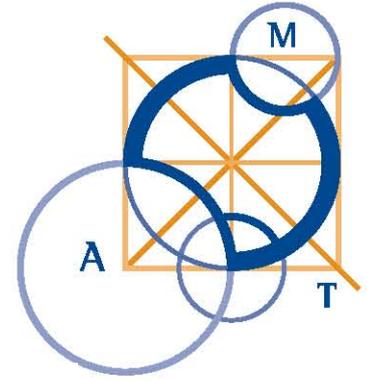
Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw



AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION
FOR THE WESTPAC AWARDS

AN ACTIVITY OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICS TRUST



THURSDAY 31 JULY 2008

SENIOR DIVISION COMPETITION PAPER

高級卷（11—12 年級）

考試時間：75 分鐘

注意事項

一般規定

1. 未獲監考老師許可之前不可翻開此測驗題本。
2. 各種通訊器材一律不得攜入考場，不准使用電子計算器、計算尺、對數表、數學公式等計算器具。作答時可使用直尺與圓規，以及兩面全空白的草稿紙。
3. 題目所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。
4. 最前 25 題為選擇題，每題有五個選項。最後 5 題要求填入的答案為 0 至 999 的正整數。題目一般而言是依照越來越難的順序安排，對於錯誤的答案不會倒扣分數。
5. 本活動是數學競賽而不同於學校測驗，別期望每道題目都會作。考生只與同地區同年級的其他考生評比，因此不同年級的考生作答相同的試卷將不作評比。
6. 請依照監考老師指示，謹慎地在答案卡上填寫您的基本資料。若因填寫錯誤或不詳所造成之後果由學生自行負責。
7. 進入試場後，須等待監考老師宣布開始作答後，才可以打開題本進行答題。

作答須知

1. 限用 B 或 2B 鉛筆填寫答案。
2. 請用 B 或 2B 鉛筆在答案卡上將您認為正確選項的圓圈塗滿（不是在題本上）。
3. 您的答案卡將由電腦閱卷，為避免電腦誤判，請不要在答案卡上其他任何地方塗劃任何記號。填寫答案卡時，若需要修改，可使用軟性橡皮小心擦拭，並確定答案卡上無殘留痕跡。

特別約定

為確保競賽之公平性及認證成績優異學生，AMC 主辦單位保留要求考生重測之權利。

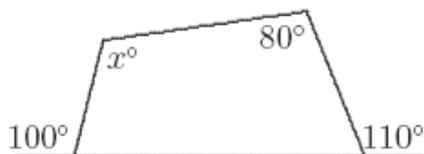
高級卷(11-12 年級)

1-10 題，每題 3 分

1. 算式 $8002 - 2008$ 等於
(A) 200 (B) 8 (C) 6006 (D) 1060 (E) 5994
-

2. 分數 $\frac{1}{20}$ 與 $\frac{2}{10}$ 之差等於
(A) 0 (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{3}{10}$ (E) $\frac{3}{20}$
-

3. 在下圖中， x 之值等於



- (A) 100 (B) 110 (C) 120 (D) 130 (E) 140
-

4. 算式 $\frac{200 \times 8}{200 \div 8}$ 等於
(A) 1 (B) 8 (C) 16 (D) 64 (E) 200
-

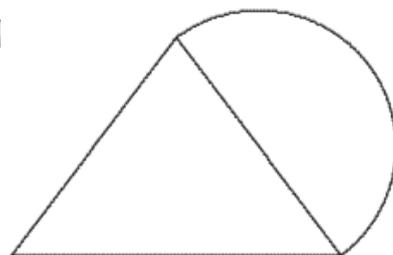
5. 代數式 $x^2 - 4x + 3$ 能夠得到的極小值是
(A) -1 (B) -3 (C) 1 (D) 3 (E) 2
-

6. 將 3 元分給兩個人，其中一人分得的錢比另一人多 0.5 元，請問較大份的錢與較小份的錢之比是什麼？
(A) 6 : 1 (B) 7 : 5 (C) 4 : 3 (D) 5 : 3 (E) 7 : 4
-

7. 將 1000^{2008} 的數值寫下，請問它有多少位數？
(A) 2009 (B) 6024 (C) 6025 (D) 8032 (E) 2012
-

8. 以正三角形的一邊向外作一半圓，如圖所示，則半圓的面積與正三角形的面積之比等於

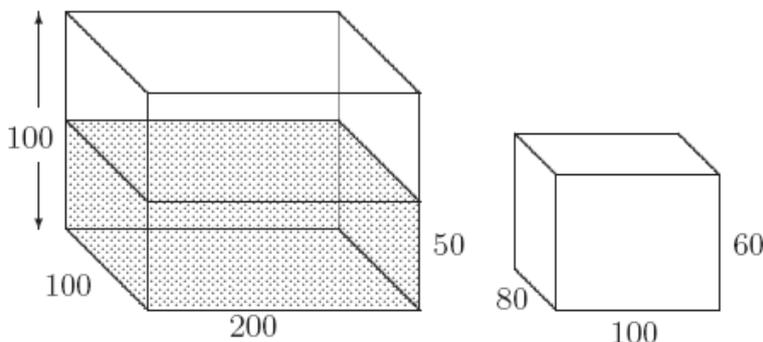
- (A) 1 : 1 (B) $\pi : 2\sqrt{3}$ (C) $\pi : \sqrt{3}$
(D) $\sqrt{3} : \pi$ (E) 3 : π



9. 已知 $\cos x = 0.5$ 且 $0^\circ < x < 90^\circ$ ，下列哪一項的值最大？

- (A) $\cos^2 x$ (B) $\cos x$ (C) 0.75 (D) $\sin x$ (E) $\tan x$

10. 有一個魚缸的底部為 $100 \text{ cm} \times 200 \text{ cm}$ ，它的高度為 100 cm ，現蓄有 50 cm 深的水。將一個 $80 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ 的實心長方體金屬全部沉入魚缸內，使得它的 $80 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ 這一個表面貼緊魚缸的底部。



請問此時水面距離這個金屬長方體的頂部為多少 cm ？

- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

11-20 題，每題 4 分

11. 下列哪一項的值最大？

- (A) 2^{500} (B) 3^{400} (C) 4^{300} (D) 5^{200} (E) 6^{100}

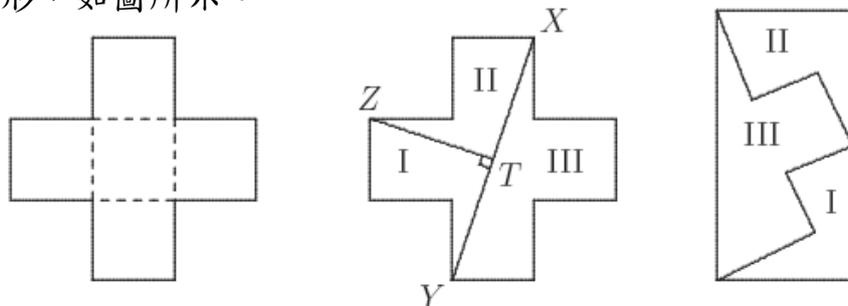
12. 投擲正常的骰子 100 次，則擲出點數的總和將趨近於

- (A) 200 (B) 250 (C) 300 (D) 350 (E) 400

13. 請問乘以 2008 後會成為一個完全平方數的最小正整數是什麼？

- (A) 2 (B) 4 (C) 251 (D) 502 (E) 2008

14. 一個十字形是由五個邊長為 1 單位的正方形所構成。分別沿連接 X 、 Y 兩點的線段及連接 Z 、 T 兩點的線段 ($\angle ZTX$ 是直角) 切開。將所得的三片重拼為一個矩形，如圖所示。



請問這個矩形的長與寬之比為何？

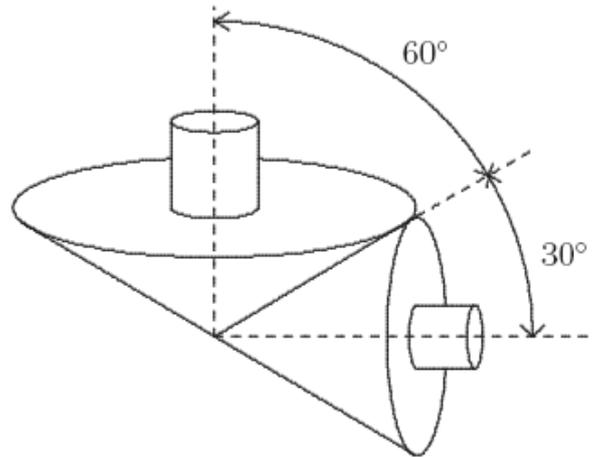
- (A) 3 : 1 (B) $\sqrt{10} : 1$ (C) 2 : 1 (D) $2\sqrt{3} : 1$ (E) 5 : 2

15. 一個函數對於 (p, q, r) 如果滿足 $f(p)=q$ 、 $f(q)=r$ 、 $f(r)=p$ ，則稱此函數為連環套函數。

已知函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 對於 $(1, 2, 3)$ 是個連環套函數，請問 c 之值是什麼？

- (A) -2 (B) 0 (C) 3 (D) 9 (E) 14

16. 有二個圓錐狀的陀螺，它們都具有垂直的中心軸。這兩個陀螺相接觸的直線與小陀螺的中心軸之夾角為 30° ，與大陀螺的中心軸之夾角為 60° 。已知大陀螺每秒轉動1圈，陀螺之間都沒有滑動，請問小陀螺每秒轉動多少圈？



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1
(C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$
(E) 2

17. 已知集合 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，請問 X 的子集中有多少個子集至少有一個元素且不包含二個連續的整數？

- (A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 24

18. 某農莊有兩個蓄水池，從農舍屋頂收集來的雨水蓄入一個容量為100公升的池子內，從穀倉屋頂收集來的雨水則蓄入一個容量為25公升的池子內。農舍屋頂的集雨區域面積為 200 m^2 ，而穀倉屋頂的集雨區域面積為 80 m^2 。目前在農舍的蓄水池內已經有35公升的水，在穀倉的蓄水池內已經有13公升的水。氣象預報即將會下雨，為了使蓄水池能收集盡可能多的雨水，則應該

- (A) 將穀倉蓄水池內的水全部注入農舍蓄水池內；
(B) 從農舍蓄水池內抽水將穀倉蓄水池注滿；
(C) 從農舍蓄水池內抽取10公升的水注入穀倉蓄水池內；
(D) 從穀倉蓄水池內抽取10公升的水注入農舍蓄水池內；
(E) 什麼事都不用作。

19. 有一個實數列 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 的定義如下：

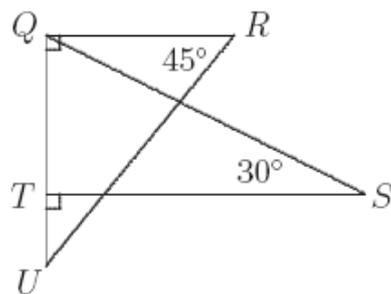
$$u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \pi, \text{ 而對於 } n \geq 3 \text{ 時, } u_n = u_{n-1} - u_{n-2}.$$

請問 u_{2008} 等於什麼？

- (A) $-\sqrt{2}$ (B) $2008(\sqrt{2} - 2008\pi)$ (C) $1003\sqrt{2} - 1004\pi$
(D) π (E) $\sqrt{2}$

20. 右圖中，線段 RU 之長度等於線段 ST 之長度。請問 $\triangle QRU$ 的面積與 $\triangle QST$ 的面積之比為何？

- (A) $\sqrt{3} : 1$ (B) $2 : 1$ (C) $\sqrt{6} : 1$
 (D) $\sqrt{3} : 2$ (E) $\sqrt{6} : 2$



21-25 題，每題 5 分

21. 點 P 、 Q 、 R 、 S 、 T 為一個正多邊形上連續的頂點。將它們的各邊延長，若直線 PQ 和直線 TS 相交於點 U 且 $\angle QUS = 160^\circ$ ，請問這個正多邊形共有多少個邊？

- (A) 36 (B) 42 (C) 48 (D) 52 (E) 54

22. 請問在 $1, 2, 3, 4, \dots, 2008$ 中，有多少個數具有除了 1 以外的立方數之因數？

- (A) 346 (B) 336 (C) 347 (D) 251 (E) 393

23. 數 828 與 313 都是三位數的迴文數，且 $828 - 313 = 515$ 也是一個迴文數。請問有多少個三位數迴文數對 (a, b) ，其中 $a > b$ 且 $a - b$ 也是一個三位數的迴文數？

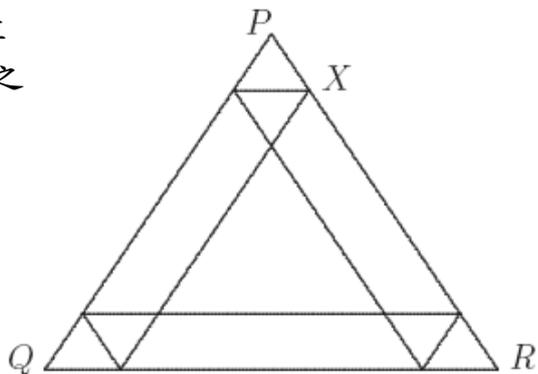
- (A) 1972 (B) 1980 (C) 1988 (D) 1996 (E) 2008

24. 連接一個正立方體各面的中心點，構成一個正八面體，再連接這個正八面體各面的中心點構成一個小正立方體。請問這個小正立方體與原正立方體的邊長之比為何？

- (A) $1 : \sqrt{2}$ (B) $1 : \sqrt{3}$ (C) $1 : 2$ (D) $1 : 3$ (E) $1 : 4$

25. 在右圖中，所有的線段都平行於邊長為 1 單位的正三角形 PQR 的某一條邊。欲使所分割出之十個區域中的最小面積最大，請問 PX 之長度應為多少單位？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{4 - \sqrt{2}}{14}$ (C) $\frac{1}{4}$
 (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{\sqrt{10}}$



問題 26~30 的答案為 0~999 之間的整數，
請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題佔 6 分，第 27 題佔 7 分，第 28 題佔 8 分，
第 29 題佔 9 分，第 30 題佔 10 分。

26. 在一個正立方體中，由所有頂點向各稜邊的中點作線段。請問在這個正立方體的內部有多少個點是兩條或兩條以上這些線段的交點？

27. 若一個數列的首項與末項都是 1，且任意相鄰的兩項之差至多等於 1，則我們稱這個數列的和是一個“好數”。例如： $1+2+3+4+3+2+3+3+3+2+3+3+2+1$ 之和是一個“好數”。將好數 2008 寫成一個數列之和，若不使用一些沒有必要的項，請問此數列至多能有多少項？

28. 正整數 x 、 y 滿足

$$3x^2 - 8y^2 + 3x^2y^2 = 2008$$

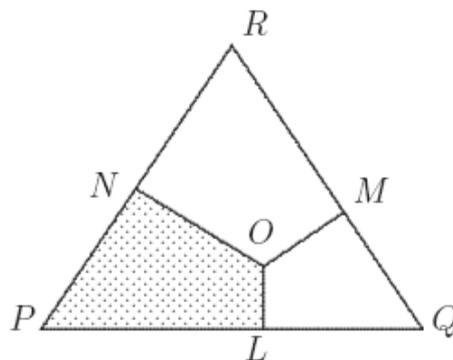
請問 xy 之值是什麼？

29. 點 O 為在正三角形 PQR 內部之一點，線段 OL 、 OM 、 ON 分別垂直於邊 PQ 、 RQ 、 RP 。

已知 $OL : OM : ON = 1 : 2 : 3$ 且

$\frac{\text{四邊形 } LONP \text{ 的面積}}{\text{三角形 } PQR \text{ 的面積}} = \frac{a}{b}$ ，其中 a 、 b 為互質的

正整數。請問 $a+b$ 之值是什麼？



30. 已知 a 、 b 為正實數，請問

$$\sqrt{49+a^2-7\sqrt{2}a} + \sqrt{a^2+b^2-\sqrt{2}ab} + \sqrt{50+b^2-10b}$$

之極小值是什麼
