

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用 IMC 各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製本資料的任何部分，必須獲得 IMC 行政委員會的授權許可。

申請此項授權請電郵 IMC 行政委員會主席孫文先

[ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)

**Notice:**

**Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the IMC Executive Board. Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN [ccmp@seed.net.tw](mailto:ccmp@seed.net.tw)**

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 青少年數學國際城市邀請賽

### 個人賽試題

#### 答題指引：

- 請勿翻開此頁，直到聽到答題指令為止。
- 請在下一頁的對應位置填寫隊名、您的姓名及編號。
- 試題包括填充題 12 題，每題 5 分；計算證明題 3 題，每題 20 分。本卷總分 120 分。
- 填充題只須在空格內填寫阿拉伯數字答案，以其他文字書寫一律不計分，不須計算過程，若題目有不只一個答案，則全部答對才給分。
- 計算證明題必須填寫詳細計算過程或證明，根據答題情況給分。
- 本卷答題時間：120 分鐘。
- 不得使用任何電子計算器具。
- 不得使用紅筆作答。
- 答題結束後，將回收本卷所有試題和草稿紙。

Traditional Chinese Version

繁體中文版

# 2009 Durban Invitational World Youth Mathematics Intercity Competition



## 個人賽試題

答題時間：120 分鐘

2009/07/08 南非 德班

隊名：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_ 編號：\_\_\_\_\_ 得分：\_\_\_\_\_

第一部份：填充題，請將答案填寫在空格內，共十二題，每題 5 分。

1. 已知  $a, b, c$  為三個遞增的連續奇數，試求  $a^2 - 2b^2 + c^2$  的值。

答：\_\_\_\_\_

2. 將一個正整數  $n$  放入一個機器內將會產生出一個正整數  $\frac{n(n+1)}{2}$ 。若我們將 5 放入機器內，將所產生出的數再放入機器內，請問機器最後產生出的數是什麼？

答：\_\_\_\_\_

3.  $A, B, C$  三人採西瓜。

$A$  與  $B$  所採西瓜的個數之和比  $C$  少 6 個；

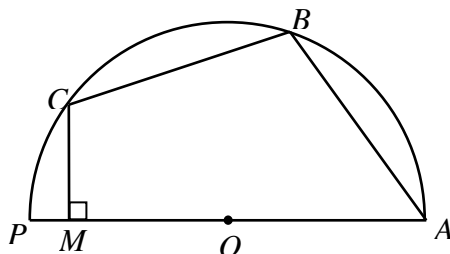
$B$  與  $C$  所採西瓜的個數之和比  $A$  多 16 個；

$C$  與  $A$  所採西瓜的個數之和比  $B$  多 8 個。

請問他們每人所採西瓜的個數之乘積是多少？

答：\_\_\_\_\_

4. 如圖所示，一個半圓的圓心為  $O$ 。一束光由點  $M$  沿垂直  $PA$  的方向射向半圓，光線在圓周上的點  $C$  處反射，反射角  $\angle OCB$  等於入射角  $\angle MCO$ ；接著這束光再交圓周於點  $B$ ，依同樣方式反射，最後光射入點  $A$ 。請問  $\angle COM$  為多少度？



答：\_\_\_\_\_

5. 年齡分別為 1~19 歲的十九個小孩圍成一個圓圈，將所有相鄰兩個小孩的年齡的差值記錄下來。請問這十九個差的總和的最大值是多少？

答：\_\_\_\_\_

6. 化簡求值  $\frac{(2^4 + 2^2 + 1)(4^4 + 4^2 + 1)(6^4 + 6^2 + 1)(8^4 + 8^2 + 1)(10^4 + 10^2 + 1)}{(3^4 + 3^2 + 1)(5^4 + 5^2 + 1)(7^4 + 7^2 + 1)(9^4 + 9^2 + 1)(11^4 + 11^2 + 1)}$ 。

答：\_\_\_\_\_

7. 已知  $A、B、C、D$  是平面上不共圓的四點。 $\triangle ABD、\triangle ADC、\triangle BCD、\triangle ABC$  的外心分別為點  $E、F、G、H$ ，線段  $EG$  與  $FH$  交於點  $I$ 。若  $AI=4$ ， $BI=3$ ，則  $CI$  的長度是多少？

答：\_\_\_\_\_

8. 某次考試，及格分數為 65 分，全班的總平均為 66 分，而所有成績及格的學生的平均為 71 分，所有成績不及格的學生的平均為 56 分。為了減少不及格的學生人數，老師給每位學生的成績加上 5 分。加分之後，所有成績及格的學生的平均變為 75 分，所有成績不及格的學生的平均變為 59 分。已知該班學生人數介於 15 至 30 人之間，請問該班有多少位學生？

答：\_\_\_\_\_

9. 有多少個不同的直角三角形，以  $2009^{12}$  為一條直角邊，且三條邊都是整數？(全等三角形視為同一個三角形。)

答：\_\_\_\_\_

10. 請找出滿足以下條件之最小的六位數：它的數碼和可被 26 整除，且將這個六位數加 1，所得的數的數碼和也可被 26 整除。

答：\_\_\_\_\_

11. 在一圓周上有 1 個紅點和 2009 個藍點。小丹 計算所有頂點都是藍點的凸多邊形的個數，小克 計算有一個頂點是紅點的凸多邊形的個數。請問他們兩人所得的數之差是多少？

答：\_\_\_\_\_

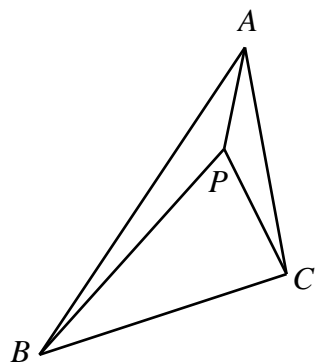
12. 小馬 在體育場賣飲料，礦泉水每瓶 4 元，汽水每瓶 7 元。開始時他共有 350 瓶飲料，雖然沒有全部賣完，但是他的銷售收入恰好是 2009 元。請問小馬 至少賣出了多少瓶汽水？

答：\_\_\_\_\_

第二部份：計算及證明題，必須寫出計算或證明過程。共三題，每題 20 分。

1. 在某次國際象棋比賽中共有 10 位選手參賽，每位選手必須與其他選手恰好對弈一局。經過數局比賽後，發現任意三位選手之間都至少有兩位選手尚未對弈。請問截至此時為止，此棋賽最多已賽過多少局？

2. 點  $P$  為三角形  $ABC$  內部一點，使得  $\angle PBC=30^\circ$ ， $\angle PBA=8^\circ$ ，且  $\angle PAB=\angle PAC=22^\circ$ 。請問  $\angle APC$  為多少度？



3. 請求出最小的正整數滿足以下條件：該數可以被表示為四個正整數的平方和，且可以整除某個形如  $2^n+15$  的整數，其中  $n$  為正整數。