

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2009 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選複賽

個人數學競賽試題

作答時間：二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

1. 計算 $\left(\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000} + \dots + \frac{999}{1000}\right) + \left(\frac{1}{1001} + \frac{2}{1001} + \dots + \frac{1000}{1001}\right) + \left(\frac{1}{1002} + \frac{2}{1002} + \dots + \frac{1001}{1002}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2009} + \frac{2}{2009} + \dots + \frac{2008}{2009}\right) = \underline{\hspace{2cm}}。$

$$\left(\frac{1}{1000} + \frac{2}{1000} + \dots + \frac{999}{1000}\right) + \left(\frac{1}{1001} + \frac{2}{1001} + \dots + \frac{1000}{1001}\right) + \left(\frac{1}{1002} + \frac{2}{1002} + \dots + \frac{1001}{1002}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2009} + \frac{2}{2009} + \dots + \frac{2008}{2009}\right) = \frac{1}{2}(999 + 1000 + 1001 + \dots + 2008) = 759267\frac{1}{2}$$

ANS : $759267\frac{1}{2}$

2. $(3^{2008} + 4^{2009} + 7^{2010})$ 被 5 除之餘數為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$3^{2008} + 4^{2009} + 7^{2010} \equiv (-2)^{2008} + (-1)^{2009} + 2^{2010} \equiv 2^{4 \times 502} - 1 + 2^{4 \times 502 + 2} \equiv 1 - 1 + 2^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

ANS : 4

3. 設 n 為正整數，若 $a^{2n} = 5$ ，則 $2a^{6n} - 4$ 的值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$2a^{6n} - 4 = 2(a^{2n})^3 - 4 = 250 - 4 = 246$$

ANS : 246

4. 設 a 、 b 、 c 為正實數，且 $a + b + c = 7$ 及 $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} = \frac{10}{7}$ 。則

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 之值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{7-(b+c)}{b+c} + \frac{7-(c+a)}{c+a} + \frac{7-(a+b)}{a+b} = \frac{7}{b+c} + \frac{7}{c+a} + \frac{7}{a+b} - 3 = 10 - 3 = 7$$

ANS : 7

5. 從 1 開始依次將自然數寫在一條很長的紙帶上，123456789101112131415...，然後依每三個數碼的長度將紙帶剪成小紙片，例如 123, 456, 789, 101, 213, 141, ...。第一張小紙片出現的數碼是 123，則下一張紙片上的數碼為 123 的是第 $\underline{\hspace{2cm}}$ 張。

可觀察出下一張紙片上的數碼為 123 不是由二位數組成。因 1 到 122 共有 $9 + 90 \times 2 + 23 \times 3 = 3 \times 86$ 個數碼且這是 3 的倍數，故下一張紙片上的數碼為 123 恰是由數 123 組成，為第 87 張。

ANS : 87

6. 給定 $f(5) = 10$ 且對所有 n ， $f(n+3) = \frac{f(n)-1}{f(n)+1}$ 。則 $f(2009)$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

可觀察出： $f(8) = \frac{f(5)-1}{f(5)+1} = \frac{10-1}{10+1} = \frac{9}{11}$ 、 $f(11) = \frac{f(8)-1}{f(8)+1} = \frac{\frac{9}{11}-1}{\frac{9}{11}+1} = -\frac{1}{10}$ 、

$$f(14) = \frac{f(11)-1}{f(11)+1} = \frac{-\frac{1}{10}-1}{-\frac{1}{10}+1} = -\frac{11}{9}、f(17) = \frac{f(14)-1}{f(14)+1} = \frac{-\frac{11}{9}-1}{-\frac{11}{9}+1} = 10、$$

即從 $f(5)$ 開始， $f(n+3)$ 是一個循環數列且知 $f(5) = f(5+12k)$ 。

因 $2009=12 \times 167+5$ ，故 $f(2009) = f(5) = 10$ 。

ANS : 10

7. 半徑都不相等的三圓兩兩互相相切，如圖所示。若兩小圓的內公切線在大圓內部的部分 $AB=12\text{cm}$ ，則圖中陰影部分的面積為 _____ cm^2 。

因三圓兩兩互相相切，故三圓圓心必共線。令 C 為圓 O_1 與 O_2 的切點， R 、 R_1 、 R_2 分別為圓 O 、 O_1 、 O_2 的半徑。可知

$$OC \perp AB、AC = \frac{1}{2} AB = 6、R = R_1 + R_2 \text{ 且}$$

$$OC = R - 2R_1 = R_2 - R_1。$$

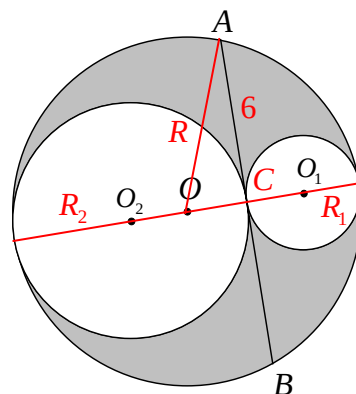
因此所求之陰影部分的面積為

$$\pi(R^2 - R_1^2 - R_2^2) = \pi[R^2 - (R_1^2 + R_2^2)] = 2R_1R_2\pi。$$

再由畢氏定理知 $AO^2 = OC^2 + AC^2$ ，即

$$(R_1 + R_2)^2 = (R_2 - R_1)^2 + 6^2，故有 4R_1R_2 = 36，即 2R_1R_2 = 18。$$

因此所求之陰影部分的面積為 $18\pi \text{ cm}^2$ 。



ANS : $18\pi \text{ cm}^2$

8. 正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分別為 AB 、 BC 的中點， AF 與 DE 相交於點 O ，如下圖所示，則 $\frac{AO}{DO} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

令正方形邊長為 2，則知 $AE=EB=BF=FC=1$ 且 $DE=AF$ 。延長 DE 、 CB ，令其交點為 H 、延長 AF 、 CD ，令其交點為 G 。

可知 $\triangle ADE \sim \triangle BEH$ 、 $\triangle ABF \sim \triangle GCF$ ，故 $BH=CG=2$ 、 $EH=FG$ 且 $DH=AG$

(i) 可知 $\triangle ADO \sim \triangle FHO$ ，故 $\frac{DO}{OH} = \frac{AD}{FH} = \frac{2}{3}$ ，

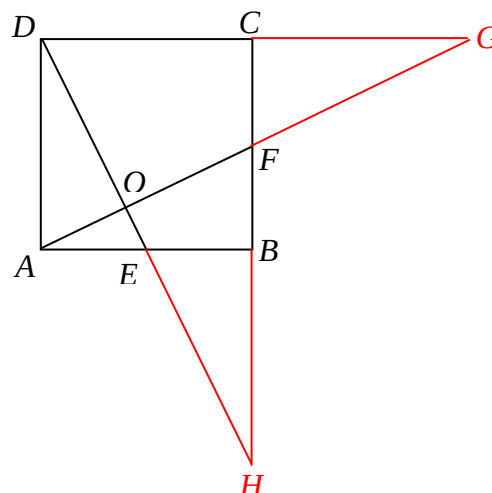
$$\text{即 } DO = \frac{2}{5} DH；$$

(ii) 可知 $\triangle AEO \sim \triangle GDO$ ，故 $\frac{AO}{OG} = \frac{AE}{DG} = \frac{1}{4}$ ，

$$\text{即 } AO = \frac{1}{5} AG = \frac{1}{5} DH。$$

$$\text{因此 } \frac{AO}{DO} = \frac{1}{2}。$$

ANS : $\frac{1}{2}$



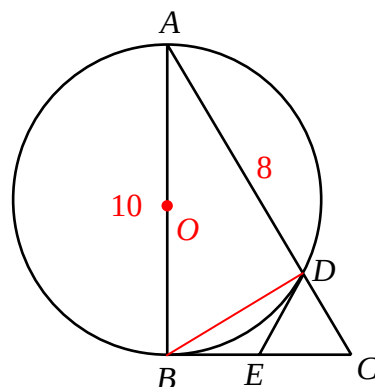
9. 三角形 ABC 為一直角三角形， $\angle ABC = 90^\circ$ ， AB 長為 10，以 AB 為直徑畫一圓交斜邊 AC 於 D 點，線段 AD 長為 8。過 D 點作圓的切線交 BC 邊於 E 點，如下圖所示，則線段 EC 的長= _____。

令 O 為圓心，連接 BD 。因直徑 $AB=10$ 且 $AD=8$ ， $\angle ADB = 90^\circ$ ，可知 $BD=6$ 。又 $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ ，可得知 $BC = \frac{15}{2}$ 。

因 DE 、 BE 均為圓 O 之切線，故 $\angle EDB = \angle CAB = \angle EBD$ ；故 $BE=DE$ 。再由 $\angle EDB + \angle CDE = 90^\circ = \angle DBE + \angle DCE$ ，知 $\angle CDE = \angle DCE$ ，故由此可得 $CE=DE$ 。

$$\text{故 } EC = BE = \frac{15}{4}$$

$$\text{ANS : } \frac{15}{4}$$



10. 若 a, b, c, d 為四個相異的有理數，且滿足 $(a-c)(a-d) = 2$ 與 $(b-c)(b-d) = 2$ ，則 $(a-c)(b-c) =$ _____。

$$\begin{cases} (a-c)(a-d) = 2 \Rightarrow a^2 - ac - ad + cd = 2 \\ (b-c)(b-d) = 2 \Rightarrow b^2 - bc - bd + cd = 2 \end{cases} \Rightarrow a^2 - ac - ad = b^2 - bc - bd$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = ac + ad - bc - bd \Rightarrow a + b = c + d \Rightarrow a - d = c - b$$

$$\text{所以 } (a-c)(b-c) = -(a-c)(a-d) = -2$$

$$\text{ANS : } -2$$

11. 在一個大正方形內部有五個塗陰影的小正方形，如下圖所示，其部份線段長度已經標記在圖上，則五個塗陰影正方形的面積之總和 = _____。

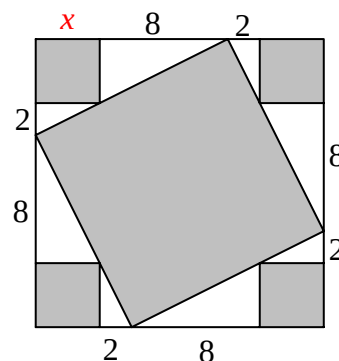
令四個角落上的正方形邊長為 x ，由相似三角形對應邊成比例可知 $\frac{8}{8+x} = \frac{x}{2+x}$ ，故 $x=4$ ，因此四個角落上的四個小正方形之面積和為 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 。

$$\text{例可知 } \frac{8}{8+x} = \frac{x}{2+x}, \text{ 故 } x=4, \text{ 因此四個角落上的四個小正方形之面積和為 } 4 \times 4 \times 4 = 64。$$

因 $x=4$ ，故可知中央的正方形面積為 $(8+4)^2 + (2+4)^2 = 180$ 。

因此五個塗陰影正方形的面積之總和為 $64+180=244$ 。

$$\text{ANS : } 244$$



12. 滿足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009}$ 的正整數數對 (x, y) 共有 _____ 組。

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2009} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2009} \Rightarrow xy - 2009x - 2009y = 0$$

$$\Rightarrow (x-2009)(y-2009) = 2009^2 = 7^4 \times 41^2, \text{ 因此 } (x, y) \text{ 共有 } (4+1) \times (2+1) = 15 \text{ 組解。}$$

$$\text{ANS : } 15$$

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 設 $P = 13x + 52y$ 為完全立方數，且 P 為不超過 2400 的正整數，請問符合以上條件的正整數解 (x, y) 共有幾組？

因 $13x + 52y = 13(x+4y)$ ，故 $P = 13^3 \times m^3$ ，其中 m 為正整數。(給 5 分) 因 $0 < P \leq 2400$ ，

故 $m^3 \leq \frac{2400}{13^3} = 1\frac{203}{2197}$ ，即 $m=1$ 、 $P=2197$ (給 5 分)，因此可知 $x+4y=169$ 。(給 5 分) 所以

(x, y) 共有以下的 42 組解：(給 5 分)

x	165	161	157	153	...	5	1
y	1	2	3	4	...	41	42

$$\text{ANS : } 42 \text{ 組}$$

2. 已知 n 為整數，若代數式 $9n^2 + 23n - 2$ 的值恰可以分解為兩個連續正偶數的乘積，試求所有可能的 n 值。

令該式可分解為 $2k(2k+2)$ ，其中 k 為正整數，則有 $9n^2 + 23n - 2 = 2k(2k+2)$ ，即 $9n^2 + 23n - (4k^2 + 4k + 2) = 0$ 有整數解(給 5 分)，因此判別式必須為完全平方數 P^2 ：

$$P^2 = 23^2 + 36(4k^2 + 4k + 2) \Rightarrow P^2 - [6(2k+1)]^2 = 23^2 + 36 = 565 = 5 \times 113$$

$$\Rightarrow [P + 6(2k+1)][P - 6(2k+1)] = 565 \times 1 = 113 \times 5 \text{ (給 5 分)}$$

可知：

$$\begin{cases} P + 6(2k+1) = 565 \\ P - 6(2k+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + 12k = 559 \\ P - 12k = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 283 \\ k = 23 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{-23 \pm 283}{2 \times 9} = -17 \text{ 或 } \frac{130}{9} \text{ (不合)}$$

(給 5 分)

$$\text{或} \begin{cases} P + 6(2k+1) = 113 \\ P - 6(2k+1) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P + 12k = 107 \\ P - 12k = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = 59 \\ k = 4 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{-23 \pm 59}{2 \times 9} = 2 \text{ 或 } -\frac{41}{9} \text{ (不合)}$$

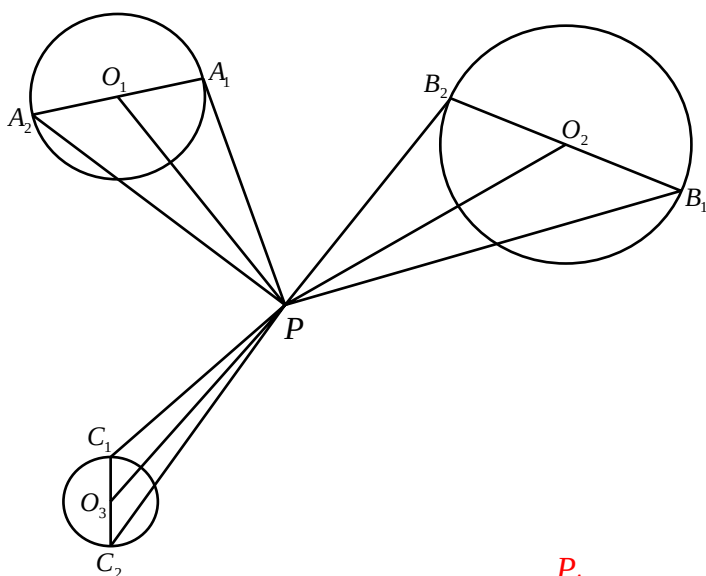
(給 5 分)

因此可能的 n 值為 -17 或 2 。(只給答案沒有過程每組給 3 分)

ANS: -17 或 2

3. 已知 O_1 、 O_2 、 O_3 為三個半徑不同且互不相交的圓， A_1A_2 、 B_1B_2 、 C_1C_2 分別為其直徑，點 P 為平面上任意一點，如圖所示。

若 $PA_1 + PB_1 + PC_1 < PO_1 + PO_2 + PO_3$ ，試證明 $PA_2 + PB_2 + PC_2 > PO_1 + PO_2 + PO_3$ 。



先觀察圓 O_1 的情形。延長 PO_1 至 P_A 使得 $PO_1 = P_AO_1$ ，則可知四邊形 $PA_1P_AA_2$ 為平行四邊形且 $PA_1 = P_AA_2$ 。因

$PA_2 + P_AA_2 > PP_A = 2PO_1$ ，可得 $PA_1 + PA_2 > 2PO_1$ 。(給 10

分)同理， $PB_1 + PB_2 > 2PO_2$ 、 $PC_1 + PC_2 > 2PO_3$ ，故得

$PA_1 + PA_2 + PB_1 + PB_2 + PC_1 + PC_2 > 2PO_1 + 2PO_2 + 2PO_3$ 。

(給 5 分)

因為已知 $PA_1 + PB_1 + PC_1 < PO_1 + PO_2 + PO_3$ ，所以

$PA_2 + PB_2 + PC_2 > PO_1 + PO_2 + PO_3$ 。(給 5 分)

