高級卷(11-12 年級)

1. 2（5.61－4.5）＝2（1.11）＝2.22。

答案：(D)

2. $2^n+2^n=2^m$，

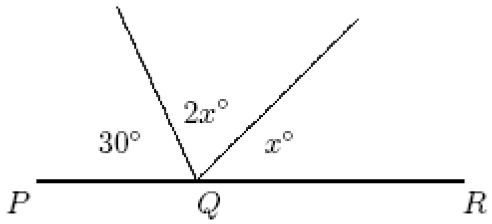
$2(2^n)=2^m$，

$2^{n+1}=2^m$，

$n+1=m$。

答案：(B)

3. 因 PQR 為一直線，故 30+2x+x＝180，3x＝150，故 x＝50。



答案：(C)

4. 可知 $\frac{7}{15}$、$\frac{3}{7}$ 以及 $\frac{4}{9}$ 都比 $\frac{1}{2}$ 小，而 $\frac{6}{11}>\frac{1}{2}$，故最大的分數為 $\frac{6}{11}$。

答案：(C)

5. 通話時間為 6.23÷0.89＝7 分鐘，故在 11：04 am 結束通話。

答案：(C)

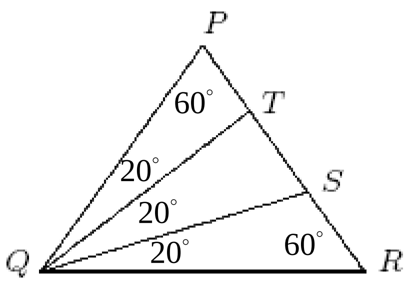
6. 因點（2，k）在方程 2x＋y＝q 及 y＝x－p 的兩條直線上，故有

4＋k＝q 以及 k＝2－p，

因此 4＋(2－p)＝q，可得 p＋q＝6。

答案：(E)

7. 因 $\overline{QS}$ 和 $\overline{QT}$ 將∠PQR 分為三等分，我們可得知如下圖所示的角度：



因∠QTS 為△QPT 的外角，故∠QTS＝60°+20°＝80°。

答案：(C)

8. （A）27＝13+14。14＝2×7 有 4 個因數。

（B）39＝19+20。20＝2^2×5 有 6 個因數。

（C）75＝37+38。38＝2×19 有 4 個因數。

（D）87＝43+44。44＝2^2×11 有 6 個因數。

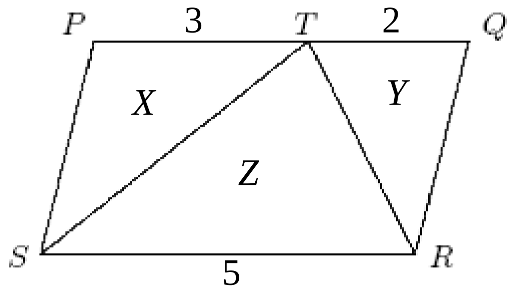
（E）107＝53+54。54＝2×3^3 有 8 個因數。

安迪的年齡有 8 個因數，故他們倆人可能的年齡之和為 107。

答案：(E)

9. 【方法一】

如下圖所示，令△PTS、△TQR、△RST 的面積分別為 X、Y 及 Z。



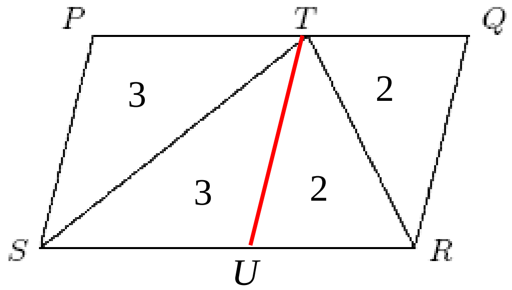
因為這三個三角形的高 h 都相同，所以 $X=\dfrac{3h}{2}$、$Y=\dfrac{2h}{2}$ 以及 $Z=\dfrac{5h}{2}$，故

$$\frac{X+Z}{X+Y+Z}=\frac{\frac{3h}{2}+\frac{5h}{2}}{\frac{3h}{2}+\frac{2h}{2}+\frac{5h}{2}}=\frac{4}{5}$$

答案：(D)

【方法二】

如下圖所示，過 T 點做一直線平行於 PS 交 SR 於 U



因為這四個三角形△PTS、△SUT、△TQR、△RUT 的高都相同，所以這四個三角形的面積比為△PTS：△SUT：△TQR：△RUT＝3：3：2：2，故所求為 $\dfrac{3+3+2}{3+3+2+2}=\dfrac{4}{5}$。

答案：(D)

10. 由題意可知這五個正整數中的三個數為 5、8、8。令另外兩個數分別為 x 與 y。因平均值為 5，故 $\frac{1}{5}(x+y+21)=5$，$x+y+21=25$，$x+y=4$。因眾數只有一個 8，故 $x\neq y$，即 x 與 y 中一個數為 1，另一個數為 3。所以最大的數與最小的數之差為 8－1＝7。

答案：(D)

11. 可知平均每公升應加入 32÷8＝4 顆藥劑，但爸爸只在平均每公升中加入 16÷8＝2 顆藥劑，因此在爸爸用掉 2 公升之後，剩下的 6 公升中僅含有 6×2＝12 顆藥劑。在爸爸再加入 2 公升的水後，變為 8 公升的水內含有 12 顆藥劑，

因此爸爸需再加入 32－12＝20 顆藥劑。

答案：(A)

12. 完成圖如下：

	2		
			1
	1	3	
4			

→

	2		
			1
2	1	3	4
4			

→

	2		3
			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
3			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

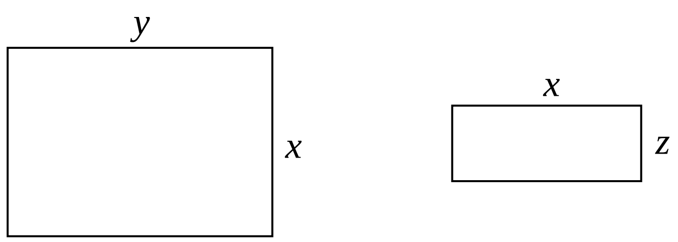
因此在角落的四個數之和為 1+4+2+3＝10。

答案：(E)

13. 小何寫的數為 11、13、17、19、31、33、37、39、71、73、77、79、91、93、97 和 99 共 16 個數，其中質數為 11、13、17、19、31、37、71、73、79 與 97 共 10 個。因此選中質數的機率為 $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$

答案：(A)

14. 令這兩座矩形花壇的邊長分別為 x、y 與 x、z，其中 $y>x>z$。



已知這兩座矩形花壇的面積合計為 40 m^2。若 x 大於或等於 6，則大花壇的面積必大於 40 m^2；若 x 等於 1，則小花壇不存在。因此可知 $5\geqq x\geqq 2$。又因大花壇的周長是小花壇周長的二倍，，故有

$$x+y=2(x+z)$$

$$z=\frac{y-x}{2}$$

因這兩座矩形花壇的面積合計為 40 m^2，故有

$$yx+xz=40$$

$$xy+\frac{x(y-x)}{2}=40$$

$$3xy - x^2 = 80$$
$$x(3y - x) = 80$$

因此 x 必為 80 的因數，故只須考慮 x=2、4 或 5。

若 x=2，則 y=14，$z=\dfrac{14-2}{2}=6>x$，矛盾。

若 x=4，則 y=8，z=2；此時這兩座花壇為相似的圖形，矛盾。

因此 x=5，故 y=7，z=1。

答案：(A)

15. 令 $10x+y$ 為一個二位數，則把這個數的數字對調得到的二位數為 $10y+x$，因此這兩個數的和為 $10x+y+10y+x=11(x+y)$，其中 $1 \leqq x+y \leqq 18$。故只有在 $x+y=11$ 時，其和才會是完全平方數，也因此可能的二位數為 29、38、47、56、65、74、83 及 92 共 8 個數。

答案：(D)

16. 把這 6 個座位從 1 號編到 6 號。

1	2	3	4	5	6	
A		B		C		6 種
A		B			C	6 種
A			B		C	6 種
	A		B		C	6 種

可以發現從這 6 個座位中要選出 3 個不相鄰的座位共有 4 種不同的方法，而每一種方法都會有 6 種不同的方式來安排 A、B 和 C 入座，因此共有 4×6＝24 種不同的入座方式。

答案：(B)

【註】這個問題相當於「要從{1，2，3，…，n}中找出 k 個兩兩都不連續的整數，共有幾種選法」，此答案為 $\dbinom{n-k+1}{k}$。當 k=3 以及 n=6 時，可得知共有 $\dbinom{4}{3}=4$ 種從 6 個座位中要選出 3 個兩兩都不相鄰座位的選法。

17. 考慮 $a^b=1$ 這種類型的方程式。此時有三種情況：

情況一：$b＝0$ 及 $a≠0$

當 $x+1=0$，

$x=-1$。

此時 $x^2-3x+1=5\neq 0$，故 $x=-1$ 為一個解。

情況二：$a＝1$

當 $x^2-3x+1=1$，

$x^2-3x=0$，

$x(x-3)=0$，

x=0 或 3。

故得到 $x=0$ 與 $x=3$ 兩個解。

情況三：$a=-1$ 及 b 為偶數

當 $x^2-3x+1=-1$，

$x^2-3x+2=0$，

$(x-1)(x-2)=0$，

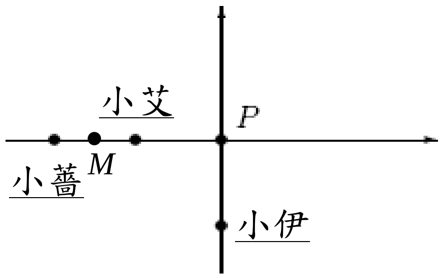
$x=1$ 或 2。

此時因 $x+1$ 必須為偶數，故 $x=1$ 是一個解但 $x=2$ 則不是解。

故共有 4 個解：$x=-1$、0、1 及 3

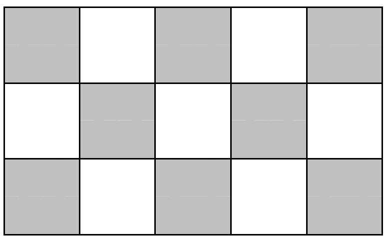
答案：(D)

18. 因為小艾和小薔都以 8 km/h 的速度沿著同一直線的路徑慢跑，可取出兩人之間的中點 M。當小艾與 P 點的距離為 50 m 時，因小薔在小艾後面 12 m 處，所以 M 點離 P 點 56 m 且 M 點的移動速度也是 8 km/h。當小伊抵達 P 點時，她與小艾、小薔兩人的距離都相等，即此時 M 點與 P 點重合，因此可知開始時小伊與 P 點的距離為 $\frac{6}{8}\times 56=42\,\text{m}$。



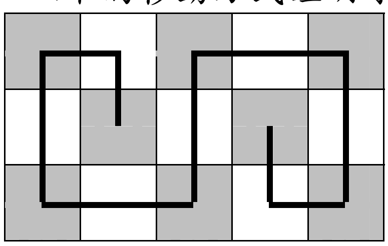
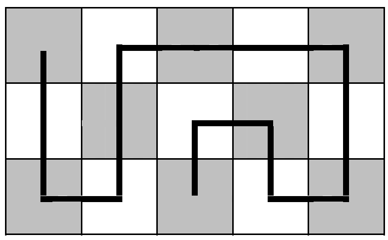
答案：(B)

19. 如下圖，將 3x5 的棋盤塗上黑色及白色：



如此共有 8 個黑色格子與 7 個白色格子。因為是黑白相間塗色，所以每次移動後所在格子的顏色都會轉換。因此要完成題目所要求的條件，就必須從黑色格子出發，即這 7 個白色格子都不可作為出發點。

剩下的 8 個黑色格子中，可分為三類：位於角落、位於邊上但不在角落以及位於內部。以下的移動方式證明了這三類黑色格子都可作為出發點

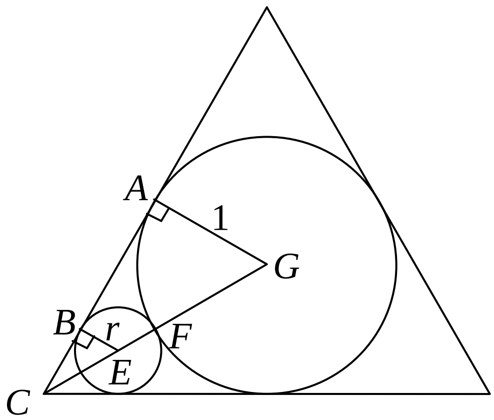



故有 8 個格子可作為出發點。

答案：(D)

20. 【方法一】

令小圓的半徑為 r。因△AGC 與△BEC 的三個內角都是 90°、60° 與 30°，故這兩個三角形的三個邊長比都是 $2：\sqrt{3}：1$。

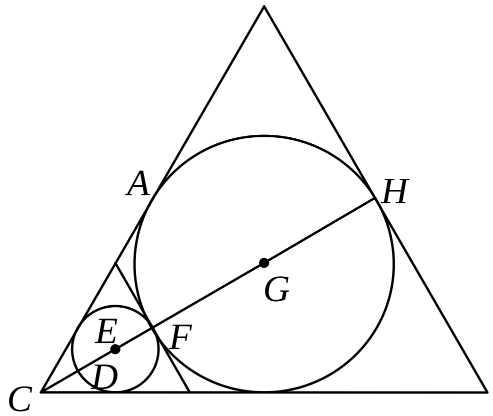


因此可知 $GC=2$ 以及 $CE=2r$。因 $GC=GF+FE+CE$，故可得 $2=1+r+2r$，即 $r=\dfrac{1}{3}$。

答案：(A)

【方法二】

如圖，過 F 點作兩圓的公切線，取 D 點為小圓與 CG 線段異於 F 點的交點。因大正三角形內切圓的圓心 G 就是這個大正三角形的重心，所以 $CF=FG=GH=1$。



可知小三角形也是正三角形且小圓就是小三角形的內切圓，故小圓的圓心 E 就是小正三角形的重心故 $CD=DE=EF=\dfrac{1}{3}CF=\dfrac{1}{3}$

答案：(A)

21. 【方法一】

這四部電梯合計共可停 12 個樓層。假設該大樓有 6 層樓，則可知存在某一個樓層最多只會有 2 部電梯停留。因為每部電梯都是連接一個樓層至其他兩個樓層，所以該樓層只能夠連結其餘五個樓層中的四個，故該大樓不可能有 6 層樓。若該大樓有 7 層樓或 7 層樓以上，便可知必存在某一個樓層最多只會有 1 部電梯停留，因此這狀況也必不會成立。所以該大樓最多只會有 5 層樓。而大樓可以有 5 層樓，只要將這四部電梯依以下方式停留即可：

第一部電梯停留 1、4 和 5 樓，第二部電梯停留 2、4 和 5 樓，第三部電梯停留 3、4 和 5 樓，第四部電梯停留 1、2 和 3 樓。

因此該大樓最多可有 5 層樓。 答案：(B)

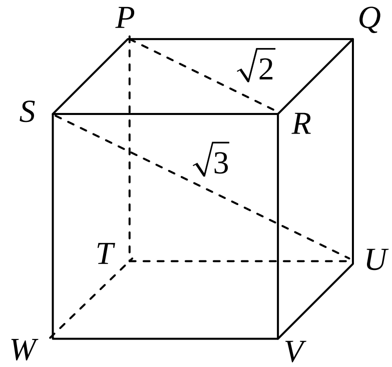
【方法二】

若一棟大樓有 n 層樓，則可知任意挑選兩層樓連接的方式共有 T_{n-1} 個，其中 T_{n-1} 為第 n 個三角數。

因這四部電梯合計共可停 12 個樓層，所以 $T_{n-1}<12$。已知 $T_4=10$ 以及 $T_5=15$，故 n 的最大值為 5。

答案：(B)

22. 如圖，令這正立方體為 $PQRSTUVW$



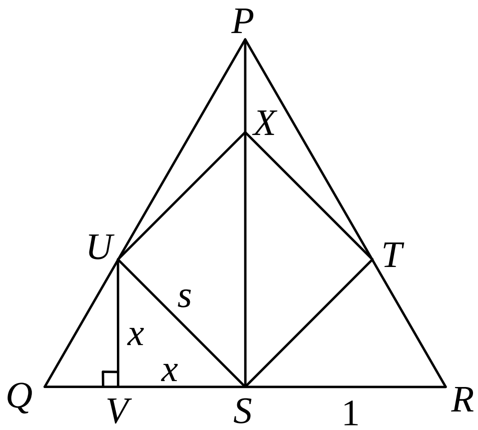
因為這隻蜜蜂打算用行走或飛行去經過每個頂點一次，所以蜜蜂的路徑必由 7 條直線所構成。可知正立方體的邊長為 1，每一面的對角線長度為 $\sqrt{2}$ 以及正立方體的斜對角線長度為 $\sqrt{3}$。

但蜜蜂的路徑中不能有多於 1 條的正立方體斜對角線，否則正立方體的中心點便會通過兩次，故蜜蜂的最長路徑為 $\sqrt{3}+6\sqrt{2}$，如以 $PRUWQTSV$ 的路徑行走即可。

答案：(D)

23. 【方法一】

如下圖，作 UV 線段與 QR 垂直，連接 PS。令 $UV=x$ 及正方形邊長為 s。



可知 PS 平分 $\angle UST$，故 $\angle USV=\angle VUS=45^\circ$。令 $VS=x$，也因此 $QV=1-x$。

因 $\triangle QVU$ 與 $\triangle QSP$ 為相似三角形，故有

$$\frac{QV}{QS}=\frac{VU}{SP}$$

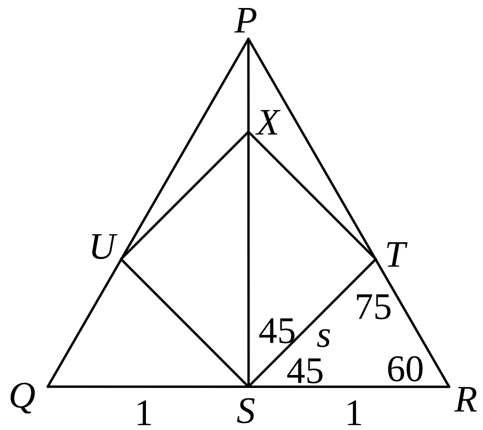
$$\frac{1-x}{1}=\frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$x=\sqrt{3}-\sqrt{3}x$$
$$x=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

因△VUS 是直角三角形，故有 $s^2=2x^2=2\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{12-6\sqrt{3}}{2}=6-3\sqrt{3}$

答案：(A)

【方法二】

連接 PS。可觀察出∠TRS＝60°及∠TSR＝45°，因此∠STR＝75°。



由正弦定理可知 $\frac{s}{\sin 60°}=\frac{1}{\sin 75°}$ 。

因 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，故

$\sin75°=\sin(45°+30°)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

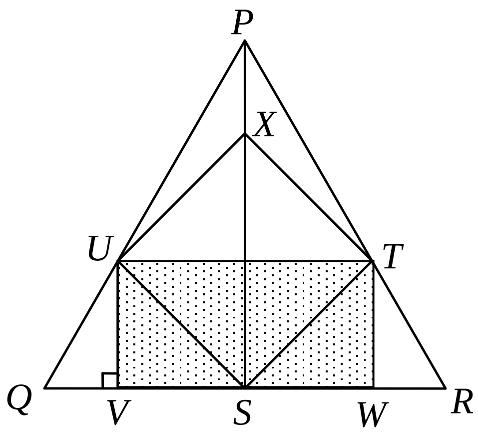
所以 $s=\frac{\sin 60°}{\sin 75°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$ ，

也就是說面積為 $s^2=\frac{6}{4+2\sqrt{3}}=\frac{3}{2+\sqrt{3}}=6-3\sqrt{3}$

答案：(A)

【方法三】

如下圖，作 UV、TW 線段與 QR 垂直，連接 PS。則可知正方形 $STXU$ 與陰影部分面積相同。



若假設 $UV=\sqrt{3}x$，則可以得到 $QU=2x$ 以及 $UP=2\sqrt{3}x$，故 $PQ=2x+2\sqrt{3}x$。

現已知 PQ 實際的長度為 2，故 UV 實際的長度為$\sqrt{3}\times\dfrac{2}{2+2\sqrt{3}}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$，所以陰影部分的面積為$2UV^2=6-3\sqrt{3}$

答案：(A)

24. 令 $f(x)=ax^2+bx+c$ 及對所有的 x， $f(x)f(-x)=f(x^2)$ 都成立。則有

$$(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)=ax^4+bx^2+c$$

比較係數可得$a^2=a$，$2ac-b^2=b$以及$c^2=c$，可由此知 a=0 或 1 及 c=0 或 1

(i) 若 a=0，則 b=0 或－1、c=0 或 1。故 $f(x)=0$、1、－x 或 1－x 滿足題意。

(ii) 若 a=1，則 c=0 時 b=0 或－1 以及 c=a=1 時 b=1 或－2。故 $f(x)=x^2$、x^2-x、x^2+x+1或x^2-2x+1滿足題意。

因此共有 8 個方程式滿足題意。

答案：(C)

25. 【方法一】

$$(\sqrt{2}+1)^1=\sqrt{2}+1$$
$$(\sqrt{2}+1)^2=2\sqrt{2}+3$$
$$(\sqrt{2}+1)^3=5\sqrt{2}+7$$
$$(\sqrt{2}+1)^4=12\sqrt{2}+17$$
$$(\sqrt{2}+1)^5=29\sqrt{2}+41$$
$$(\sqrt{2}+1)^6=70\sqrt{2}+99$$
$$(\sqrt{2}+1)^7=169\sqrt{2}+239$$
$$(\sqrt{2}+1)^8=408\sqrt{2}+577$$
$$(\sqrt{2}+1)^9=595\sqrt{2}+1393$$

以上各數的係數分別除以 3 後所得的餘數依序為：(1，1)、(2，0)、(2，1)、(0，2)、(2，2)、(1，0)、(1，2)、(0，1) 及 (1，1)。

故可知這以 8 次方為一循環。因 2007＝8×250+7，故若設$(\sqrt{2}+1)^{2007}=a\sqrt{2}+b$時，則$b\equiv 1 \pmod 3$。因此 b 與 81 的最大公因數為 1。

答案：(A)

【方法二】

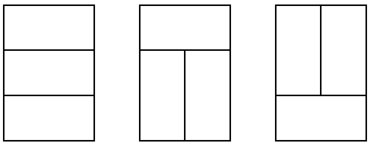
因$(\sqrt{2}+1)^{2007}=a\sqrt{2}+b$，故$(\sqrt{2}-1)^{2007}=b\sqrt{2}-a$。因此有

$$(\sqrt{2}+1)^{2007}(\sqrt{2}-1)^{2007}=(a\sqrt{2}+b)(b\sqrt{2}-a)$$

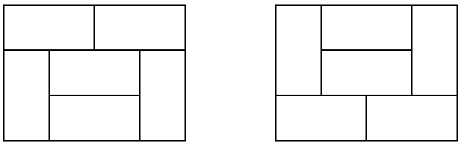
因此$1=2b^2-a^2$。
若 b 可被 3 整除，則 a^2 在模 3 之下必同餘於 2，但這是不可能的。故 b 不可被 3 整除，即 b 與 81 的最大公因數為 1。

答案：(A)

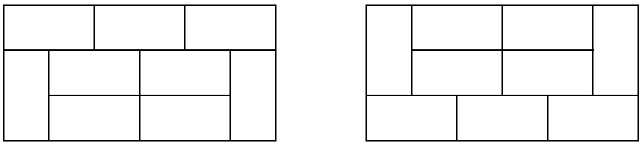
26. 一塊 3×6 的區域可分成三塊 3×2 的區域，一塊 3×4 的區域及一塊 3×2 的區域，或是一塊 3×6 的區域。
共有如下圖所示的三種方法可用 3 片 1×2 的磁磚來鋪成一塊 3×2 的區域：



從這三種拼法中可重複的選取，將兩塊左右並列即可得到一塊 3×4 的區域，如此可得到 3×3＝9 種拼成一塊 3×4 區域的方法。還有如下圖所示的兩種可以拼成一塊 3×4 區域的方法，這兩種拼法都稱為不可分解拼法。



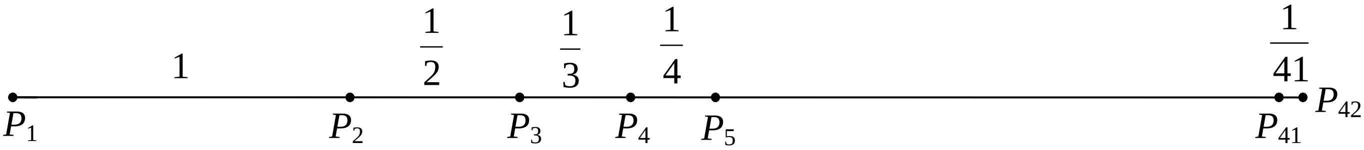
對於一塊 3×6 的區域，一樣也有 2 個不可分解的拼法：



因從可用 3 片 1×2 的磁磚來鋪成一塊 3×2 區域的三種拼法中可重複的選取三種拼法後左右並列即可得到一塊 3×6 的區域，故知有 3×3×3＝27 種拼成一塊 3×6 區域的方法。
而一塊 3×6 的區域也可由一塊不可分解拼法的 3×4 區域及一塊 3×2 的區域組成，故知有 2×3×2＝12 種拼成一塊 3×6 區域的方法。
所以共有 2+27+12＝41 種不同的方法。

答案：41

27. 因為點 P_i 與點 P_{i+1} 之間的距離為 $\frac{1}{i}$，可畫出以下圖形：



可知：
在 P_1P_2、P_1P_3、P_1P_4、…、P_1P_{42} 共 1×41 個線段中都有包含線段 P_1P_2；
在 P_1P_3、P_1P_4、P_1P_5、…、P_1P_{42}、P_2P_3、P_2P_4、P_2P_5、…、P_2P_{42} 共 2×40 個線段中都有包含線段 P_2P_3；
在 P_1P_4、P_1P_5、P_1P_6、…、P_1P_{42}、P_2P_4、P_2P_5、P_2P_6、…、P_2P_{42}、P_3P_4、P_3P_5、

P_3P_6、…、P_3P_{42} 共 3×39 個線段中都有包含線段 P_3P_4；

⋮

在 P_1P_{42}、P_2P_{42}、P_3P_{42}、…、$P_{41}P_{42}$ 共 41×1 個線段中都有包含線段 $P_{41}P_{42}$。

所以所有兩個點之間的距離的總和為

$$\begin{aligned}&41\times1\times1+40\times2\times\frac{1}{2}+39\times3\times\frac{1}{3}+\cdots+41\times1\times\frac{1}{41}\\&=41+40+39+\cdots+3+2+1\\&=861\end{aligned}$$

答案：861

28. 令 $10a+b$ 是一個一位數或二位數，則幸運數為 $10a+b=19(a+b)$。此式僅 $a=b=0$ 時成立。因此幸運數至少為三位數。

假設有一個幸運數是 m 位數。因該數至少為 10^{m-1} 且該數的各位數之和至多為 $9m$，故可知 $171m\geqq10^{m-1}$。

當 $m=4$ 時，得 $684\geqq1000$，不合。故不存在四位數的幸運數。

當 $m\geqq5$ 時，$171m\geqq10^{m-1}$ 仍不會成立，故僅有三位數的幸運數。

令三位數的幸運數為 $100a+10b+c$，則有 $100a+10b+c=19a+19b+19c$，即 $9a=b+2c$。

當 $a=1$ 時，$(b, c)=(1, 4)$、$(3, 3)$、$(5, 2)$、$(7, 1)$或$(9, 0)$。

當 $a=2$ 時，$(b, c)=(0, 9)$、$(2, 8)$、$(4, 7)$、$(6, 6)$或$(8, 5)$。

當 $a=3$ 時，$(b, c)=(9, 9)$。

當 $a\geqq4$ 時無解。故共有 11 個幸運數：114、133、152、171、190、209、228、247、266、285 與 399。

答案：11

29. 可觀察出將計算器顛倒過來後數字仍可以讀的數為 0、1、2、5、6、8 與 9。因此若將計算器顛倒過來可讀的數依序列出，因各位數上會出現的數字都是由以上這七個數字所組成，因此可看成是七進制的數，而這個七進制的基底依序就是 0、1、2、5、6、8、9。因 $2007=5\times7^3+5\times7^2+6\times7+5$，故用七進制表示 2007 即為 5565。因這個七進制的 5 為十進制中的 8，七進制的 6 為十進制中的 9，故第 2007 個數為 8898，即末三位為 898。

答案：898

30. 【方法一】

因

$$x+y=3(z+u) \qquad (1)$$
$$x+z=4(y+u) \qquad (2)$$
$$x+u=5(y+z) \qquad (3)$$

故

$$x+y=3z+3u \qquad (4)$$
$$x-4y=-z+4u \qquad (5)$$
$$x-5y=5z-u \qquad (6)$$

（4）式－（5）式及（5）式－（6）式可得

$$5y=4z-u \qquad (7)$$

$$y=-6z+5u \qquad (8)$$

因此

$$5(-6z+5u)=4z-u$$
$$26u=34z$$
$$13u=17z$$

因此 u=17 與 z=13 為最小的 z 與 u 的正整數解。由(8)式可知 y=－78＋85=7，再由（4）式可得 x=39＋51－7=83。故 x 可能的最小值是 83。

答案：83

【方法二】

因

$$x+y=3(z+u) \qquad (1)$$

$$x+z=4(y+u) \qquad (2)$$

$$x+u=5(y+z) \qquad (3)$$

從（1）式可知 $x+y+z+u=4(z+u)$，從（2）式可知 $x+y+z+u=5(y+u)$，從（3）式可知 $x+y+z+u=6(y+z)$。

因此若令 $S=x+y+z+u$，則 $4|S$、$5|S$ 及 $6|S$，也因此 $60|S$。若取 S=60k，則可得

$$x+y=3(z+u)=\frac{3}{4}S=45k$$

$$x+z=4(y+u)=\frac{4}{5}S=48k$$

$$x+u=5(y+z)=\frac{5}{6}S=50k$$

因此

$$x=\frac{(x+y)+(x+z)+(z+u)-(x+y+z+u)}{2}=\frac{45k+48k+50k-60k}{2}=\frac{83k}{2}\text{。}$$

因為 x 是正整數，k 必須是偶數，故 x 可能的最小值是 83。

答案：83