初級卷(7–8 年級)

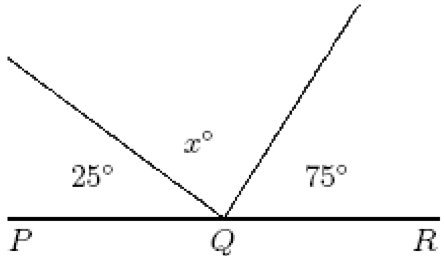
1. 37－16＝21。

答案：(D)

2. $\dfrac{6\times7}{3}=2\times7=14$。

答案：(B)

3. 因為 *PQR* 為一直線，故 $x+25+75=180$，$x=180-100=80$。



答案：(C)

4. 11 am 再過 5 小時為 4 pm。

答案：(C)

5. 3.1、0.6、3、6 及 0.5 之中，最大的數為 6、最小的數為 0.5，故最大與最小的數之和為 6＋0.5＝6.5。

答案：(E)

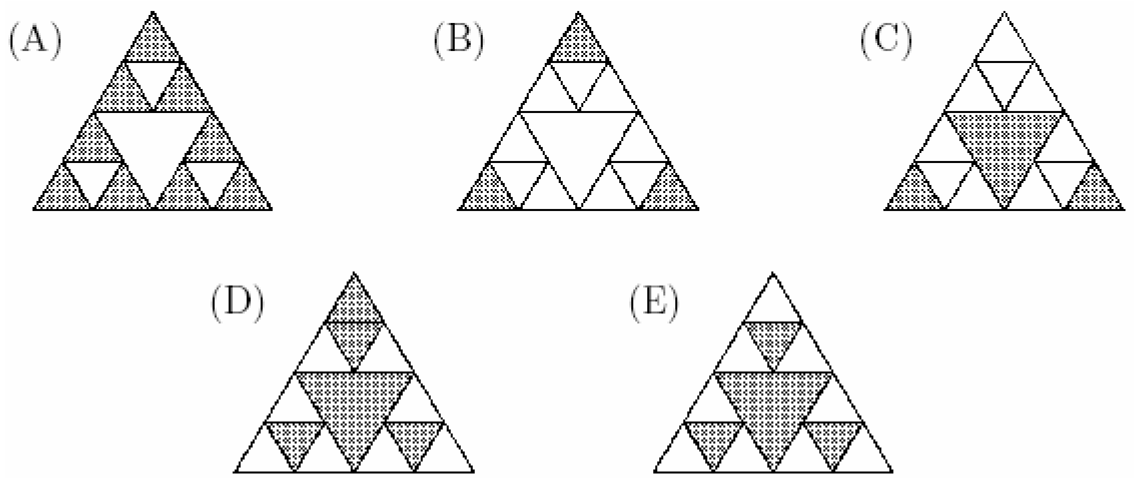
6. 因為 100 比 97 多 3 以及 300 比 298 多 2，故 100＋300 比 97＋298 多了 3＋2，所以他必須減去 5。

答案：(C)

7. 一籃芒果價格為＄46。因每籃芒果有 5 排，每排 6 個，故 30 個芒果的價錢為＄46，所以則三個芒果的價錢為＄46÷10＝＄4.60。

答案：(D)

8. 以下圖案共有三種大小不同的三角形，16 個最小的三角形可組成 1 個最大的三角形，4 個最小的三角形可組成 1 個中等的三角形。



由圖示可知，(A) 圖中陰影部分為 $\dfrac{9}{16}$，(B) 圖中陰影部分為 $\dfrac{3}{16}$，(C) 圖中

陰影部分為$\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，(D) 圖中陰影部分為$\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，(E) 圖中陰影部分為$\frac{7}{16}$。

答案：(C)

9. 若 $97+a=100+b$，則 $a=100-97+b=3+b$。

答案：(A)

10. 可知$\frac{7}{15}$、$\frac{3}{7}$以及$\frac{4}{9}$都比$\frac{1}{2}$小，而$\frac{6}{11}>\frac{1}{2}$，故最大的分數為$\frac{6}{11}$。

答案：(C)

11. 因為每 5 隻老鼠中有 2 隻老鼠是由矮貓所捉到，且兩隻貓共捉了 60 隻老鼠，所以矮貓總共捉了$\frac{2}{5}\times 60=24$ 隻老鼠。

答案：(B)

12. 在星期一有 17 位學生得到滿分以及在星期二有 18 位學生得到滿分，合計共有 35 人次得到滿分。因班級共有 30 位學生，故至少能有 5 位學生兩天的比賽都得到滿分。

答案：(B)

13. 完成圖如下：

	2		
			1
	1	3	
4			

→

	2		
			1
2	1	3	4
4			

→

	2		3
			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
3			1
2	1	3	4
4			2

→

1	2	4	3
3	4	2	1
2	1	3	4
4	3	1	2

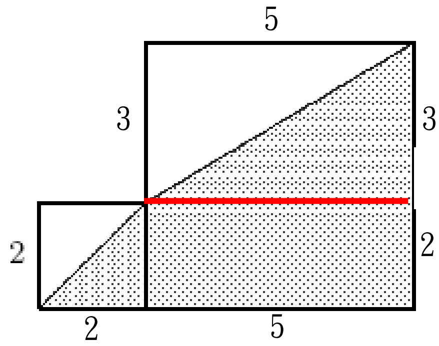
因此在角落的四個數之和為 $1+4+2+3=10$。

答案：(E)

14. 第一個超過 100 的 6 的倍數為 $6\times17=102$，最後一個不超過 1000 的 6 的倍數為 $6\times166=996$，所以在 100 到 1000 之間共有 $166-17+1=150$ 個數是 6 的倍數。

答案：(B)

15. 陰影部分的面積為 2×2 正方形面積的一半、3×5 矩形面積的一半以及 2×5 矩形全部的面積組合而成。因此陰影部分的面積為$\frac{1}{2}\times4+10+\frac{1}{2}\times5\times3=19.5$ 平方單位。

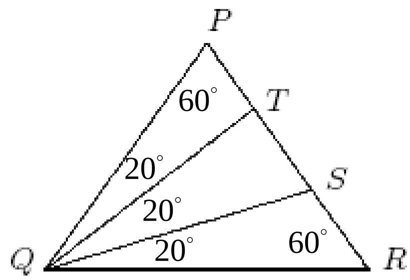


答案：(D)

16. 若 B 是 2 歲，則 D 為 6 歲，也因此 E 和 C 分別為 1 歲和 5 歲，或者是 3 歲和 7 歲。無論是哪一種情形，在其餘的三個人中，最大的年齡恰為其餘二個年齡之和，與已知矛盾。因此 B 為 1 歲，故 D 為 3 歲、E 和 C 分別為 2 歲及 6 歲。所以 F 為 7 歲、G 為 4 歲以及 A 為 5 歲。

答案：(D)

17. 因 $\overline{QS}$ 和 $\overline{QT}$ 將 $\angle PQR$ 分為三等分，我們可得知如下圖所示的角度：



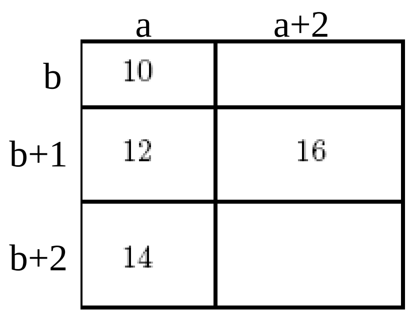
因 $\angle QTS$ 為 $\triangle QPT$ 的外角，故 $\angle QTS = 60° + 20° = 80°$。

答案：(C)

18. 由<u>小貞</u>前六項表演的平均得分為 8.5 分可知她前六項的總分為 $8.5 \times 6 = 51$。若她所得到的最高分為 9 分，則有 $5+9+9+9+9+9=50<51$。因此她的最高得分最少為 10 分，如以下得分情況：$5+9+9+9+9+10=51$，她的最高分即為 10 分。

答案：(B)

19. 令左上角的矩形長寬分別為 a 與 b，則可得到如下圖所示的各線段長度：



因為每個矩形的邊長都是整數，所以可知 $a+b=5$，即 $b=5-a$。因大矩形周長為 $2(b+b+1+b+2+a+a+2)=6b+4a+10$，因此大矩形周長為 $6(5-a)+4a+10=40-2a$。再由 $a+b=5$ 以及 a 是整數可知 a 最大為 4，故大矩形可能的周長最小為 $40-8=32$。

答案：(B)

20. （A）$27=13+14$。$14=2\times 7$ 有 4 個因數。

（B）39＝19+20。20＝2^2×5 有 6 個因數。
（C）75＝37+38。38＝2×19 有 4 個因數。
（D）87＝43+44。44＝2^2×11 有 6 個因數。
（E）107＝53+54。54＝2×3^3 有 8 個因數。
安迪的年齡有 8 個因數，故他們倆人可能的年齡之和為 107。

答案：(E)

21. 若蕾絲在上世紀出生，則可假設是 1900+10a+b 年出生。故有

$$2007-(1900+10a+b)=2(1+9+a+b)$$
$$107-10a-b=20+2a+2b$$
$$87=12a+3b$$
$$29=4a+b$$

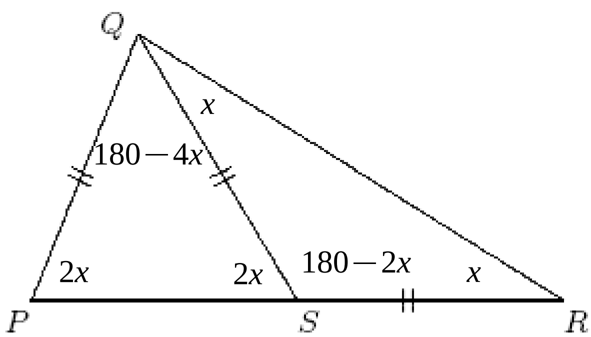
滿足上式的(a, b)有：(7, 1)、(6, 5)、(5, 9)，故有 1971、1965、1959 這三年滿足條件。
若蕾絲在這個世紀出生，則可假設是 2000+a 年出生。故有

$$2007-2000-a=2(2+0+0+a)$$
$$7-a=4+2a$$
$$3a=3$$
$$a=1$$

即 2001 年滿足條件。因此共有 4 種可能。

答案：(D)

22. 如圖，令∠$SRQ=x°$，則∠$SQR=x°$、∠$QSP=$∠$QPS=2x°$



可得∠$PQR=180-3x°$，因為圖中所有角的度數都是正整數，故當 $x=1$ 時，∠$PQR=177°$為最大。

答案：(D)

23. 【方法一】
令 $10a+b$ 為滿足條件的兩位數，則有 $10a+b=3ab$。
因此 b 一定是可被 a 整除的數，故可假設 $b=ka$，其中 k 為整數。
可得 $10a+ka=3a^2k$，即 $10+k=3ak$。
所以 k 必整除 10，即 $k=1$、2 或 5。
若 $k=1$，則 $11=3a$，矛盾；若 $k=2$，則 $12=6a$，即 $a=2$ 且 $b=4$；若 $k=5$，則 $15=15a$，即 $a=1$ 且 $b=5$。
因此共只有 15 與 24 滿足條件。

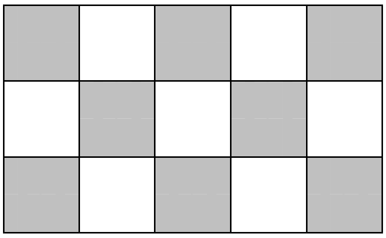
答案：(C)

【方法二】

令 $10a+b$ 為滿足條件的兩位數，則有 $10a+b=3ab$，$b=\dfrac{10a}{3a-1}$。逐一將 1 至 9 代入 a，可發現僅當 $a=1$ 時，$b=5$ 以及 $a=2$ 時，$b=4$ 這兩種情形下 b 有整數解，因此共只有 15 與 24 滿足條件。

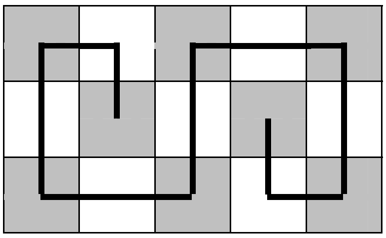
答案：(C)

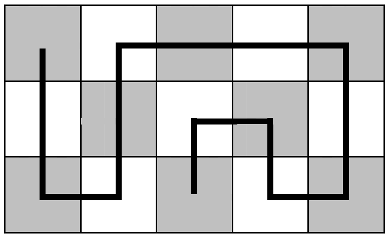
24. 如下圖，將 3x5 的棋盤塗上黑色及白色：



如此共有 8 個黑色格子與 7 個白色格子。因為是黑白相間塗色，所以每次移動後所在格子的顏色都會轉換。因此要完成題目所要求的條件，就必須從黑色格子出發，即這 7 個白色格子都不可作為出發點。

剩下的 8 個黑色格子中，可分為三類：位於角落、位於邊上但不在角落以及位於內部。以下的移動方式證明了這三類黑色格子都可作為出發點





故有 8 個格子可作為出發點。

答案：(D)

25. (1) A 說 B 是個說謊者。
(2) B 說 C 是個說謊者。
(3) C 說 D 是個說謊者。
(4) D 說 E 是個說謊者。

若 A 是說謊者，由（1）可知 B 是誠實者，再由（2）可知 C 是說謊者，接著由（3）知道 D 是誠實者，最後由（4）得知 E 是說謊者。故共有 3 個說謊者及 2 個誠實者。

若 A 是誠實者，由（1）可知 B 是說謊者，再由（2）可知 C 是誠實者，接著由（3）知道 D 是說謊者，最後由（4）得知 E 是誠實者。故共有 3 個誠實者及 2 個說謊者。

所以最多有 3 個說謊者。

答案：(C)

26. 由該式可知此二位數的個位數為 0、1、5 或 6。

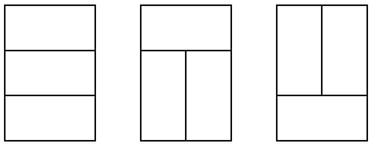
因所有二位數的個位數是 0 時，該數平方後的末兩位數必為 00，故此二位數的個位數不會為 0。

而對於可寫成 X1 型式的所有二位數來說，該數平方後的末兩位數也不會是 X1，故此二位數的個位數也不會為 1。

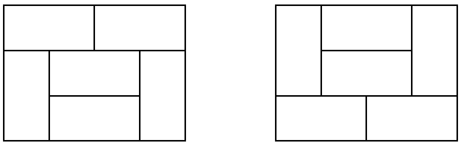
而個位數為 5 的二位數中，只有 25 的平方的末兩位數為 25；在個位數為 6 的二位數中，只有 76 的平方的末兩位數為 76。因此所求為 25＋76＝101。

答案：101

27. 一塊 3×4 的區域可分成兩塊 3×2 的區域，而共有如下圖所示的三種方法可用 3 片 1×2 的磁磚來鋪成一塊 3×2 的區域：



從這三種拼法中可重複或不重複地選取兩種拼法後左右並列，即可得到一塊 3×4 的區域，如此可得到 3×3＝9 種拼法，再加上如下圖所示的兩種拼法，共有 9+2＝11 種拼法。



答案：11

28. 【方法一】

這四部電梯合計共可停 12 個樓層。假設該大樓有 6 層樓，則可知存在某一個樓層最多只會有 2 部電梯停留。因為每部電梯都是連接一個樓層至其他兩個樓層，所以該樓層只能夠連結其餘五個樓層中的四個，故該大樓不可能有 6 層樓。若該大樓有 7 層樓或 7 層樓以上，便可知必存在某一個樓層最多只會有 1 部電梯停留，因此這狀況也必不會成立。所以該大樓最多只會有 5 層樓。而大樓可以有 5 層樓，只要將這四部電梯依以下方式停留即可：

第一部電梯停留 1、4 和 5 樓，第二部電梯停留 2、4 和 5 樓，第三部電梯停留 3、4 和 5 樓，第四部電梯停留 1、2 和 3 樓。

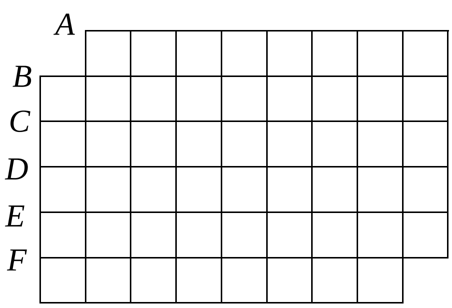
因此該大樓最多可有 5 層樓。 答案：5

【方法二】

若一棟大樓有 n 層樓，則可知任意挑選兩層樓連接的方式共有 T_{n-1} 個，其中 T_{n-1} 為第 n 個三角數。

因這四部電梯合計共可停 12 個樓層，所以 $T_{n-1}<12$。已知 $T_4=10$ 以及 $T_5=15$，故 n 的最大值為 5。 答案：5

29. 【方法一】如下圖，在六個交點上標示上 A、B、C、D、E、F：



1×1 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 8 個，從 B 點開始橫著數共有 9 個，
從 C 點開始橫著數共有 9 個，從 D 點開始橫著數共有 9 個，
從 E 點開始橫著數共有 9 個，從 F 點開始橫著數共有 8 個；
因此共有 52 個 1×1 的正方形。

2×2 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 7 個，從 B 點開始橫著數共有 8 個，
從 C 點開始橫著數共有 8 個，從 D 點開始橫著數共有 8 個，
從 E 點開始橫著數共有 7 個；因此共有 38 個 2×2 的正方形。

3×3 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 6 個，從 B 點開始橫著數共有 7 個，
從 C 點開始橫著數共有 7 個，從 D 點開始橫著數共有 6 個；
因此共有 26 個 3×3 的正方形。

4×4 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 5 個，從 B 點開始橫著數共有 6 個，
從 C 點開始橫著數共有 5 個；因此共有 16 個 4×4 的正方形。

5×5 的正方形：從 A 點開始橫著數共有 4 個，從 B 點開始橫著數共有 4 個；
因此共有 8 個 5×5 的正方形。

6×6 的正方形：只有從 A 點開始橫著數的 2 個 6×6 的正方形。

因此共有 52＋38＋26＋16＋8＋2＝142 個正方形

答案：142

【方法二】

先將缺口的兩個正方形補回，則：

1×1 的正方形有 6×9＝54 個，2×2 的正方形有 5×8＝40 個，
3×3 的正方形有 4×7＝28 個，4×4 的正方形有 3×6＝18 個，
5×5 的正方形有 2×5＝10 個，6×6 的正方形有 1×4＝4 個。
所以共有 154 個正方形。

接著將補回的兩個正方形移去，則每一種狀況都會少了 2 個正方形，也就是說共少了 2×6＝12 個正方形，因此共有 154－12＝142 個正方形。

答案：142

30. 令 N 為任意一個正整數，D 為出現在 N 或 $7×N$ 中的最小的數字。舉例來說，若 N＝34，則 $7N$＝238，也因此 D＝2。下表為 N 為個位數時的情形：

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$7N$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
D	1	1	1	2	3	2	4	5	3

所以可知當 N 為 8 時，D＝5。

若 D≧6，則會出現在 N 或 $7×N$ 中的數字只可以有 6、7、8 及 9，因此在所有的兩位數中只需考慮下表的數：

N	$7N$	N	$7N$	N	$7N$	N	$7N$
66	462	76	532	86	602	96	672
67	469	77	539	87	609	97	679
68	476	78	546	88	616	98	686
69	483	79	553	89	623	99	693

可知 $D=6$ 僅當 N 為 97 及 98 時發生。
若 N 為三位數 M 時，$D=7$，則可知 M 及 $7M$ 的末兩位數也如同上表中的數的末兩位數，也因此當 $D=7$ 時，M 的末兩位數一定是 97。但 $7\times797=5579$、$7\times897=6279$ 以及 $7\times997=6979$，可知在所有的三位數中，$D\leqq6$。
最後，考慮 $N>1000$ 的情況。若 N 是一個使 $D=7$ 發生的數，則可知必存在一個數 a 使 $7\times10^a<N<10^{a+1}$，即 $49\times10^a<7N<7\times10^{a+1}$，換言之，$7N$ 的首位數字必小於 7，與 $D=7$ 矛盾。同樣的方法也可得知 $D=8$ 與 $D=9$ 也不會發生，故 m 的最大值為 6。

答案：6