

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2011 年青少年數學國際城市邀請賽
參賽代表遴選初賽
個人競賽試題

編號: _____ 姓名: _____ 校名: _____ 國中

作答時間: 二小時

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請將答案直接填入各題預留空白處，不須列出計算過程)

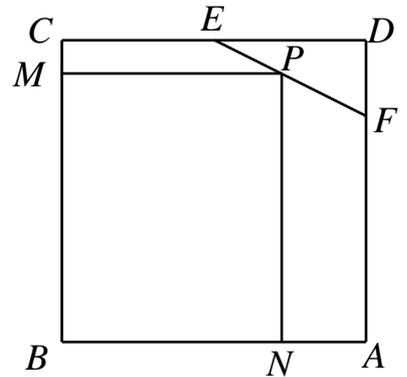
1. 187^{2011} 之值的個位數為_____。
2. 從 7, 14, 21,開始，把 7 的倍數依次連接在一起寫下去，一直寫到 1001，成為一個很大的數：71421...9941001，則這個數是_____位數。
3. 設長方形的長增加其長度的 $\frac{1}{10}$ ，若面積不變，則長方形的寬所減少的長度與原來的寬之比為_____。
4. 設 x 、 y 為正整數，則滿足方程式 $\frac{5}{2x} + \frac{2}{5y} = \frac{1}{100}$ 的所有數對 (x, y) 共有_____組。
5. 已知 x 、 y 、 z 滿足
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 10 \end{cases}$$
則 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} =$ _____。
6. 設 x 、 y 與 z 為正整數，並計算它們的倒數和；接著將這三個正整數 x 、 y 與 z 依序分別加上 1、2 與 3 後，再計算它們的倒數和。請問經過這樣操作之後，倒數和之差的最大值是_____。
7. 已知一正整數加上 37 後為一完全平方數，而此正整數減去 36 仍為一個完全平方數，則此正整數為_____。

8. 設 $N = \underbrace{66\cdots65}_{2011\text{個}6} \times \underbrace{133\cdots3}_{2012\text{個}3}$ ，則 N 的最後五個數碼為_____。

9. 已知 a 及 $\frac{a^3 + 25}{a + 5}$ 均為正整數，則 a 的最大值為_____。

10. 設 x, y 為正整數，則滿足方程式 $x^2 y^3 = 6^{12}$ 的所有數對 (x, y) 共有_____組。

11. 如右圖，邊長為 20 的正方形 $ABCD$ 截去一角成為五邊形 $ABCEF$ ，其中 $DE=10, DF=5$ ；若點 P 在線段 EF 上使矩形 $PMBN$ 有最大面積時，則 PE 的長度為_____。



12. 已知正三角形 ABC 內部一點 P 滿足 $PA=3, PB=4, PC=5$ ，則正三角形 ABC 的面積 = _____。

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

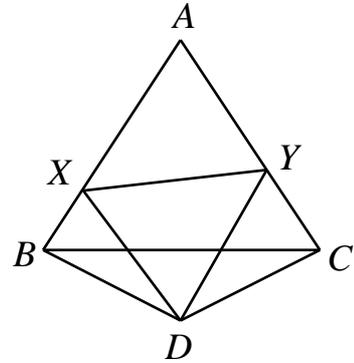
(注意：請在本試卷正反面空白處依題號作答，須詳列計算過程及說明理由)

1. 已知 \square 是 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的一個數碼，若一百零一位數

$$A = \underbrace{99\cdots99}_{50\text{個}9} \square \underbrace{55\cdots55}_{50\text{個}5}$$

是 7 的倍數，則 \square 的所有可能值為何？

2. 如圖，已知三角形 ABC 是一個邊長為 2011 的正三角形，三角形 BDC 是等腰三角形， $\angle BDC=120^\circ$ 。以 D 為頂點任作一個 60° 的角，角的兩邊分別交 AB 於點 X 、交 AC 於點 Y 。請問三角形 AXY 的周長是多少？



3. 有一個正九邊形，將它的各個頂點任意地塗成紅色或白色。以正九邊形的頂點所作出的三角形中，試證：存在兩個全等的三角形，它們的頂點所塗的顏色都各自相同。