2010 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第 一 試：應 用 題（考試時間 90 分鐘）

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分**

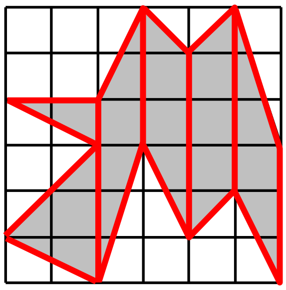
1. 有一個四位數$\overline{a7b4}$可被 72 整除，請問 $a\times b$ 有幾種可能不同的值？

【參考解法】

因 72=8×9，故$\overline{a7b4}$同時為 8 及 9 的倍數。由$\overline{a7b4}$為 8 的倍數可得知$\overline{7b4}$必是 8 的倍數，因此 b=0、4 或 8；由$\overline{a7b4}$為 9 的倍數可得知 $a+7+b+4=11+a+b$ 必是 9 的倍數，且 a、b 皆為數碼，因此 $a+b$=7 或 16。若 b=0，則 a=7；若 b=4，則 a=3；若 b=8，則 a=8。因 7×0=0、3×4=12、8×8=64，故 $a\times b$ 有 3 種可能不同的值。

答：3

2. 在 6×6 的方格表中，每個小方格的邊長為 1 cm，請問圖中塗上陰影部分的面積為多少 cm^2？



【參考解法】

如圖，可將陰影部分切割為 1 個平行四邊形、2 個三角形、及 3 個上底為 3 cm、下底為 4 cm 與高為 1 cm 的梯形，則可算出其面積為

$$4\times1+\frac{1}{2}\times(1\times2)+\frac{1}{2}\times(3\times2)+3\times\frac{(3+4)\times1}{2}=18\frac{1}{2}=\frac{37}{2}=18.5\text{cm}^2$$

答：$18\frac{1}{2}=\frac{37}{2}=18.5\ \text{cm}^2$

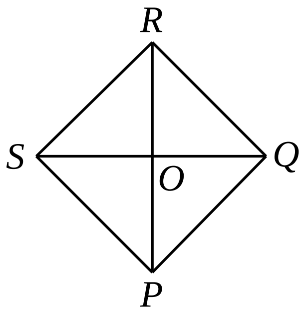
3. 將四張牌♠A、♥A、♦K、♣K 洗亂後每次都從中任意取出二張牌。甲、乙兩人各操作一次後，甲說：「我有 A」、乙說：「我有一張♠A」。請問誰的兩張牌都是 A 的機會較大？大多少？還是兩人一樣大？

【參考解法】

這四張牌任取兩張的情形有以下 6 種：(♠A, ♥A)、(♠A, ♦K)、(♠A, ♣K)、(♥A, ♦K)、(♥A, ♣K)、(♦K, ♣K)。而對甲來說，現已知他有 A，故有以下 5 種可能：(♠A, ♥A)、(♠A, ♦K)、(♠A, ♣K)、(♥A, ♦K)、(♥A, ♣K)，且其中每種發生機會都一樣，但因其中兩張都是 A 的情況僅(♠A, ♥A)一種，故機率為$\frac{1}{5}$；而因為乙已經有一張牌為♠A，故有以下 3 種可能：(♠A, ♥A)、(♠A, ♦K)、(♠A, ♣K)，因此他另一張牌也為 A 的機率為$\frac{1}{3}$。故乙的機會比甲的機會大$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$。

答：乙的機會比甲的機會大$\frac{2}{15}$。

4. 平面上有五個點，它們之間有些點有線段相連，如圖所示。若規定任何線段不可以重複經過，但交點可以重複經過兩次以上，請問從點 P 到點 R 有多少種不同的路徑？



【參考解法】

可知 P 出發後，第二點為 S、O 或 Q。因 S 與 Q 處於對稱的位置，故第二點為 S 與第二點為 Q 的不同路徑數相同，故這二種情況可僅考慮 S 即可。

第二點為 S 時，路徑有：

```
P —— S ┬— R*
       └ O ┬— R*
           ├ Q ┬— R*
           │   └ P —— O —— R*
           └ P —— Q ┬— R*
                    └ O —— R*
```

共 6 種；

第二點為 O 時，第三點為 S、R 或 Q。若第三點為 R 時即到達。再來因 S 與 Q 處於對稱的位置，故第三點為 S 與第三點為 Q 的不同路徑數相同，故這二種情況可僅考慮 S 即可。第三點為 S 時，路徑有：

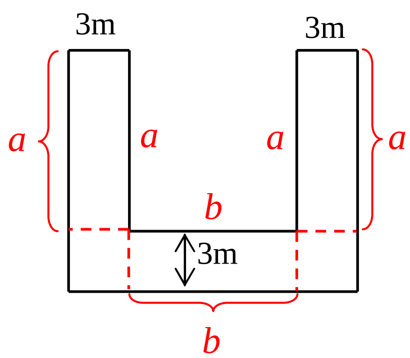
```
P —— O —— S ┬— R*
            └ P —— Q ┬— R*
                     └ O —— R*
```

共 3 種。

綜上所述，可得共 $(6+3)\times2+1=19$ 種不同的路徑。

答：19 種

5. 如圖所示，有一個對稱的 U 形步道，步道的寬度都是 3 m、周長是 86 m。請問它的面積是多少？



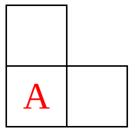
【參考解法】

如右圖，可將此跑道分為五部分，故可知步道周長為 $4a+2b+3+3+3+3+3+3=86$，即 $2a+b=34$。而這個跑道是由三個矩形與兩個邊長為 3 的正方形組合，其面積為

$$3a+3b+3a+3\times3+3\times3=6a+3b+18=120\,\text{m}^2$$

ANS：120 m^2

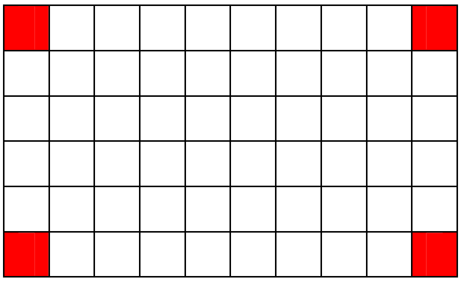
6. 小杰玩多方塊遊戲，他欲將一片如圖的 L 形三方塊放置在 6×10 的方格表中(三方塊的每個小方格與方格表中的小正方形邊長都相同)，且放置 L 形三方塊時，每個小方格都與方格表的小方格對齊也不可以突出方格表外，但 L 形三方塊可以旋轉。請問小杰有多少種不同放入 L 形三方塊的方法？



【參考解法一】

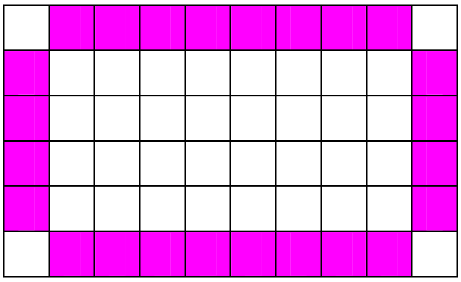
如圖，依 L 形三方塊的 A 格在 6×10 的方格表中的位置可分成三類：

1.角落



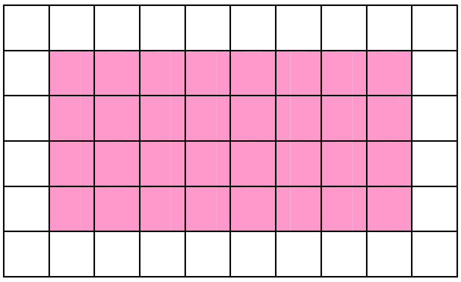
若 L 形三方塊的 A 格位在角落時，僅有一種放法；

2.邊界



若 L 形三方塊的 A 格位在邊界時，有二種放法；

3.內部



若 L 形三方塊的 A 格位在內部時，有四種放法；

故共有 $4\times1+(4+8)\times2\times2+4\times8\times4=180$ 種不同放入 L 形三方塊的方法。

【參考解法二】

可觀察出在 2×2 的方格中 L 形三方塊共有 4 種不同的放置方法。而在 6×10 的方格表中，共有 $5\times9=45$ 個選擇 2×2 方格的方法，因此共有 $4\times45=180$ 種不同放入 L 形三方塊的方法。

答：180

7. 欲將一塊 8×10 的矩形巧克力剝成為 1×1 的小正方形，若允許將剝開的巧克力堆疊在一起剝，請問至少要剝幾次？

【參考解法】

因每剝一次最多可使片數成為原來的兩倍，而 $2^6=64<8\times10=80$，故撥 6 次以下皆不可能。只剝 7 次則可利用以下方法完成：

令長為 8、寬為 10，則沿長邊的中點連線剝斷，可得兩塊 4×10 的矩形巧克力；

將兩塊 4×10 的矩形巧克力疊成 $4\times10\times2$ 的巧克力，令長為 4、寬為 10、高為 2，則沿長邊的中點連線剁斷，可得四塊 2×10 的矩形巧克力；
將四塊 2×10 的矩形巧克力疊成 $2\times10\times4$ 的巧克力，令長為 2、寬為 10、高為 4，則沿長邊的中點連線剁斷，可得八塊 1×10 的矩形巧克力；
將八塊 1×10 的矩形巧克力疊成 $1\times10\times8$ 的巧克力，令長為 1、寬為 10、高為 8，則沿寬邊的中點連線剁斷，可得十六塊 1×5 的矩形巧克力；
將十六塊 1×5 的矩形巧克力疊成 $1\times5\times16$ 的巧克力，令長為 1、寬為 5、高為 16，則沿距寬邊同一端 1 單位處連線剁斷，可得十六塊 1×1 的矩形巧克力與十六塊 1×4 的矩形巧克力；
將十六塊 1×4 的矩形巧克力疊成 $1\times4\times16$ 的巧克力，令長為 1、寬為 4、高為 16，則沿寬邊的中點連線剁斷，可得三十二塊 1×2 的矩形巧克力；
將三十二塊 1×2 的矩形巧克力疊成 $1\times2\times32$ 的巧克力，令長為 1、寬為 2、高為 32，則沿寬邊的中點連線剁斷，可得 64 塊 1×1 的矩形巧克力；
至此，共剁七次，共得 $64+16=80$ 塊 1×1 的矩形巧克力。

答：7 次

8. LED 燈泡每枚售價 80 元，而傳統燈泡每枚只要 10 元。有一個霓虹燈總共有 8000 枚燈泡，依照每天開燈 4 小時計，每枚傳統燈泡每年電費需 24 元，而每枚 LED 燈泡每年電費只需 6 元。每枚傳統燈泡的平均壽命為 1 年，而 LED 燈泡平均壽命為 5 年。如果將此霓虹燈的燈泡全部替換為 LED 燈泡，請問平均每年約可節省多少元？

【參考解法】

因傳統燈泡可用 1 年，因此 1 年的平均花費為 $8000\times10+8000\times24=272000$ 元；若用 LED 燈泡，可用 5 年，故 1 年的平均花費為 $(8000\times80)\div5+8000\times6=176000$ 元；因此平均一年可節省 $272000-176000=96000$ 元。

答：96000 元

9. 超商販賣的巧克力有每包 3 粒裝與每包 7 粒裝兩種。小丁共恰購買 71 粒巧克力，但已知他購買 7 粒裝的包數比 3 粒裝的包數多。請問他共買多少包巧克力？

【參考解法】

假設有 a 包 3 粒裝、b 包 7 粒裝，則可得 $3a+7b=71$，即 $a=\dfrac{71-7b}{3}=23-2b+\dfrac{2-b}{3}$，故由 a、b 皆為正整數可知 $b=2$、5、8，即 $(a, b)=(19, 2)$、$(12, 5)$、$(5, 8)$。因已知 7 粒裝的包數比 3 粒裝的包數多，故可知 $a=5$、$b=8$，即 $a+b=13$。

ANS：13 包

10. 甲、乙兩人進行了八十一回合的某類型球賽，兩人先抽籤決定第一回合的發球權，之後的回合則由兩人輪流發球，比賽結果甲以 2：1 的比率獲勝，且在八十一回合中，共有四十一回合不是發球者獲勝。請問第一回合的發球者在所有他發球的回合中共贏了幾回合？

【參考解法】

因甲以 2：1 的比率獲勝，故可知有$81\times\frac{2}{3}=54$回合是由甲獲勝、$81\times\frac{1}{3}=27$回合是由乙獲勝。因其中有 40 回合是由發球者獲勝，可假設甲發球時獲勝回合數為 a、乙發球時獲勝回合數為 b，則恆有 $a+b=40$。

若第一回合是由乙發球，則乙發球 41 回合，其中 $41-b$ 回合是由甲獲勝，故知 $a+(41-b)=54$，即 $a-b=13$，故由 $a+b$、$a-b$ 的奇偶性不同可判斷出 a、b 皆非整數，故不合；

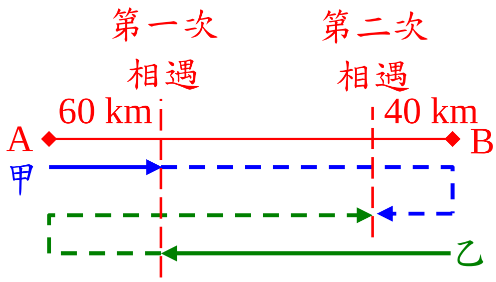
若第一回合是由甲發球，則甲發球 41 回合，其中 $41-a$ 回合是由乙獲勝，故知 $b+(41-a)=27$，即 $a-b=14$，故再與 $a+b=40$ 一起可解出 $a=27$、$b=13$。

因此第一回合是由甲發球，且在他的發球回合中共獲勝 27 回合。

答： 27 回合

11. 甲車以勻速從 A 地開往 B 地，乙車以勻速從 B 地開往 A 地，兩車在距離 A 地 60 公里處第一次相遇，兩車繼續以各自的勻速前進，到達目的地後各自休息 10 分鐘然後折返原出發地。兩車在距離 B 地 40 公里處第二次相遇。請問甲車與乙車之速度比為何？

【參考解法】

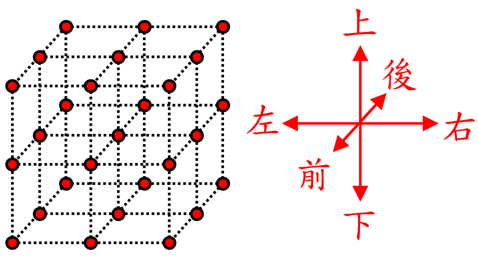


可觀察出兩車第一次相遇時，合計共走了 A、B 之間的距離，其中甲車走了 60 公里。而第一次與第二次相遇間，因兩車到達目的地後各自休息 10 分鐘，故從出發至第二次相遇間兩車所用的行駛時間相同，且因合計共走了 3 倍的 A、B 之間的距離，故可知甲車在這期間合計走了 $60\times3=180$ 公里；因兩車在距離 B 地 40 公里處第二次相遇，故全程為 $180-40=140$ 公里，所以第一次相遇時乙車走了 $140-60=80$ 公里。已知兩車的行駛時間相同時，兩車的速度比即為行駛的距離比，故甲車與乙車之速度比為 60：80=3：4。

答：3：4

12. 在 $3\times3\times3$ 的立體棋盤上，兩人各執黑棋或白棋輪流擺在棋盤上，最先使得自己所執顏色的三個棋子連成一直線(包括水平線、鉛垂線、豎直線、平面主對角線、立體主對角線)者勝。請問在此立體棋盤上共有幾條可以得勝的不同直線？

【參考解法】



考慮此立體棋盤上三個方向的平面：上下、前後、左右，其中每一個方向皆有三層平面。

1. 從每個方向看去，都有 9 條平行的連線。因此三個不同方向共有 $3\times9=27$ 條此類連線；
2. 從每個方向看去，都有 6 條平面主對角線的連線。因此三個不同方向共有 $6\times3=18$ 條此類連線；
3. 另有 4 條立體主對角線。

所以此立體棋盤上共有 27+18+4=49 條可以得勝的不同直線。

答：49 條

2010 小學數學競賽選拔賽複賽試題

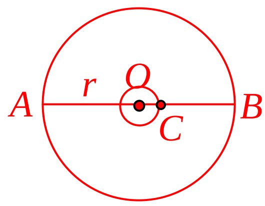
第　二　試: 綜合能力測驗（考試時間 60 分鐘）

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、2、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1. 有一隻聰明的獵犬在林中遇到一隻老虎，由於老虎的速度是獵犬的 2.5 倍，獵犬判斷逃走已經來不及了，只好跳進附近的一個圓形湖泊中，老虎雖怕水不會游泳，但牠不甘心，便在岸邊虎視眈眈監視獵犬並繞著湖畔跑，要等獵犬一上岸時便可加以補捉。假設獵犬在湖中游泳的速度與牠跑的速度一樣，且假設獵犬知道離湖邊不遠之某處有一個小洞穴，可以容下牠的身軀但容不下老虎，因此獵犬只要比老虎早抵達此洞就可以逃過一劫；老虎雖知有此洞穴，但若老虎守在洞口監視，則獵犬可趁機從另一頭溜走。不過獵犬也不能一直待在水裡，遲早都要爬上岸。請問獵犬還有辦法逃出老虎的魔爪嗎？如果有，請說明其策略；如果不能，亦請說明原因。

【參考解法】



如圖，令圓形湖的圓心為 O 點且半徑為 r。再令 A 點為洞在圓形湖岸邊的位置，通過 A 點與 O 點的直線交圓周於 B 點。獵犬可利用以下策略：先以 O 點為圓心、半徑為 $\frac{1}{5}r$ 的圓為路徑繞著 O 點游，此時老虎會在圓形湖的岸邊繞著追，直到獵犬到達 C 點且老虎同時到達 B 點時，獵犬再直接往 A 點游去。這時獵犬從 C 點至 A 點移動距離為 $1+\frac{1}{5}r=\frac{6}{5}r$ 、老虎從 B 點至 A 點移動距離為 $\frac{1}{2}\times 2\pi r=\pi r$ ，二者所需移動的距離比值為 $\frac{\pi r}{\frac{6}{5}r}>\frac{5}{6}\pi>2.5$，故獵犬可在老虎到達前抵達洞穴躲避而逃過一劫。

2. 警方破獲一製造偽幣集團，起出 6 大袋 50 元硬幣。嫌犯供稱每袋內硬幣數都有 1000 枚，其中有二袋內全是假幣，其餘四袋內全是真幣，假幣的重量全部一樣，但每枚都比真幣輕 4 毫克。倘若嫌犯所招供均屬實，請問如何用精密的磅秤(每次至多只能有 40 枚硬幣上秤，否則磅秤不靈)，秤一次即可查明哪兩袋是假幣？

【參考解法】

假設一個真幣的重量為 a 毫克。將這六個袋子從 1 號開始依序編號到 6 號，並且從 1 號袋開始依序拿出 1 個、2 個、3 個、5 個、8 個、13 個硬幣（即斐波那契數列的前六項）。若全是真幣，理論上總重量應為 $a+2a+3a+5a+8a+13a=32a$

毫克，但因有二袋為假幣，且假幣每枚都比真幣輕 4 毫克，故真正的重量會比 $32a$ 少，且少的部分之數值為 4 的倍數。

若假幣為 1 號、2 號袋，則少的部分之數值為 4×(1+2)=12；
若假幣為 1 號、3 號袋，則少的部分之數值為 4×(1+3)=16；
若假幣為 1 號、4 號袋，則少的部分之數值為 4×(1+5)=24；
若假幣為 1 號、5 號袋，則少的部分之數值為 4×(1+8)=36；
若假幣為 1 號、6 號袋，則少的部分之數值為 4×(1+13)=56；
若假幣為 2 號、3 號袋，則少的部分之數值為 4×(2+3)=20；
若假幣為 2 號、4 號袋，則少的部分之數值為 4×(2+5)=28；
若假幣為 2 號、5 號袋，則少的部分之數值為 4×(2+8)=40；
若假幣為 2 號、6 號袋，則少的部分之數值為 4×(2+13)=60；
若假幣為 3 號、4 號袋，則少的部分之數值為 4×(3+5)=32；
若假幣為 3 號、5 號袋，則少的部分之數值為 4×(3+8)=44；
若假幣為 3 號、6 號袋，則少的部分之數值為 4×(3+13)=64；
若假幣為 4 號、5 號袋，則少的部分之數值為 4×(5+8)=52；
若假幣為 4 號、6 號袋，則少的部分之數值為 4×(5+13)=72；
若假幣為 5 號、6 號袋，則少的部分之數值為 4×(8+13)=84；

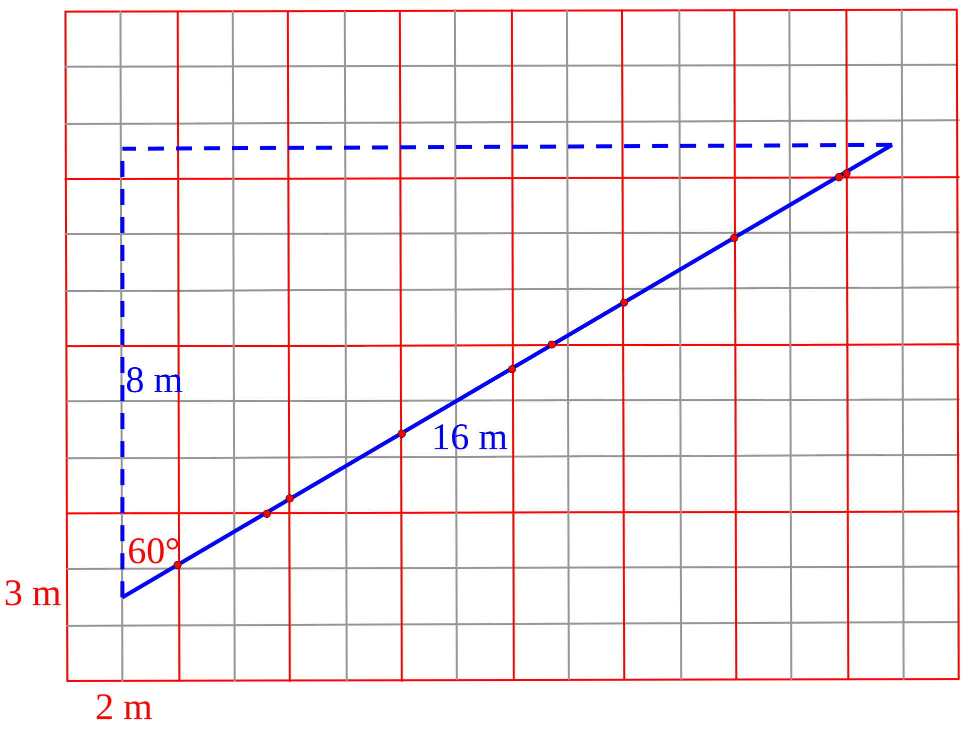
因以上數值皆不相同，故可利用此策略判斷出來。

3. 在 2 m×3 m 無洞的撞球檯上，當球碰到邊緣時會依入射角等於反射角的規律反彈。現有一顆球在球檯的正中心以與 3 m 長的邊夾 60°的方向彈出。請問當球滾動的距離為 16 m 時，它共碰撞球檯的邊緣幾次？

【參考解法】

令將 2 m×3 m 無洞的撞球台的 3 m 長之邊為橫向、2 m 長之邊為縱向，並將此球在撞球台的行進 16 m 後的路徑沿首次射出的射線方向拉成為一直線，如圖所示，則該直線與各水平、垂直線的交點數即為碰撞球抬的邊緣次數，合計 10 次。

答：10 次



4. 某國一位貪污的總統將貪污所得的財寶藏在下圖的迷宮中央，檢察官已經找到迷宮的入口了。請您用色筆把迷宮內通往藏寶處的路徑畫出來。