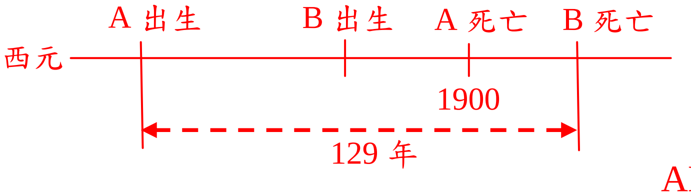
2008 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第 一 試：應 用 題（考試時間 90 分鐘）

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 10 分，共 120 分**

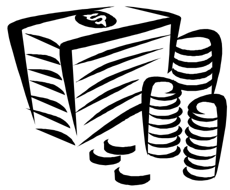
1. B 逝世於 A 生日之後 129 年，A 逝世於西元 1900 年，A、B 兩人存活之年齡總和為 150 歲。請問 B 出生於西元哪一年？

由圖可知 B 出生該年與 A 死亡之年相差 150－129＝21 年，故 B 出生於西元 1879 年。



ANS：西元 1879 年

2. 林小姐皮包裡的錢只有百元鈔和 1 元的零錢，數量都各少於 100。她在百貨公司購物花掉皮包裡一半的錢。當她離開百貨公司時，她發現皮包裡剩下的錢仍只有百元鈔和 1 元的零錢，且 1 元硬幣的數量與原來她所有的百元鈔的張數相同，而最後剩下的百元鈔的張數恰好等於原來 1 元硬幣數量的一半。請問林小姐原來皮包裡共有多少元？



假設林小姐皮包裡的錢原有 a 張百元鈔與 b 個 1 元硬幣，即原有 100a+b 元，

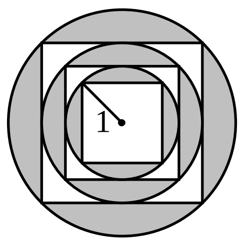
離開百貨公司時則有 $\frac{1}{2}$b 張百元鈔與 a 個 1 元硬幣，即剩下 100×$\frac{1}{2}$b+a 元。

因此可得以下關係式：100a+b＝2×(100×$\frac{1}{2}$b+a)＝100b+2a，98a＝99b。

因 98 與 99 為互質的兩個數且 a、b 都小於 100，所以可知 a＝99、b＝98，即林小姐皮包裡的錢原有 9998 元，離開百貨公司時剩下 4999 元。

ANS：9998 元

3. 一些正方形內接於一些同心圓，如圖所示。已知最小圓的半徑為 1 cm，請問陰影部分之面積為多少 cm^2？（取 $\pi=\frac{22}{7}$）

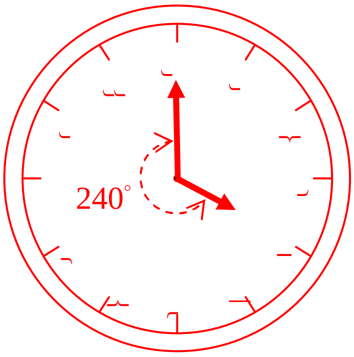


圖中三個圓的面積由小至大依序為 π、2π、4π，三個正方形的面積由到小至大依序為 2、4、8。而陰影部分的面積可看成三個圓的總面積減去三個正方形的總面積，即陰影部分面積為 7π－14=22－14=8 cm^2

ANS：8 cm^2

4. 有一位修錶師傅誤把手錶的某個齒輪裝反了，導致於分針的轉向變為逆時針方向，除此之外手錶的所有功能完全正常。師傅在中午 12：00 整時校正手錶的時針分針重合在數字 12 之上。請問在下午四時至五時之間，這個手錶時針與分針重合時所顯示的時刻為何？(並非當時正確的時刻)

分針一分鐘走 $360^\circ \div 60 = 6^\circ$、時針一分鐘走
$360^\circ \div 12 \div 60 = 0.5^\circ$。



因下午四點時兩針夾角 240°，且因修錶師傅只弄錯分針的轉向而導致分針與時針的方向恰相反，故兩針會在經過 $240^\circ \div (6^\circ + 0.5^\circ) = \dfrac{480}{13} = 36\dfrac{12}{13}$ 分鐘後相遇，但因分針的轉動方向為逆時針，故 $36\dfrac{12}{13}$ 分鐘後的分針位於鐘面上 $60 - 36\dfrac{12}{13} = 23\dfrac{1}{13}$ 分處，即兩針重合時所顯示的時刻為 4 時 $23\dfrac{1}{13}$ 分。

ANS：4 時 $23\dfrac{1}{13}$ 分或 4 時 $\dfrac{300}{13}$ 分

5. 老王在退休時共有 264 萬元的積蓄，他將這些錢分為 4 份，除了三個兒子各給一份外，另有一份自己留做養老金。若他把這份養老金給大兒子，則大兒子所得的錢等於二兒子及三兒子所得錢之總和；若他把這份養老金給二兒子，則二兒子所得的錢等於大兒子及三兒子所得錢之總和的二倍；若他把這份養老金給三兒子，則三兒子所得的錢等於大兒子及二兒子所得錢之總和的三倍。請問老王準備拿來當養老金的部分為多少萬元？

由題意可知可知三個兒子所得的錢與養老金共計 264 萬元。

(i) 把養老金給大兒子，則大兒子所得的錢等於二兒子及三兒子所得錢之總和可知養老金與大兒子所得的錢合計共佔積蓄的 $\dfrac{1}{2}$，即為 132 萬元；

(ii) 把養老金給二兒子，則二兒子所得的錢為大兒子及三兒子所得錢之總和的二倍可知養老金與二兒子所得的錢合計共佔積蓄的 $\dfrac{2}{3}$，即為 176 萬元；

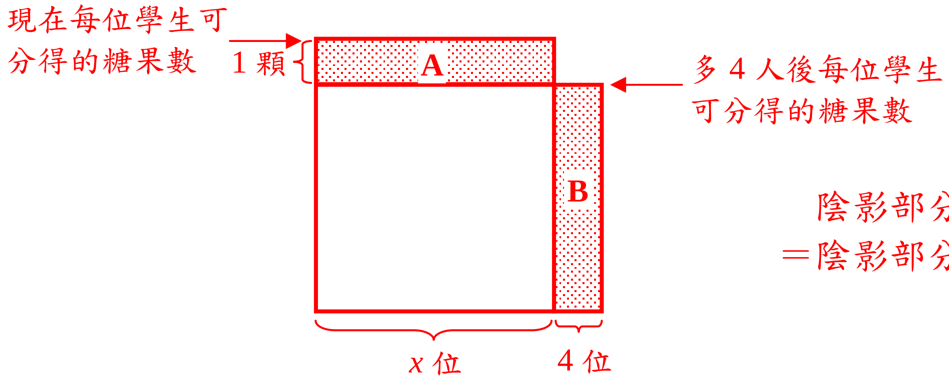
(iii) 把養老金給三兒子，則三兒子所得的錢為大兒子及二兒子所得錢之總和的三倍可知養老金與三兒子所得的錢合計共佔積蓄的 $\dfrac{3}{4}$，即為 198 萬元。

將(i)、(ii)、(iii)相加得知三倍養老金+大兒子所得的錢+二兒子所得的錢+三兒子所得的錢=132+176+198=506 萬元，故二倍養老金=506-264=242 萬元，得知養老金為 121 萬元。大兒子分得 11 萬元、二兒子分得 55 萬元、三兒子分得 77 萬元。　　ANS：121 萬元

6. 李老師打算將一批糖果分給學生，李老師說：「如果你們的人數比現在的人數少 5 人，則每個人可多分到 2 顆糖果；如果你們的人數比現在的人數多 4 人，則每個人會少分到 1 顆糖果。」請問現在每位學生可分到幾顆糖果？

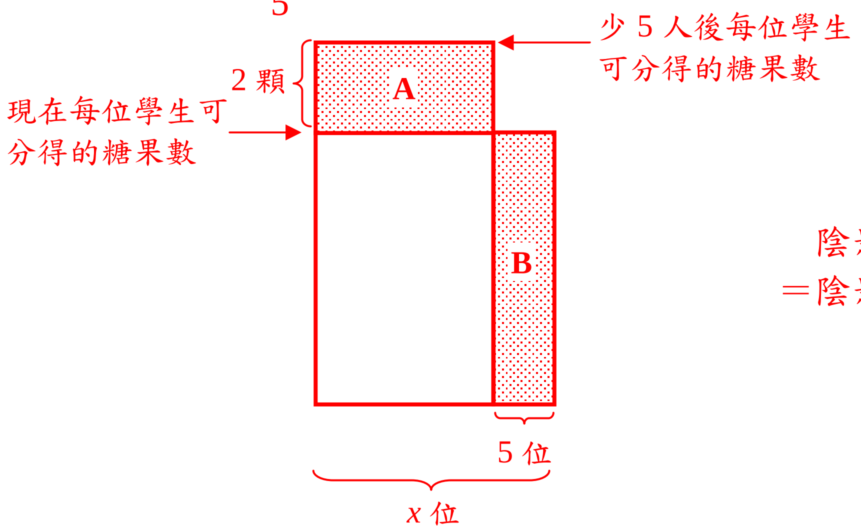
假設共有 x 位學生。由「當人數比現在的人數多 4 人，則每個人

會少分到 1 顆糖果」可知現在每位學生可拿到$\frac{1}{4}x+1$顆糖果；



陰影部分 A 的面積
＝陰影部分 B 的面積

由「當人數比現在的人數少 5 人，則每個人可多分到 2 顆糖果」可知現在每位學生可拿到$\frac{2(x-5)}{5}$顆糖果；



陰影部分 A 的面積
＝陰影部分 B 的面積

因此可知$\frac{2(x-5)}{5}=\frac{1}{4}x+1$，$x=20$ 。

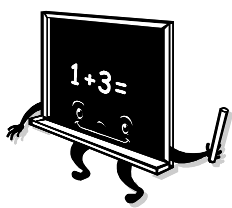
所以現在每位學生可拿到$\frac{2(20-5)}{5}=\frac{1}{4}\times 20+1=6$ 顆糖果。　　ANS：6 顆

7. 在 100 張卡片上不重複地編上 1～100，請問至少要隨意抽出幾張卡片才能保證所抽出卡片上的數相乘後之乘積可被 4 整除？

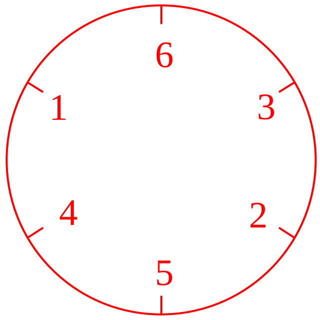
奇數及 $4k+2$ 不可被 4 整除，但抽出的卡片中若有兩張都是偶數則抽出的卡片上的數之乘積必可被 4 整除，故最壞的情況為抽出 50 張奇數及 2 張偶數，因此在此情況下至少需抽 50＋2＝52 張。

ANS：52 張

8. 將 1、2、3、4、5、6 寫在一圓周上，然後把圓周上連續三個數之和寫下，則可得到六個數a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6，將這六個數中最大值記為 A。請問在所有填寫方式中，A 的最小值是什麼？

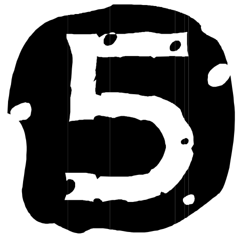


由於每個寫在圓周上的數都被用三次，可知
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=3\times(1+2+3+4+5+6)=63$，即平均每個數為 10.5，因此 A 至少為 11。由右圖排列方式可知 A 為 11 的情形存在，故 A 的最小值為 11。



ANS：11

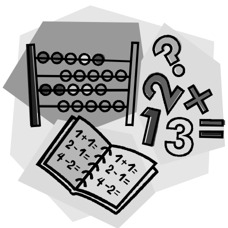
9. 有 n 個大於 10 的連續正整數，它們的各位數碼和都不可以被 5 整除。請問 n 的最大值是什麼？



對於連續正整數的個位數是從 0 依序到 9 之間的情形下，因連續的正整數之各位數碼和為依序增加 1，因此最多可有連續 4 個正整數之各位數碼和都不會被 5 整除；而若連續正整數中包含有個位數從 9 至 0 的情形下，此時的數碼和會減少而不是繼續增加 1，故最多可有 4+4＝8 個連續正整數之各位數碼和都不會被 5 整除，例如 916、917、918、919、920、921、922、923 這 8 個連續正整數之各位數碼和依序為 16、17、18、19、11、12、13、14，都不是 5 的倍數。

ANS：8 個

10. 以下算式是一個在十進制中二位數乘以二位數的算式，「奇」代表一個奇數碼、「偶」代表一個非 0 的偶數碼，數碼可以重複。請問此算式所得的乘積是多少？



		偶	奇
×		奇	奇
	奇	奇	奇
偶	奇	奇	
偶	奇	偶	奇

令該算式為

		a	b
×		c	d
	e	f	g
h	j	k	
L	m	n	g

(i) 因 a×d 的個位數必為偶數，而 f 為奇數，故 b×d 是十位數為奇數的數，所以(b,d)＝(3,5)、(5,3)、(5,7) 或(7,5)且 b×d 的十位數為 1 或 3。
(ii) 因 a×c 的個位數必為偶數，而 j 為奇數，故 c×b 是十位數為奇數的數，故(b,c)＝(3,5)、(5,3)、(5,7) 或(7,5) 且 c×d 的十位數為 1 或 3。
(iii) 因 e 為奇數，故 a×d 是十位數為奇數的數，再由(i)可知 d 為 3、5 或 7，所以(a,d)＝ (8,7)、(6,3)、(6,5)、(4,3)、(2,5) 或(2,7)。

(iv) 因 h 為偶數，故 a×c 是十位數為偶數的數，再由(ii)可知 c 為 3、5 或 7，所以(a,c)＝(8,3)、(8,5)、(6,7)、(4,5)、(4,7) 。

若 b=3、d=5，則由(iii)知 a=2 或 6：

當 a=2 時，則與(iv)矛盾；

當 a=6 時，則由(iv)知 c=7，63×7=441，矛盾；

若 b=5、d=3，則由(iii)知 a=4 或 6：

當 a=4 時，則由(iv)知 c=5 或 7，再由(ii)知 c=7，此時算式為

$$\begin{array}{r} 4\ 5 \\ \times\quad 7\ 3 \\ \hline 1\ 3\ 5 \\ 3\ 1\ 5\ \ \\ \hline 3\ 2\ 8\ 5 \end{array}$$

故不合；

當 a=6 時，則由(iv)知 c=7，此時算式為

$$\begin{array}{r} 6\ 5 \\ \times\quad 7\ 3 \\ \hline 1\ 9\ 5 \\ 4\ 5\ 5\ \ \\ \hline 4\ 7\ 4\ 5 \end{array}$$

若 b=5、d=7，則由(iii)知 a=2 或 8：

當 a=2 時，則與(iv)矛盾；

當 a=8 時，則由(iv)知 c=3 或 5，再由(ii)知 c=3，此時算式為

$$\begin{array}{r} 8\ 5 \\ \times\quad 3\ 7 \\ \hline 5\ 9\ 5 \\ 2\ 5\ 5\ \ \\ \hline 3\ 1\ 4\ 5 \end{array}$$

故不合；

若 b=7、d=5，則由(iii)知 A=2 或 6：

當 a=2 時，則與(iv)矛盾；

當 a=6 時，則由(iv)知 c=7，與(ii)矛盾；

因此只有 b=5、d=3、a=6、c=7 符合題意，乘積為 4745。

ANS：4745

11. 如下圖：

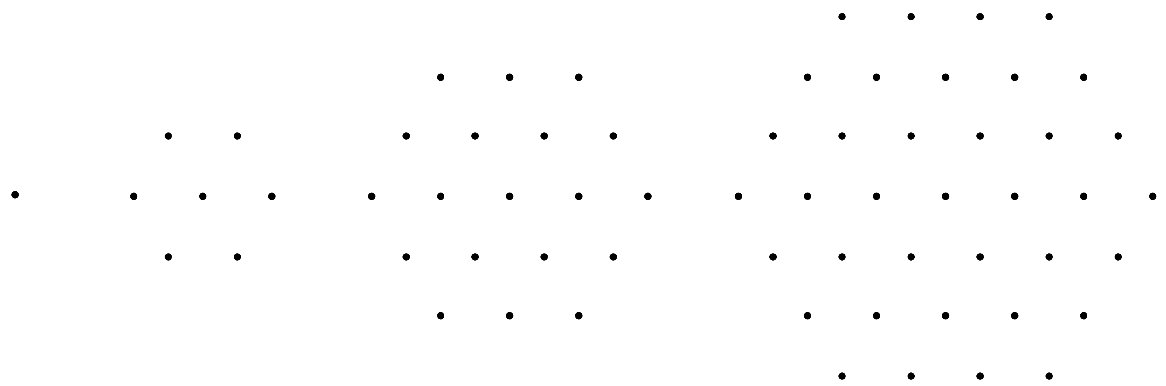


Fig 1 **Fig 2** **Fig 3** **Fig 4**

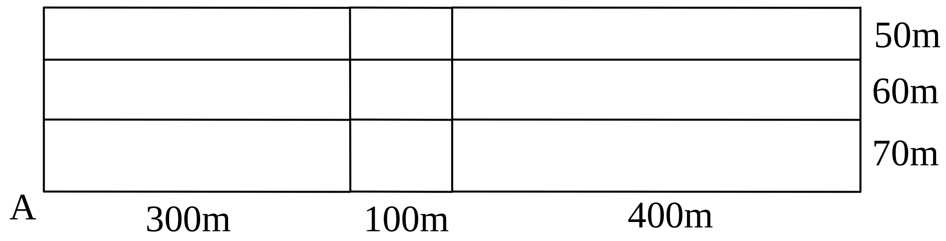
這些圖中點的數量稱為正六邊形數，Fig 1、Fig 2、Fig 3、Fig 4 的點數分別為 1、7、19、37。請問依此形式所繪出的第 100 個圖中有多少個點？

當 n 不為 1 時，若將第 n 個圖中最外圈的點所形成之六邊形視為一個邊長為 $(n-1)$ 的正六邊形，則知第 n 個圖中最外圈的點之數量即為 $6(n-1)$；

因當第 n 個圖去除掉最外圈的點即為第 $n-1$ 個圖、第 $n-1$ 個圖去除掉最外圈的點即為第 $n-2$ 個圖、…、第 2 個圖去除掉最外圈的點即為第 1 個圖，故可知第 n 個圖的點數為 $6(n-1)+6(n-2)+6(n-3)+\ldots+6+1$。所以第 100 個圖中共有 $6\times99+6\times98+\ldots+6+1=6\times4950+1=29701$ 個點。

ANS：29701 個點

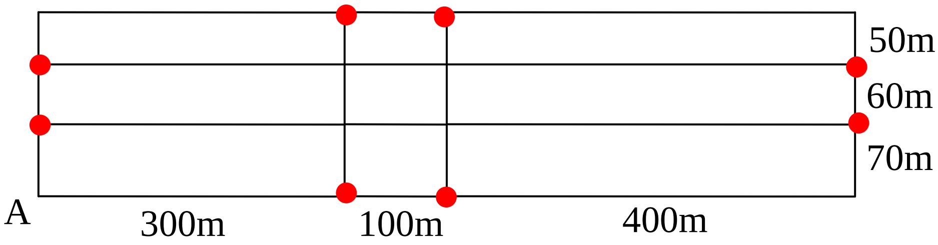
12. 有一個城市的街道圖是由一些矩形所構成，如下圖。一位警察要從 A 點出發巡邏，行經每一條路段至少一次後回到 A 點。請問他至少要行走多少 m？



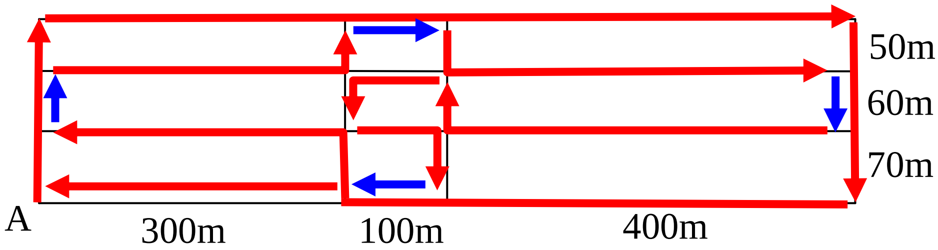
因警察要從 A 點出發巡邏，行經每一條路至少一次後回到 A 點，故所有的道路都會走過，即至少要走(300+100+400)x4+(50+60+70)x4=3920 m。

圖中每一條「街道」的交點為「交叉路口」，因警察要從 A 點出發巡邏，行經每一條路至少一次後回到 A 點，故每經過一個「交叉路口」都可看成「進入」該點一次後馬上「出來」一次，我們將這樣子稱為「出入」二次。因要回到 A 點，故每一個「交叉路口」出入次數必為偶數。

可看出「交叉路口」中的「十字路口」因有四個出入方向而必會經過二次；下圖中標出的 8 個紅點為「交叉路口」中的「三叉路口」只有三個出入方向，但因要求出入次數為偶數，故這 8 個點都也都要經過二次，即連接這 8 個點的路可能要走二次：



而經過這 8 個點的最短路徑為 60+100+60+100＝320 m，所以警察至少要走 3920+320＝4240 m，巡邏方式如下：



ANS：4240 m

2008 小學數學競賽選拔賽複賽試題

第　二　試: 綜合能力測驗（考試時間 60 分鐘）

______縣市______國民小學__年級　編號：______姓名：__________性別：__

請將答案填入考卷中對應題號的空位內，第 1、2、3 題必須詳細寫下想法或理由，每題 25 分，共 100 分。

1.　將一個二位數及其逆序的數相加，繼續再將所得之和與和之逆序的數相加，直到所得之值是一個迴文數為止(迴文數是指從左邊讀起與從右邊讀起所得之值相同的數)。例如：

（A）58 或 85：	58+85＝143 143+341＝484	 ←共操作二次
（B）97 或 79：	97+79＝176 176+671＝847 847+748＝1595 1595+5951＝7546 7546+6457＝14003 14003+30041＝44044	 ←共操作六次

請問二位數中，哪兩個數需要操作最多次才能達成目的？需要操作多少次？

如果這二位數之數碼和小於 9，則只要操作一次即可達成目的。因此只須考慮以下數對：

（19，91）、（28，82）、（29，92）、（37，73）、（38，83）、（39，93）、（46，64）、（47，74）、（48，84）、（49，94）、（55，55）、（56，65）、（57，75）、（58，85）、（59，95）、（66，66）、（67，76）、（68，86）、（69，96）、（77，77）、（78，87）、（79，97）、（88，88）、（89，98）、（99，99）。(完成此步驟給五分)

(i)　29+92＝38+83＝47+74＝56+65＝121

以上這些數都只要操作一次即可達成目的。

(ii)　19+91＝28+82＝37+73＝46+64＝55+55＝110

→ 110+11＝121

39+93＝48+84＝57+75＝66+66＝132

→ 132+231＝363

49+94＝58+85＝67+76＝143

→ 143+341＝484

以上這些數都只要操作二次即可達成目的。

(iii)　59+95＝68+86＝77+77＝154

→ 154+451＝605

→ 605+506＝1111

以上這些數都只要操作三次即可達成目的。

(iv) 69+96＝78+87＝165

→ 165+561＝726

→ 726+627＝1353

→ 1353+3531＝4884

以上這些數都只要操作四次即可達成目的。

(v) 79+97＝88+88＝176

以上這些數與題目所給之範例同狀況，故都只要操作六次即可達成目的。

(vi) 99+99＝198

→ 198+891＝1089

→ 1089+9801＝10890

→ 10890+9801＝20691

→ 20691+19602＝40293

→ 40293+39204＝79797

99 只要操作六次即可達成目的。(完成此步驟再給五分)

(vii) 89+98＝187

→ 968

→ 1837

→ 9218

→ 17347

→ 91718

→ 173437

→ 907808

→ 1716517

→ 8872688

→ 17735476

→ 85189247

→ 159487405

→ 664272356

→ 1317544822

→ 3602001953

→ 7193004016

→ 13297007933

→ 47267087164

→ 93445163438

→ 176881317877

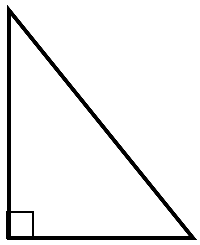
→ 955594506548

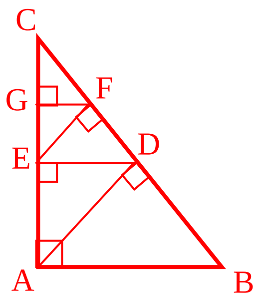
→ 1801200002107

→ 8813200023188

因此需要最多次的數為 89 及 98，需要操作 24 次。(完成此步驟再給十五分，只寫 89 及 98 給十分)

2. 任意給出一個直角三角形，請將它切成 5 個小三角形，使得這 5 個小三角形都與原三角形相似。在下圖中請畫出您的切法，並證明您的切法符合要求。





令該直角三角形為三角形 ABC 且∠CAB＝90°。

(i) 在△ABC 的 BC 邊上取 D 點使 AD⊥BC。此時由

∠CAB＝∠ADB＝∠CDA＝90°、∠ACB＝∠DAB＝∠DCA、

∠CBA＝∠ABD＝∠CAD

相等可知△ABC、△DBA、△DAC 為相似三角形。

(ii) 在△DAC 的 AC 邊上取 E 點使 DE⊥AC。此時由

∠CDA＝∠DEA＝∠CED＝90°、∠ACD＝∠ADE＝∠DCE、

∠DAC＝∠EAD＝∠EDC

相等可知△DAC、△EAD、△EDC 為相似三角形。

(iii) 在△EDC 的 CD 邊上取 F 點使 EF⊥CD。此時由

∠CED＝∠EFD＝∠CFE＝90°、∠DCE＝∠DEF＝∠ECF、

∠EDC＝∠FDE＝∠FEC

相等可知△CED、△EFD、△CFE 為相似三角形。

(iv) 在△EFC 的 CE 邊上取 G 點使 FG⊥CE。此時由

∠EFC＝∠EGF＝∠FGC＝90°、∠CEF＝∠FEG＝∠CFG、

∠FCE＝∠GFE＝∠GCF

相等可知△EFC、△EGF、△FGC 為相似三角形。

因此可知△DBA、△EAD、△FDE、△GEF、△GFC 為五個相似三角形。

(切法正確給十分，證明切法符合要求給十五分)

3. 俄國詩人 Benediktov（1807—1873）曾寫過一個故事，故事中有一則數學難題：一位以賣雞蛋維生的婦人，要她的三個女兒到市場去賣蛋。她分配給大女兒 8 個蛋、二女兒 22 個蛋、三女兒 36 個蛋，並要求三個女兒賣價要一致，獨自賣並且要繳回一樣多的錢，最後 66 個蛋的總收入不得少於 90 元。故事中敘述聰明的大女兒想到一個巧妙的辦法：開始時每人都以每五顆蛋 3 元的價錢賣出，最後剩下的蛋每個都賣 9 元。如果三人雞蛋都賣完，則大女兒得到 $1\times3+3\times9=30$ 元，二女兒得到 $4\times3+2\times9=30$ 元，三女兒得到 $7\times3+1\times9=30$ 元，正好可以完成任務。現在如果有七個人，每人各有 20、40、60、80、100、120 及 140 個蛋，所有人的賣價要一致，獨自賣並且要繳回一樣

多的錢，最後總收入不得少於 560 元。請問有什麼策略賣這些蛋？

因總收入不得少於 560 元，故每人必須繳回的錢數至少為 $560\div7=80$ 元。因所有人的賣價要一致，故考慮採取與故事中大女兒相似的策略，即每 k 顆蛋賣 m 元，剩下的蛋每顆賣 n 元。

i. 因共有七人，故 $k\geqq7$，否則會因至少有二人剩餘的蛋數相同而無法達到繳回一樣多的錢。

ii. 當 k 為二位數時，考慮有 20 顆蛋及 40 顆蛋的人。若 $(20-k)\times2\leqq k$ 時，即 $14\geqq k$ 時，兩人所得到的錢數恰為 1：2，故也不可能達成繳回一樣多的錢。所以 $k\leqq13$

iii. 因每 k 顆蛋賣 m 元，若 k 為 20、40、60、80、100、120、140 中任二個或二個以上的數之公因數，則會因至少有二人錢數不同而無法達到繳回一樣多的錢。故排除 k=8、10、12。

iv. 當 k=13 時，考慮有 40 顆蛋及 80 顆蛋的人。因 $40=13\times3+1$、$80=13\times6+2$，故兩人的錢數必也為 1：2，故也不可能達成繳回一樣多的錢。

v. 當 k=11 時：$20=11\times1+9$；$120=11\times10+10$，有 20 顆蛋及 40 顆蛋的人不可能達成繳回一樣多的錢，故不合。

vi. 當 k=9 時，考慮有 20 顆蛋及 40 顆蛋的人。因 $20=9\times2+2$、$40=9\times4+4$，兩人所得到的錢數恰為 1：2，故也不可能繳回一樣多的錢。

vii. 當 k=7 時：

$$20=7\times2+6、2\times m+6\times n=80；$$
$$40=7\times5+5、5\times m+5\times n=80；$$
$$60=7\times8+4、8\times m+4\times n=80；$$
$$80=7\times11+3、11\times m+3\times n=80；$$
$$100=7\times14+2、14\times m+2\times n=80；$$
$$120=7\times17+1、17\times m+1\times n=80；$$
$$140=7\times20+0、20\times m+0\times n=80。$$

因此有 m=4、n=12。

所以賣蛋策略為：開始時每人都以每七顆蛋 4 元的價錢賣出，最後剩下的蛋每個都賣 12 元。

$$20=7\times2+6、2\times4+6\times12=80；$$
$$40=7\times5+5、5\times4+5\times12=80；$$
$$60=7\times8+4、8\times4+4\times12=80；$$
$$80=7\times11+3、11\times4+3\times12=80；$$
$$100=7\times14+2、14\times4+2\times12=80；$$
$$120=7\times17+1、17\times4+1\times12=80；$$
$$140=7\times20+0、20\times4+0\times12=80。$$

(策略正確給十五分，證明策略符合要求給十分)

4. 今年是鼠年，右圖中藏有 8 隻老鼠，請找出它們，並把它們塗色或用粗筆圈起來（不得使用紅色筆)。每正確找到一隻老鼠得 3 分，每錯誤一個倒扣 3 分直到 0 分為止，全部找到共得 25 分。