2008 小學數學競賽選拔賽初賽試題

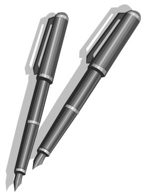
第 二 試：應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分**

1. A、B、C 三人同時由地面爬樓梯登上一座高塔，A 每步爬 3 階，但到達塔頂的最後一步只爬 2 階；B 每步爬 4 階，但到達塔頂的最後一步只爬 3 階；C 每步爬 5 階，但到達塔頂的最後一步只爬 4 階。已知這座高塔大約有 100~150 階樓梯，請問這座高塔的樓梯共有多少階？

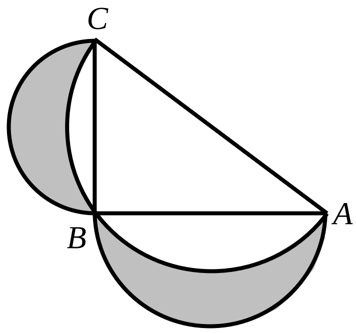
可知樓梯數同時為 3 的倍數加 2；4 的倍數加 3 及 5 的倍數加 4。換言之，即為 3 的倍數減 1；4 的倍數減 1 及 5 的倍數減 1。因 3、4、5 的最小公倍數為 60，故樓梯數可能為 60－1、60×2－1、60×3－1、…。已知這座高塔大約有 100~150 階樓梯，故樓梯數為 60×2－1＝119 階。

2. 智慧文具公司用以下方式計算原子筆：12 支原子筆算為 1 打，12 打原子筆算為 1 籮，用記號 8°11’6”代表 6 籮 11 打又 8 支原子筆。請問 3°7’10”與 6°8’3”相差多少支原子筆？



3°7’10”＝10 籮 7 打又 3 支＝10×12×12+7×12+3 支；
6°8’3”＝3 籮 8 打又 6 支＝3×12×12+8×12+6 支，
故 3°7’10”與 6°8’3”相差 9°10’6”，
(10×12×12+7×12+3)－(3×12×12+8×12+6)＝
6×12×12+10×12+9＝993 支。

3. 在直角三角形 ABC 中，分別以三個邊為直徑作半圓，構成如右之圖形，已知 $\overline{AB}$＝4 cm、$\overline{BC}$＝3 cm、$\overline{AC}$＝5 cm，請問陰影部分之面積為多少 cm²？



陰影部分之面積

$$=\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}\right)-\frac{1}{2}\pi\left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2$$

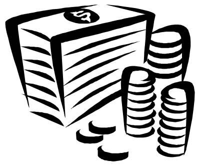
$$=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6\text{ cm}^2。$$

4. 甲、乙兩人合夥開設一家公司，甲的股份是乙的 1.5 倍。現有丙欲入股此公司，三人協議由丙拿出 1500 萬元購買甲、乙二人的部份股份，使得三人的股份都各佔三分之一。請問甲可取回多少萬元？

因甲的股份原是乙的 1.5 倍，為了方便計算，可將全部的股份分為 15 份，其中甲原佔 9 份、乙原佔 6 份。為了要使最後甲、乙、丙三人的股份都各佔三分之一，即要使每個人都各擁有 5 份，故甲必須要賣 4 份給丙且乙必須要

賣 1 份給丙，因此甲可取回 1500 萬$\times\dfrac{4}{4+1}=$1200 萬元。

5. 老王去銀行兌現一張支票，結果銀行職員疏忽在支付款項時把百元和千元的數字弄反了，而老王也沒注意到。在回家途中，老王花費 152 元買了一本雜誌，回到家才發現口袋裡的錢恰好是要兌領支票之金額的兩倍。若老王原來口袋裡沒有錢，請問原來這張支票的面額是多少？



<解法 1>

老王花了 152 元後剩下的錢為原支票金額的兩倍，即銀行員支付較多的錢給老王，即支票上百元的數碼大於千元的數碼。百元和千元的數碼對換後所相差的金額必為 900 的倍數，且再由花了 152 元後剩下的錢為原支票金額的兩倍可知此時剩下的錢與原支票金額的差即為原支票金額。

(i) 若相差 900 元，則用去 152 元後相差 748 元，不可能是原支票金額；

(ii) 若相差 1800 元，則用去 152 元後，仍相差 1648 元，也不可能是原支票金額，這是由於 1800＝900×2 可知百元和千元的數碼差應為 2。

(iii) 若相差 2700 元，則用去 152 元後，仍相差 2548 元，恰符合由 2700＝900×3 可知百元和千元的數碼差為 3 這項條件，故可知行員支付 5248 元，而原支票金額為(5248－152)÷2=2548 元。

(iv) 若相差 3600 元，則用去 152 元後，仍相差 3448 元，也不可能是原支票金額，這是由於 3600＝900×4 可知百元和千元的數碼差應為 4。

(v) 若相差 4500 元，則用去 152 元後，仍相差 4348 元，也不可能是原支票金額，這是由於 4500＝900×5 可知百元和千元的數碼差應為 5。

(vi) 若相差 5400 元，則用去 152 元後，仍相差 5248 元，也不可能是原支票金額，這是由於 5400＝900×6 可知百元和千元的數碼差應為 6。

(vii) 若相差 6300 元，則用去 152 元後，仍相差 6148 元，也不可能是原支票金額，這是由於 6300＝900×7 可知百元和千元的數碼差應為 7。

(viii) 若相差 7200 元，則用去 152 元後，仍相差 7048 元，也不可能是原支票金額，這是由於 7200＝900×8 可知百元和千元的數碼差應為 8。

(ix) 若相差 8100 元，則用去 152 元後，仍相差 7948 元，也不可能是原支票金額，這是由於 8100＝900×9 可知百元和千元的數碼差應為 9。

綜上所述，得知支票面額為 2548 元。

<解法 2>

令支票的面額為 $\overline{Aabcd}=A\times10^4+a\times10^3+b\times10^2+c\times10+d$，其中 A 可為一位以上的數字、a、b、c、d 為一位數字。利用題意可得知：

$$\overline{Abacd}-152=2\times\overline{Aabcd}$$

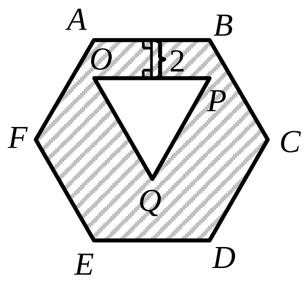
$$\overline{Aabcd}+152=900(b-a)$$

上式等號右邊的數的個位數及十位數都必為 0，故 d=8、c=4；又因 $b-a\leqq9$，故 $A=0$。所以可得：

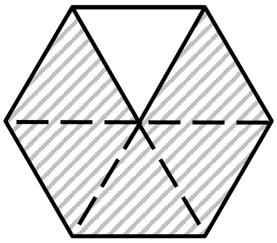
$$19a+2=8b$$

因 $b \leqq 9$，故 $a \leqq 3$。又 a 必為偶數，因此 $a=2$、$b=5$，支票面額為 2548 元。

6. 右圖中 $ABCDEF$ 為正六邊形、OPQ 為正三角形，已知 $\overline{AB}$ 與 $\overline{OP}$ 之距離為 2，$\overline{OP} // \overline{AB}$，$\overline{AB}=\overline{OP}=6$。令邊長為 1 的正三角形之面積為 a，請問圖中陰影部分之面積為多少 a？



因 $ABCDEF$ 為正六邊形、OPQ 為正三角形且 $\overline{AB}=\overline{OP}=6$，故正六邊形 $ABCDEF$ 之面積為正三角形 OPQ 之面積的 6 倍，也因此可知陰影部分之面積為正三角形 OPQ 之面積的 5 倍，而原圖可視為：



因邊長為 1 的正三角形之面積為 a 且 $\overline{OP}=6$，故正三角形 OPQ 之面積為 $6^2 \times a = 36a$，也因此可得知陰影部分之面積為 $5 \times 36a = 180a$。

7. 在 2008 年初，報紙報導有一位著名的數學家逝世時的年齡正好是他出生時西元年數的 $\frac{1}{29}$。請問這位數學家在 1960 年發表一篇重要的論文時的年紀為幾歲？

因該數學家死亡時的年齡正好是他出生時西元年數的 $\frac{1}{29}$，所以數學家死時的西元年數是 30 的倍數。由題意可知該數學家死亡的西元年份介於 1960 與 2008 之間，故知數學家死於西元 1980 年，享年 66 歲。所以該數學家在 1960 年時的年紀為 $1960-29\times66=46$ 歲。

8. 某國家的通用硬幣有 50 元、20 元、10 元、5 元、1 元等五種。<u>小李</u>宣稱無論別人拿 100 元、50 元、20 元、10 元或 5 元來向他換零錢，他都無法用口袋裡的零錢辦到（同樣的硬幣換同樣的硬幣不算更換）。請問<u>小李</u>口袋裡的硬幣至多有多少元？

(i) 因 5 元無法換成功，故 1 元最多 4 個；

(ii) 因 10 元無法換成功，故 5 元最多 1 個；

(iii) 因 20 元無法換成功，故 10 元最多 1 個；

(iv) 因 50 元無法換成功，則：

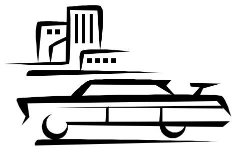
(a) 若無 20 元硬幣，則 10 元最多 4 個；

(b) 若有 20 元硬幣，則 20 元可任意多個，但不能有 10 元；

(v) 因 100 元無法換成功，故 50 元硬幣最多 1 個、20 元最多 4 個；

現問小王若滿足以上要求則至多有多少錢，由(i)、(ii)、(iii)及(v)知 50 元硬幣最多 1 個、20 元最多 4 個、10 元最多 1 個、5 元最多 1 個、1 元最多 4 個；再由(iv)知不能有 10 元，故小王最多有 $50\times1+20\times4+5\times1+1\times4=139$ 元。

9. 甲車於中午 12：00 出發從 A 地前往 B 地；乙車於下午 2：00 出發從 B 地前往 A 地。兩車於下午 4：05 相遇後，都繼續往目的地行駛，最後它們都在相同的時刻抵達目的地。若兩車的速度都未改變，請問它們在什麼時刻抵達目的地？

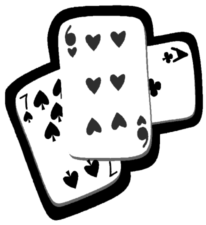


設甲車速度為 a、乙車速度為 b。可知甲車走了 $4\times60+5=245$ 分鐘、乙車走了 $2\times60+5=125$ 分鐘後相遇。因兩車相同時刻到達，故知從兩車相遇後花了相同的時間到達目的，所以

$$\frac{245a}{b}=\frac{125b}{a}\text{，即 }7a=5b$$

故知再 $\frac{245a}{b}=\frac{125b}{a}=175$ 分鐘後到達，即下午 7：00 到達目的地。

10. 今有一疊撲克牌 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K 共 13 張，它們的牌面朝下。現在要求將這疊撲克牌排出一個順序後做以下之操作：從這疊牌的最上面逐一地數三張牌放到這疊牌的最底下，再翻開最上面的牌出現的是 A，將 A 放在旁邊，接著繼續重複以上全部的作法，使得翻出來的牌之順序必須恰為 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K。請問該如何排列這 13 張牌？(請由上而下的順序寫出答案)



<解法 1>

因操作手法為從這疊牌的最上面逐一地數三張牌放到這疊牌的最底下，再翻開最上面的牌，故可將牌看成是依序每四張為一組，翻出每一組的第四張；因要求翻出順序為 A、2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K 且共有 13 張，因此在前三次操作時翻出的牌恰為第四、八、十二張，故 A 在第四張、2 在第八張、3 在第十二張；

此時剩下十張，依序為原先的第十三、一、二、三、五、六、七、九、十、十一張，同理，第四、五次操作應翻出原先的第三、九張，故 4 在第三張、5 在第九張；

此時剩下八張，依序為原先的第十、十一、十三、一、二、五、六、七張，同理，第六、七次操作應翻出原先的第一、七張，故 6 在第一張、7 在第七張；

此時剩下六張，依序為原先的第十、十一、十三、二、五、六張，同理，第八次操作應翻出原先的第二張，故 8 在第二張；

此時剩下五張，依序為原先的第五、六、十、十一、十三張，同理，第九次操作應翻出原先的第十一張，故 9 在第十一張；

此時剩下四張，依序為原先的第十三、五、六、十張，同理，第十次操作應翻出原先的第十張，故 10 在第十張；

此時剩下三張，依序為原先的第十三、五、六張，此時把最上面的三張逐一地放到最底之後順序仍為原先的第十三、五、六張，故第十一次操作應翻出原先的第十三張，故 J 在第十三張；

此時剩下二張，依序為原先的第五、六張，此時把最上面的三張逐一地放到

最底之後順序為原先的第六、五張，故第十二次操作應翻出原先的第六張，故 Q 在第六張、K 在第五張。
所以這疊牌的順序應為 6、8、4、A、K、Q、7、2、5、10、9、3、J。

牌序	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	十三
				A				2				3	
牌序	二	三	四		五	六	七		八	九	十		一
→			4	A				2	5			3	
牌序	四	五			六	七	八			一	二		三
→	6		4	A			7	2	5			3	
牌序		四			五	六				一	二		三
→	6	8	4	A			7	2	5			3	
牌序					一	二				三	四		五
→	6	8	4	A			7	2	5		9	3	
牌序					二	三				四			一
→	6	8	4	A			7	2	5	10	9	3	
牌序					二	三							一
→	6	8	4	A			7	2	5	10	9	3	J
牌序					一	二							
→	6	8	4	A	K	Q	7	2	5	10	9	3	J

<解法 2> 可逆向思考。

K 為最後翻出之牌，在此之前翻出 Q，故將 Q 放在 K 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 K、Q；再將 J 放到最上面，即在 K 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 J、K、Q；
再將 10 放到最上面，即在 J 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 J、K、Q、10；
再將 9 放到最上面，即在 J 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 K、Q、10、9、J；

再將 8 放到最上面，即在 K 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 10、9、J、8、K、Q；
再將 7 放到最上面，即在 10 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 8、K、Q、7、10、9、J；
再將 6 放到最上面，即在 8 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 10、9、J、6、8、K、Q、7；
再將 5 放到最上面，即在 10 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 K、Q、7、5、10、9、J、6、8；
再將 4 放到最上面，即在 K 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 J、6、8、4、K、Q、7、5、10、9；
再將 3 放到最上面，即在 J 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 5、10、9、3、J、6、8、4、K、Q、7；
再將 2 放到最上面，即在 5 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到這疊牌的最上面，此時這疊牌的順序是 K、Q、7、2、5、10、9、3、J、6、8、4；
最後將 A 放到最上面，即在 K 之上，然後把最下面逐一地數三張牌放到最上面，這疊牌的順序是 6、8、4、A、K、Q、7、2、5、10、9、3、J。

11. 分別在 3x3 的方格表的每個小方格內填入不同的數碼，使得

(1) $\overline{ABC}$ 是 8 的倍數且 $A\neq 0$、$B\neq 0$、$C\neq 0$；
(2) $\overline{DEF}=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$，其中 n 是正整數；
(3) $\overline{GHJ}$ 為三個連續質數的乘積；
(4) $\overline{ADG}$ 是 11 的倍數且 $A\neq 0$、$D\neq 0$、$G\neq 0$；
(5) $\overline{BEH}=2^m$，其中 m 是正整數；
(6) $\overline{CFJ}$ 是 11 的倍數。

A	B	C
D	E	F
G	H	J

請問 $\overline{ABCDEFGHJ}$ 之值為何？

因 $D\neq 0$，故 $\overline{DEF}=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ 為三位數，即 $\overline{DEF}$ 為 5!=120 或 6!=720，因此 $E=2$、$F=0$、$D=1$ 或 7；

因 $B\neq 0$，故 $\overline{BEH}=2^m$ 為三位數，即 $\overline{BEH}$ 為 128、256 或 512。因 $E=2$，故 $\overline{BEH}$ 為 128，即 $B=1$、$H=8$；

因 $\overline{GHJ}$ 為三個連續質數的乘積且 $G\neq 0$，而由 2×3×5＝60、3×5×7＝101、5×7×11＝385、7×11×13＝1001 可知此三個連續質數為 5、7、11 且 $\overline{GHJ}=385$，即 $G=3$、$J=5$；

因 $\overline{CFJ}$ 是 11 的倍數且 $F=0$，故 $C+J=11$，也因此 $C=6$；

若 $D=1$，因 $\overline{ADG}$ 是 11 的倍數，所以 $A+G-D=11$，故 $A=9$，但此時 $\overline{ABC}=916$ 並不是 8 的倍數，故不合；

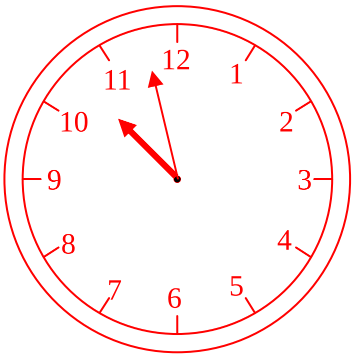
若 $D=7$，因 $\overline{ADG}$ 是 11 的倍數，所以 $A+G-D=0$，故 $A=4$，此時 $\overline{ABC}=416$ 為 8 的倍數，滿足題意。

故 $\overline{ABCDEFGHJ}$ 之值為 416720385。

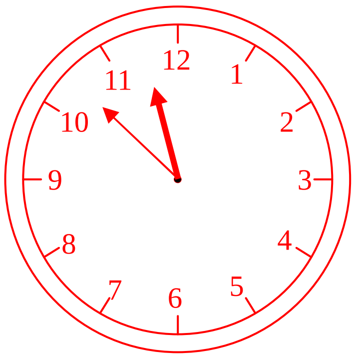
12. 颱風天下午 10 時到 12 時，某國的總統率領所有的內閣閣員視察防颱中心，在總統作簡報時，有位閣員竟然在座位上呼呼大睡。次日當國會議員質詢他時，他辯稱：「我哪有呼呼大睡？您有聽見我呼呼嗎？我只是把眼睛閉起來一下而已！」他又說：「我閉眼前看了一下手錶，當時我手錶的時針與分針所指的位置與睜開眼睛時的位置百分之百精準地在同位置。」原來這位閣員睡醒睜開眼睛時把時針和分針的位置弄反了。請問這位閣員當時”閉了眼睛”多少分鐘？

<解法 1>

分針一分鐘走 360°÷60＝6°、時針一分鐘走 360°÷12÷60＝0.5°。



剛閉眼時



剛睡醒時

由當時時間為下午 10 時到 12 時之間及部長睡醒時弄混了而沒發現可知閣員睡著時與睡醒時手錶的時針與分針兩針不可能都在 10 與 11 之間，也不可能是都在 11 與 12 之間，因此只能是一針在 10 與 11 之間而另一針在 11 與 12 之間。由上圖可知，令閉眼時為 10 時 x 分，睡醒時為 11 時 y 分，則有 $x>y$。

(i) 若將在 10 與 11 之間的針視為時針時，則行走的角度為 $300+0.5x$；若將在 10 與 11 之間的針視為分針時，則行走的角度為 $6y$，即 $300+0.5x=6y$。

(ii) 若將在 11 與 12 之間的針視為時針時，則行走的角度為 $330+0.5y$；若將在 10 與 11 之間的針視為分針時，則行走的角度為 $6x$，即 $330+0.5y=6x$。

由假設可知閣員閉上眼睛的時間為 $60+y-x=60-(x-y)$。由(i)、(ii)可得聯立方程組：

$$\begin{cases} 300+0.5x=6y & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 330+0.5y=6x & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2)式－(1)式： $30+0.5(y-x)=6(x-y)$

$$(x-y)=\frac{60}{13}$$

故閣員閉上眼睛的時間為 $60-\frac{60}{13}=\frac{720}{13}=55\frac{5}{13}$ 分鐘。

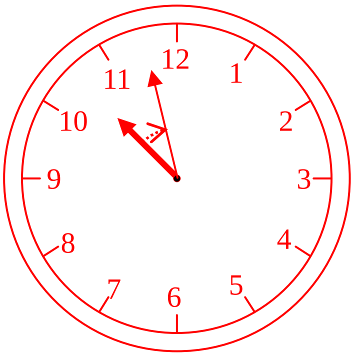
<解法 2>

閣員從剛閉上眼睛到剛睡醒的時針所走的角度+分針所走的角度=360°。

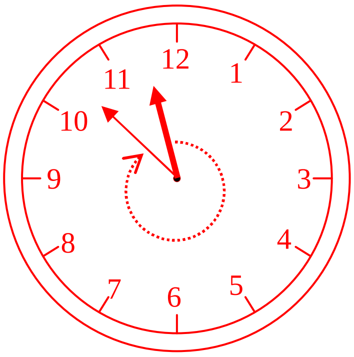
分針一分鐘走 360°÷60＝6°、時針一分鐘走 360°÷12÷60＝0.5°。

兩針所走的時間一樣，故它們共走了

$$360 \div (6+0.5) = \frac{720}{13} = 55\frac{5}{13} \text{ 分鐘。}$$



時針走的角度



分針走的角度