

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

1. 在黑板上有一個大於 1 的整數 n 。小李依照以下方法進行操作：找出黑板上的數之任意一個大於 1 的因數 d ，然後擦去原來的數，並且在黑板寫上 $n+d$ 或 $n-d$ (必須是正整數)。對於任意的 n 值，請問小李是否保證可在有限次操作內使得黑板上出現正整數 2011？(三分)
2. 在 $\triangle ABC$ 中，點 Q 為 AC 邊的中點，點 P 為 AB 邊上之點且 $AP=2PB$ 。已知 $CP=2PQ$ ，請證明 $\triangle ABC$ 為直角三角形。(四分)
3. 有一座天平，它的一套砝碼之質量都兩兩互不相同。已知將任意兩枚砝碼放在天平的左秤盤上，一定可以從剩下的砝碼中選出一些砝碼放在右秤盤上，而使得天平平衡。請問這一套砝碼最少有多少枚？(五分)
4. 一個有 2012 列 k 行 ($k > 2$) 的棋盤，初始時在最左行上的某個小方格內已經放有一枚棋子，甲、乙兩位玩家輪流操作這枚棋子。每一次操作，玩家可以將這枚棋子向右、向上或向下移動一格到棋子不曾停留過的小方格上。當任何一位玩家將棋子移入最右行時則遊戲結束。本遊戲有兩種版本：版本 A，首先將棋子移入最右行者為贏家；版本 B，首先將棋子移入最右行者為輸家。兩位玩家事先都不知道輸贏規定是版本 A 或版本 B，直到有人將棋子移入從右邊算起第二行時才公布輸贏的版本。如果甲先操作，請問哪一位玩家有必勝的策略？(六分)
5. 已知 $0 < a, b, c, d < 1$ 且 $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 。請證明：
$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1$$
 (六分)
6. 有一輛汽車沿著一條筆直的公路以每小時 60 km 的勻速行駛。在公路一旁有一道長為 100 m 且與公路平行的圍籬，每一秒鐘駕駛都度量圍籬的視角一次。請證明這位駕駛所度量的角之總和小於 1100° 。(七分)
7. 將一個正 45 邊形的頂點分別塗上紅色、黃色、綠色，每種顏色各塗 15 個頂點。請證明恆可以從每一種同顏色的頂點中，找出三個點構成一個三角形，使得這三種顏色所構成的三個三角形都互相全等。(九分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2011 秋季賽 國中組 高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

8. 在黑板上有一個大於 1 的整數 n 。小李依照以下方法進行操作：找出黑板上的數之任意一個大於 1 的因數 d ，然後擦去原來的數，並且在黑板寫上 $n+d$ 或 $n-d$ (必須是正整數)。對於任意的 n 值，請問小李是否保證可在有限次操作內使得黑板上出現正整數 2011？(三分)
9. 在 $\triangle ABC$ 中，點 Q 為 AC 邊的中點，點 P 為 AB 邊上之點且 $AP=2PB$ 。已知 $CP=2PQ$ ，請證明 $\triangle ABC$ 為直角三角形。(四分)
10. 有一座天平，它的一套砝碼之質量都兩兩互不相同。已知將任意兩枚砝碼放在天平的左秤盤上，一定可以從剩下的砝碼中選出一些砝碼放在右秤盤上，而使得天平平衡。請問這一套砝碼最少有多少枚？(五分)
11. 一個有 2012 列 k 行 ($k > 2$) 的棋盤，初始時在最左行上的某個小方格內已經放有一枚棋子，甲、乙兩位玩家輪流操作這枚棋子。每一次操作，玩家可以將這枚棋子向右、向上或向下移動一格到棋子不曾停留過的小方格上。當任何一位玩家將棋子移入最右行時則遊戲結束。本遊戲有兩種版本：版本 A，首先將棋子移入最右行者為贏家；版本 B，首先將棋子移入最右行者為輸家。兩位玩家事先都不知道輸贏規定是版本 A 或版本 B，直到有人將棋子移入從右邊算起第二行時才公布輸贏的版本。如果甲先操作，請問哪一位玩家有必勝的策略？(六分)
12. 已知 $0 < a, b, c, d < 1$ 且 $abcd = (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$ 。請證明：
- $$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1 \quad (\text{六分})$$
13. 有一輛汽車沿著一條筆直的公路以每小時 60 km 的勻速行駛。在公路一旁有一道長為 100 m 且與公路平行的圍籬，每一秒鐘駕駛都度量圍籬的視角一次。請證明這位駕駛所度量的角之總和小於 1100° 。(七分)
14. 將一個正 45 邊形的頂點分別塗上紅色、黃色、綠色，每種顏色各塗 15 個頂點。請證明恆可以從每一種同顏色的頂點中，找出三個點構成一個三角形，使得這三種顏色所構成的三個三角形都互相全等。(九分)

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》