

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

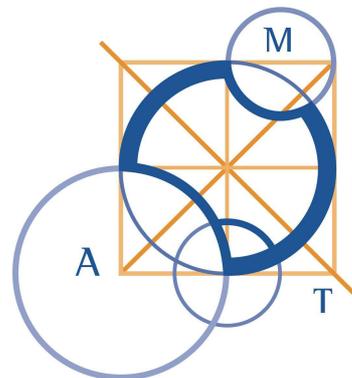
Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

AUSTRALIAN MATHEMATICS COMPETITION

AN ACTIVITY OF THE AUSTRALIAN MATHEMATICS TRUST



SATURDAY 7 AUGUST 2010

SENIOR DIVISION COMPETITION PAPER

高級卷（11—12 年級）

考試時間：75 分鐘

注意事項

一般規定

1. 未獲監考老師許可之前不可翻開此測驗題本。
2. 各種通訊器材一律不得攜入考場，不准使用電子計算器、計算尺、對數表、數學公式等計算器具。作答時可使用直尺與圓規，以及兩面全空白的草稿紙。
3. 題目所提供之圖形只是示意圖，不一定精準。
4. 最前 25 題為選擇題，每題有五個選項。最後 5 題要求填入的答案為 0 至 999 的正整數。題目一般而言是依照越來越難的順序安排，對於錯誤的答案不會倒扣分數。
5. 本活動是數學競賽而不同於學校測驗，別期望每道題目都會作。考生只與同地區同年級的其他考生評比，因此不同年級的考生作答相同的試卷將不作評比。
6. 請依照監考老師指示，謹慎地在答案卡上填寫您的基本資料。若因填寫錯誤或不詳所造成之後果由學生自行負責。
7. 進入試場後，須等待監考老師宣佈開始作答後，才可以打開題本進行答題。

作答須知

1. 限用 B 或 2B 鉛筆填寫答案。
2. 請用 B 或 2B 鉛筆在答案卡上將您認為正確選項的圓圈塗滿（不是在題本上）。
3. 您的答案卡將由電腦閱卷，為避免電腦誤判，請不要在答案卡上其他任何地方塗劃任何記號。填寫答案卡時，若需要修改，可使用軟性橡皮小心擦拭，並確定答案卡上無殘留痕跡。

特別約定

為確保競賽之公平性及認證成績優異學生，AMC 主辦單位保留要求考生重測之權利。

高級卷(11-12 年級)

1-10 題，每題 3 分

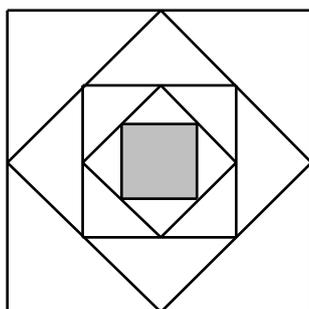
1. 算式 $2010 - 20.10$ 等於
(A) 1990.09 (B) 1990.9 (C) 1989.09 (D) 1989.9 (E) 1998.9
-

2. 若 $m=3$ 且 $n=-\frac{3}{5}$ ，則 $\frac{m}{n}$ 等於
(A) -5 (B) 5 (C) $-\frac{9}{5}$ (D) $-\frac{5}{3}$ (E) 15
-

3. 線段 PQ 的中點是 $M(-4, 6)$ 。已知點 Q 的座標是 $(10, 12)$ ，請問點 P 的座標是什麼？
(A) $(-18, 0)$ (B) $(-18, 18)$ (C) $(-10, 0)$ (D) $(3, 9)$ (E) $(3, 18)$
-

4. 請問 63 是下列哪一個數的 87.5%？
(A) 45 (B) 70 (C) 72 (D) 74 (E) 75
-

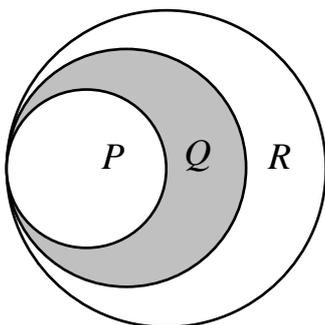
5. 請問圖中陰影部分的正方形面積佔整個大正方形面積的百分比為何？



- (A) 6.25% (B) 10% (C) 12.5% (D) 16% (E) 25%
-

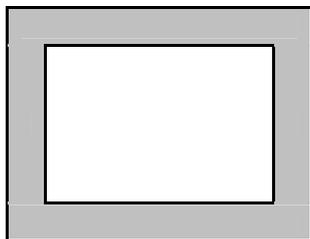
6. 有七個正整數 8、10、24、28、23、9、 x ，它們的中位數與平均數都是 x 。請問 x 之值是什麼？
(A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21 (E) 23
-

7. 圓 P 之半徑等於圓 Q 之半徑的 $\frac{2}{3}$ ，而圓 Q 之半徑等於圓 R 之半徑的 $\frac{3}{4}$ 。



請問上圖中塗上陰影部分的面積佔圓 R 面積的幾分之幾？

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{5}{9}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{16}$ (E) $\frac{5}{16}$
-
8. 連續投擲一枚硬幣五次，請問沒有連續出現五次反面的機率是多少？
- (A) $\frac{15}{16}$ (B) $\frac{27}{32}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{9}{10}$ (E) $\frac{31}{32}$
-
9. 將一個矩形分割為 x 行 y 列個全等的小正方形。它的外圍塗上陰影部分都是佔 1 個正方形的寬度，且其面積佔整個矩形面積的一半。



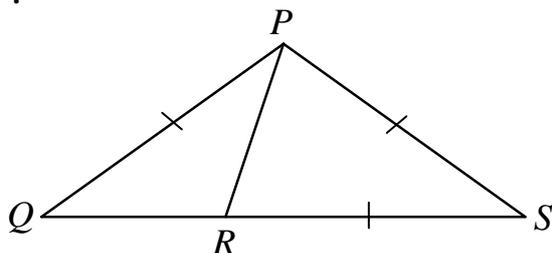
請問 x 與 y 之和可能是多少？

- (A) 17 (B) 20 (C) 18 (D) 19 (E) 16
-
10. 將五個數 x^3 、 x^2 、 x 、 $-x$ 、 \sqrt{x} 依照從小到大的順序排列，其中 x 之值為 $0 < x < 1$ ，請問位居中間的數是哪一個？
- (A) x^3 (B) x^2 (C) x (D) $-x$ (E) \sqrt{x}

11-20 題，每題 4 分

11. 對於所有的 x 值，算式 $\frac{7^{3x} + 7^{2x}}{7^{2x} + 7^x}$ 等於？
- (A) 49 (B) 7^{2x} (C) 7 (D) 7^x (E) 1

12. 點 R 在三角形 PQS 的 QS 邊上，已知 $PQ = PS = SR$ 且 $\angle QRP = \angle QPS$ 。請問 $\angle PSR$ 等於多少度？



- (A) 30 (B) 36 (C) 45 (D) 60 (E) 70

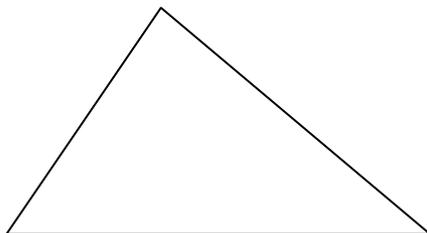
13. 若 $\frac{3a+4b}{2a-2b} = 5$ ，則 $\frac{a^2+2b^2}{ab}$ 等於

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14. 算式 $123456785 \times 123456782 - 123456783 \times 123456784$ 等於

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 以上皆非

15. 類似下圖的三角形之每條邊長都是互不相同的質數，且它的周長也是個質數。



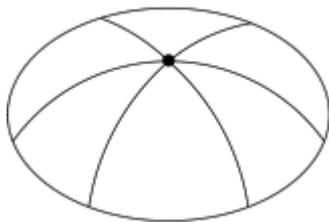
請問符合上述條件的三角形中最小的周長是多少？

- (A) 11 (B) 17 (C) 19 (D) 23 (E) 29

16. 有一個五位數 $\overline{a986b}$ 可被 72 整除，其中 a 是萬位數、 b 是個位數。請問 $a+b$ 之值是什麼？

- (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 15

17. 一頂帽子由 6 片相同尺寸相同形狀的元件組成。



若每片元件的表面可上塗金色或棕色，請問共可做出多少種不同的帽子？

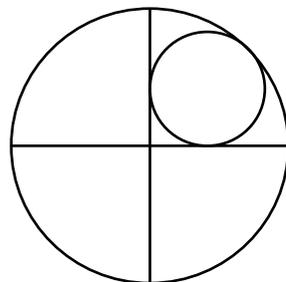
- (A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 18 (E) 20

18. 對於所有正整數 n ，定義 $\text{Snap}(n)=2n$ ，當 n 為偶數；定義 $\text{Snap}(n)=3n$ ，當 n 為奇數。若 p 為大於 2 的質數，請問 $\text{Snap}(\text{Snap}(p-1)-p)$ 之值是什麼？

- (A) $p-2$ (B) $2p-2$ (C) $2(p-2)$
 (D) $3p-2$ (E) $3(p-2)$

19. 一個小圓內切於一個四分之一大圓。請問這個小圓的面積與四分之一大圓的面積之比是什麼？

- (A) $2:3$ (B) $4:5$ (C) $3:(2+\sqrt{3})$
 (D) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ (E) $4:(3+2\sqrt{2})$



20. 定義運算 \otimes 為 $a \otimes b = a + b^2$ 。已知 $a > 0$ 且 $(a \otimes a) \otimes a = a \otimes (a \otimes a)$ ，則 a 等於

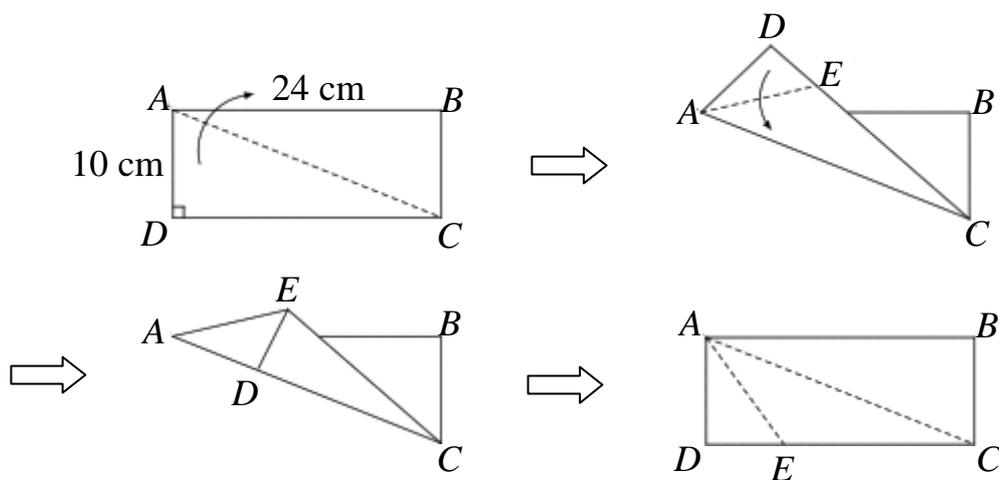
- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{2}-1$ (D) $\sqrt{2}+1$ (E) 2

21-25 題，每題 5 分

21. 一個超級階乘 $1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 12!$ 可以表示成一個階乘與一個完全平方數的乘積，即 $m! \times n^2$ 。請問 m 之值是什麼？

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

22. 下圖所示矩形紙張的長 $AB=24\text{cm}$ 、寬 $AD=10\text{cm}$ 。將它沿著對角線 AC 翻摺，然後將三角形 ACD 沿著直線 AE 翻摺使得 AD 與 AC 重合，然後將紙張展開。



請問線段 DE 的長度為多少 cm ？

- (A) $\frac{13}{2}$ (B) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{20}{3}$ (D) 8 (E) 12

23. 使用數碼 1 和 0 可以寫出 16 種不同的四位數串，其中三個數串為 1010、0100、1001，這三個數串都可以視為是 101001 的子數串。有一個十九位數 1 和 0 的數串，它包含有長度為 4 的 16 個子數串各恰一個。已知這個數串以 1111 開頭，請問它的最後四碼是什麼？
 (A) 1110 (B) 0000 (C) 0110 (D) 1010 (E) 0111
-
24. 將 n 個點任意放置在一個邊長為 16 單位長的正立方體內部或表面上，使得無論怎麼放至少都有其中兩個點的距離小於 14 單位長。請問最小的 n 值是什麼？
 (A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13
-
25. 小羅站在森林的正中央，以他所站的點作為原點，其它座標上的每個整數點上都有一棵樹幹半徑都相等的樹。從他所站的位置，他無法看到任何方向第二排以後的樹，此即，他無法看到任何兩個分量都大於 2 的座標上的樹。請問這些樹的樹幹半徑最小是多少？
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (E) $\frac{1}{2(\sqrt{13}-3)}$
-

問題 26~30 的答案為 000~999 之間的整數，
 請將答案填在答案卡上對應的位置。

第 26 題佔 6 分，第 27 題佔 7 分，第 28 題佔 8 分，
 第 29 題佔 9 分，第 30 題佔 10 分。

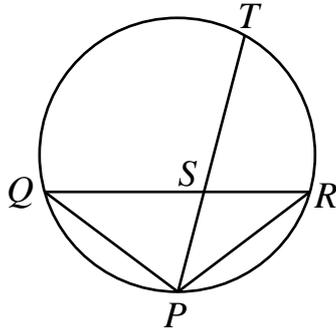
26. 已知 $m+n=11$ 且 $m^2+n^2=99$ 。請問 m^3+n^3 之值是什麼？
-

27. 將一個四位數減去一個三位數，所得的差也是一個三位數。

$$\square\square\square\square - \square\square\square = \square\square\square$$

且這些數的十個數碼全都互不相同。請問所得的差最小可能值是什麼？

28. 在三角形 PQR 中， $PQ=PR=40$ cm，點 S 在線段 QR 上使得 $PS=25$ cm。延長線段 PS 交 PQR 的外接圓於點 T 。



請問線段 PT 的長度是多少 cm？

29. 給定多項式 f 。我們知道它的所有係數是非負整數且 $f(1)=6$ 、 $f(7)=3438$ 。請問 $f(3)$ 之值是什麼？

30. 在夢幻島上有許多小鎮，小鎮間有一些道路相連。每個小鎮都有三條道路：一條紅線、一條黃線、一條藍線與其它三個不同的小鎮相連，任兩條路除了在端點以外沒有其它的交點。如果您從任何一個小鎮開始依照紅線、黃線道路交錯(RYRY...)行駛，則您只要行駛超過六個不同的道路就將能回到原來出發的小鎮。事實上，依照 RYRYRY 的方式行駛就一定會回到原來出發的小鎮。同樣地，如果依照黃線、藍線道路交錯行駛六個不同的路段(YBYBYB)也能回到原來出發的小鎮。另一方面，依照紅線、藍線道路交錯行駛四個不同的路段(RBRB)也能夠回到原來出發的小鎮。請問夢幻島上共有多少個小鎮？
