International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2013 秋季賽　高中組　高級卷

※每題必須詳細寫下證明及理由，只寫答案不一定有分數。

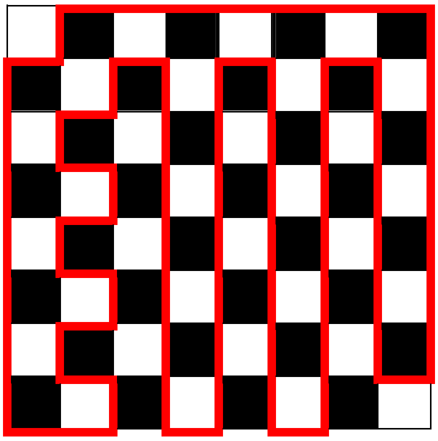
1. 平面上有一張黑白相間塗色的 8×8 方格表，小丁任意選擇在其中一個小方格內部的一個點。每一回合，小王在此方格表內任意畫一個多邊形(可以是凹的，但不可以自交)，小丁接著會誠實告知小王所選的點在此多邊形的內部或外部。為保證能確定知道小丁所選的點在白色或黑色的小方格內，請問小王至少要進行多少回合？（五分）

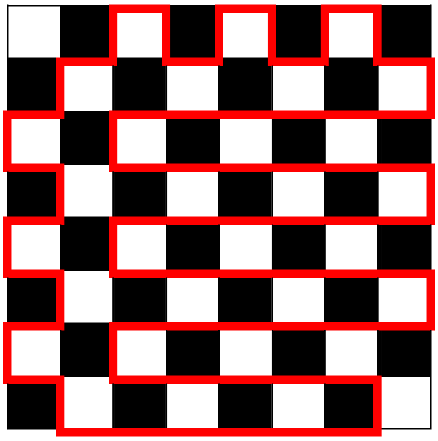
【參考解法】

若小王所畫的多邊形只包括某一種顏色的所有方格，則此多邊形必定自交，故小王只進行一回合不可能確定知道小丁所選的點在白色或黑色的小方格內。

【多邊形畫法一】

如圖所示之多邊形畫法，可在二回合確定所選的點在白色或黑色的小方格內。

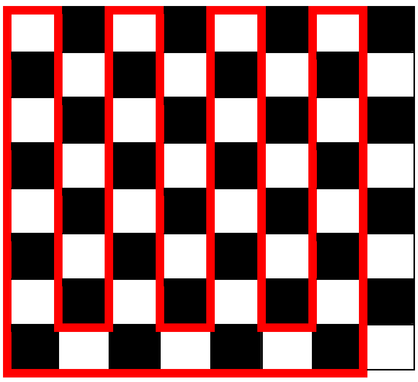




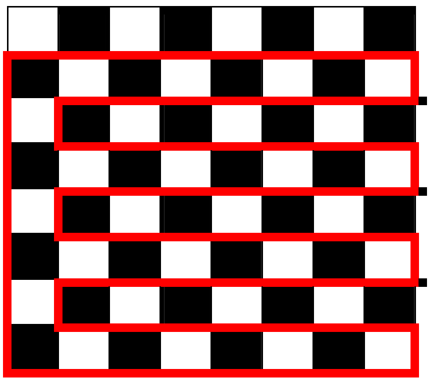
若所選的點在白色方格內，則會同時在這兩個回合所畫出的多邊形的內部或同時在這兩個多邊形的外部；若所選的點在黑色方格內，則會在這兩個回合所畫出的多邊形其中一個的內部且在另一個多邊形的外部。

【多邊形畫法二】

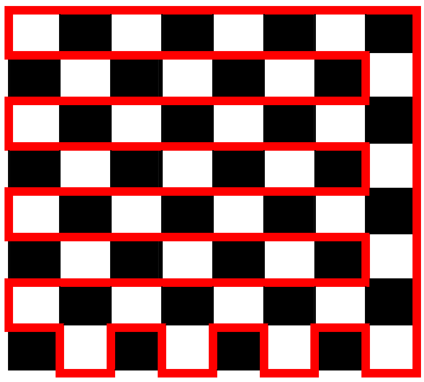
如圖所示之多邊形畫法，可在二回合確定所選的點在白色或黑色的小方格內。



多邊形 1



多邊形 2a



多邊形 2b

第一回合先畫多邊形 1。若所選的點落在多邊形 1 的外部，則該點一定落在由左

至右第 2、4、6、8 行上，接著第二回合畫多邊形 2a，透過落在多邊形 2a 的內部或外部便可判斷出 所選的點在白色或黑色的小方格內；若所選的點落在多邊形 1 的內部，則該點一定落在由左至右第 1、3、5、7 行上或由下至上第 1 列上，接著畫多邊形 2b，可知多邊形 2b 包含由下至上的第 2、4、6、8 列及第 1 列內所有的白色小方格。因此若落在多邊形 2b 的內部，則所選的點在白色的小方格內；若落在多邊形 2b 的外部，則所選的點在白色的小方格內。

【評分標準】

全對或全錯，無部分分數。

2. 請找出使得以下敘述恆為真的所有正整數 n：

   對於任意二個 n 階的多項式 $P(x)$ 與 $Q(x)$，存在單項式 ax^k 與 bx^l，其中 a 與 b 為實數、k 與 l 為正整數且 $0 \le k$、$l \le n$，使得 $P(x)+ax^k$ 與 $Q(x)+bx^l$ 的圖形沒有交點。（六分）

【參考解法一】

若 n 為偶數。則令 $R(x)=P(x)-Q(x)$，故可知此多項式的次數至多為 n，因此至多有 $n+1$ 個係數。再令 M 為一個大於所有係數之絕對值的正實數，接著可取 $k=n$、$l=0$、$a=(n+1)M$ 及 $b=-(n+1)M$。現在我們來驗證 $P(x)+(n+1)Mx^n$ 與 $Q(x)-(n+1)M$ 的圖形沒有交點。這兩個多項式的差為 $R(x)+(n+1)M(x^n+1)$，因此我們可將這一個多項式看成針對 $R(x)$ 的每一項 cx^h，都加上 $M(x^n+1)$。現令 x 為實數。若 $|x|\ge 1$，則有 $cx^h+M(x^n+1)\ge cx^h+M|x|^h+M>M>0$；若 $|x|<1$，則有 $cx^h+M(x^n+1)\ge cx^h+Mx^n+M>cx^h+Mx^n+M|x|^h>Mx^n>0$。故現在可以知到 $P(x)+(n+1)Mx^n$ 與 $Q(x)-(n+1)M$ 這兩個多項式的差 $R(x)+(n+1)M(x^n+1)$ 恆不為 0，即 $P(x)+(n+1)Mx^n$ 與 $Q(x)-(n+1)M$ 的圖形沒有交點。

若 n 為奇數。則當 $n=1$ 時，可取 $k=1$、$l=0$，再取 a、b 使得 $P(x)+ax-Q(x)-b=1$，因此 $P(x)+ax$ 與 $Q(x)+b$ 的圖形沒有交點。而當奇數 $n>1$ 時，若取 $P(x)=2x^n$、$Q(x)=x^n+x^{n-2}$，並考慮 $P'(x)=P(x)+ax^k$、$Q'(x)=Q(x)+bx^l$，則當 k、l 都不為 0 的時候，有 $P'(0)=0=Q'(0)$，即有交點；當 k、l 都不為 n 的時候，$P'(x)-Q'(x)$ 為一個次數為奇數 n 的多項式，因此有一個實數根 r，即 $P'(r)=Q'(r)$，即有交點；當 k、l 其中一個為 0 而另一個為 n 的時候，$P'(x)-Q'(x)$ 為一個次數為 n 或 $n-2$ 的多項式，即此多項式的次數為奇數，因此會有一個實數根 r，即 $P'(r)=Q'(r)$，即有交點。

故知當 n 為偶數或 $n=1$ 時，題目之敘述恆為真。

【參考解法二】

可將此題改寫成：「對於任意的多項式 $R(x)$，其中 $\deg R(x)\le n$，存在單項式 ax^k 與 bx^l，其中 a 與 b 為實數、k 與 l 為正整數且 $0\le k<l\le n$，使得 $R(x)+ax^k+bx^l$ 恆沒有零根。」

令 n 為奇數且 $n\ge 3$。則對於 $R(x)=x^n+x$ 時，可取 $bx^l=-x^n$ (否則我們會得到一個有零根的奇次多項式)。因此 $R(x)-x^n=x$ 且：

若$k\geq 1$時，當$x=0$可得$R(x)+bx^l+ax^k$為 0；

若$k=1$時，可推得$x+a$有零根。

當$n=1$時，總可使$R(x)+bx+a\equiv 1$恆不為零，即沒有零根。

令 n 為偶數。則可加上一個次數為 n 的單項式使得首項係數為正，且新的多項式會有一個下界 M。接著加上一個常數$1-M$，則新的多項式之最小值為 1，即沒有零根。

故知當 n 為偶數或$n=1$時，題目之敘述恆為真。

【評分標準】

證明$n=1$的情況，$\frac{1}{7}$；

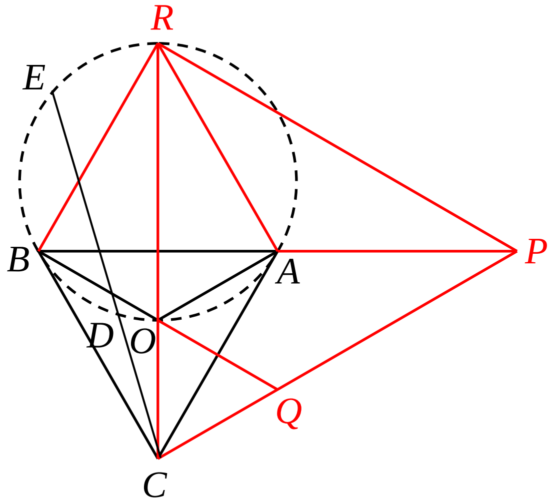
證明 n 為偶數的情況，$\frac{3}{7}$；

證明 n 為奇數且$n\geq 3$的情況，$\frac{3}{7}$。

3. 令等邊三角形 ABC 之中心為 O 點。一條通過點 C 的直線交△AOB 的外接圓於 D、E 兩點。請證明點 A、O 與線段 BD、BE 的中點四點共圓。(六分)

【參考解法一】

如圖，延長 BA 至點 P 使得 $BA=AP$，連結 CP，延長 BO 交 CP 於點 Q，連結 CO 並延長後，交△ABO 的外接圓於點 R，連結 AR、BR。



因可知$\angle AOB=120°$，故得$\angle ARB=60°$；也可知 OR 為圓內一條垂直 AB 的直徑，因此可推知 $RA=RB$，故△ABR 為正三角形。

接著由 $AR=AB=AC=AP$，便可以推知$\angle BCP=90°=\angle BRP$，

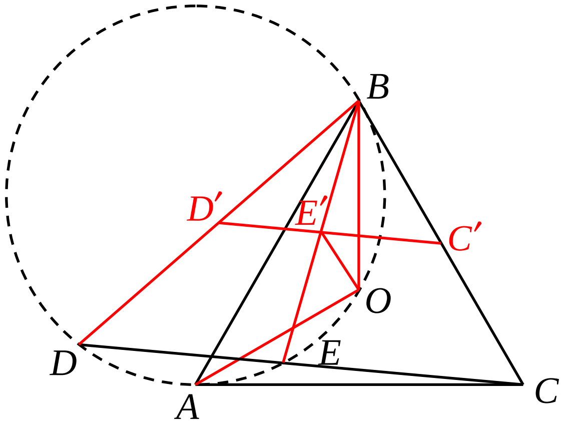
因此$\angle RCP=60°=\angle CRP$，故△$CRP$ 也是正三角形。

而因$\angle COQ=\angle BOR=60°$、$\angle OCQ=60°$，故△$COQ$ 也是正三角形。

由以上所得之資訊，可推知 $OQ=OC=OB$ 且$CQ\cdot CP=CO\cdot CR$。再因 OR 與 DE 都是△ABO 的外接圓的弦，故知$CQ\cdot CP=CD\cdot CE$。因此可得知 P、Q、D、E 都在同一個圓上。若將此圓的半徑縮小$\frac{1}{2}$並往點 B 移動，則新圓必通過點 A、O 與線段 BD、BE 的中點。

【參考解法二】

如圖，令C'為BC的中點且E在C、D之間。再令E'為BE的中點、D'為BD的中點、，則可知在三角形CBD中，E'會落在中點連線$C'D'$上。



可知在正三角形ABC中，A、O、C'三點共線，故知$\angle ABC$恰為弧AOB的一半，因此BC是三角形AOB的外接圓的切線。故可得：

$$C'E'\bullet C'D'=\frac{1}{4}CE\bullet CD=\frac{1}{4}CB^2=C'B^2=C'O\bullet C'A$$

由圓冪定理中的割線定理可知若四邊形$AOE'D'$共圓，則此等式成立。而此定理的逆定理也成立，故得證。

【評分標準】

證明BC、BD、BE的中點三點共線，$\frac{2}{7}$；

完整證明，$\frac{7}{7}$。

4. 請問每個整數是否可表示為有限多個不同整數的立方之和？（七分）

【參考解法】

已知$0=0^3$、$1=1^3$。現驗證對於每一個正整數$n\geq 2$最多可寫成五個不同整數的立方和，接著便可據此推出對於每一個負整數最多可寫成五個不同整數的立方和。

當$n\geq 2$，觀察$n^9-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1)$，可知 n 或$n-1$中有一數為偶數，以及n、$n-1$、$n+1$中有一數為3的倍數。可知當$n\equiv 0(\bmod 5)$時，n可被5整除；當$n\equiv 1(\bmod\ 5)$時，$n-1$可被5整除；當$n\equiv 2(\bmod\ 5)$時，n^2+1可被5整除；當$n\equiv 3(\bmod 5)$時，n^2+1可被5整除；當$n\equiv 4(\bmod 5)$時，$n+1$可被5整除。因此知n^9-n必為2、3、5的公倍數，故可假設$n^9-n=30k$，其中k為正整數。因$n\geq 2$，故知$30k\geq 2^9-2=510$，所以$k\geq 17$。

因$n=n^9-30k=(n^3)^3+(k+2)^3+(k-2)^3+(-k+3)^3+(-k-3)^3$，由$k\geq 17$知前三項為正數、末二項恆為負數。可知$-k+3>-k-3$、$k+2>k-2$，最後再由$n^6k\geq 64k>2n+60k$可推得$n^3=\dfrac{n+30k}{n^6}<\dfrac{k}{2}<k-2$，故知這五個立方數都是相異的，得證。

【參考解法二】

已知 $g(n)=(n+7)^3-(n+6)^3-(n+5)^3+(n+4)^3-(n+3)^3+(n+2)^3+(n+1)^3-n^3$ 之值恆等於 48。現令 $f(k)=(48k+1)^3$，則 $f(k)\equiv 1 \pmod{48}$。

而對於的任意整數 $S=48q+r$，其中 q 為整數、r 為正整數且 $0\le r<48$，可令 $f(1)+f(2)+\cdots+f(r)=48m+r$，則

$$\begin{aligned}S &= f(1)+f(2)+\cdots+f(r)-g(n_1)-g(n_2)-\cdots-g(n_{m-q})\\ &=48q+r\end{aligned}$$

因為 n_1、n_2、…、n_{m-q} 可以任意選擇，只要讓所有這些整數互相相異即可。

【評分標準】

(i) 證明有無窮多組立方和為常數 a 或是 $ax+b$，$\frac{4}{7}$；

完成證明，$\frac{3}{7}$。

(ii) 構造出 3 組立方和為 1、2、4 且其中不存在 2 數相除為 2 的冪次，$\frac{4}{7}$；

完成證明，$\frac{3}{7}$。

5. 是否存在二個值域為整數之函數 f、g 使得對於任意整數 x 都滿足：

(a) $f(f(x))=x$、$g(g(x))=x$、$f(g(x))>x$、$g(f(x))>x$？（三分）

(b) $f(f(x))<x$、$g(g(x))<x$、$f(g(x))>x$、$g(f(x))>x$（五分）

【參考解法】

(a) 不存在，否則 $x=g(g(x))=g(f(f(g(x))))>f(g(x))>x$，矛盾。

(b) 存在，可令

$$f(x)=\begin{cases}2|x|+2 & \text{當 } x \text{ 為奇數}\\ -(2|x|+2) & \text{當 } x \text{ 為偶數}\end{cases}\text{、}g(x)=\begin{cases}-(2|x|+1) & \text{當 } x \text{ 為奇數}\\ 2|x|+1 & \text{當 } x \text{ 為偶數}\end{cases}$$

此時無論 x 是偶數或奇數，$|f(x)|$ 恆為偶數 $2|x|+2$ 且 $|g(x)|$ 恆為偶數 $2|x|+1$。

因此有：

$$\begin{aligned}f(f(x))&=-(2(2|x|+2)+2)=-4|x|-6<x\\ g(f(x))&=2(2|x|+2)+1=4|x|+5>x\\ g(g(x))&=-(2(2|x|+1)+1)=-4|x|-3<x\\ f(g(x))&=2(2|x|+1)+2=4|x|+4>x\end{aligned}$$

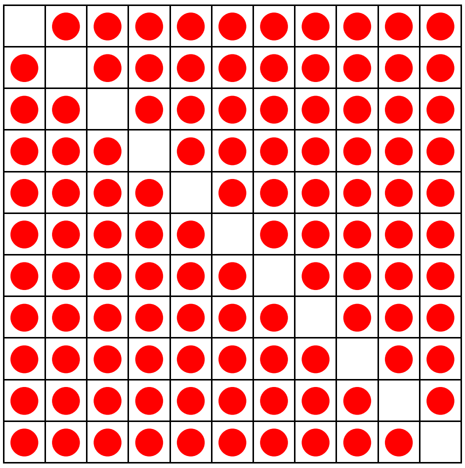
【評分標準】

全對或全錯，無部分分數。

6. 在桌上有 11 堆石子，每堆各 10 枚。<u>小皮</u>與<u>小貝</u>進行以下遊戲：他們輪流從中取石子，規定<u>小皮</u>每次只能從同一堆中取 1、2 或 3 枚石子，而<u>小貝</u>只能從 1、2 或 3 堆中各取一枚。<u>小皮</u>先拿，拿到最後一枚石子者勝。無論對手如何應對，請問誰有必勝的策略？（九分）

【參考解法一】

將這 11 堆的 110 枚石子如圖所示之方式放在 11×11 的方格表內，其中每一行代表一堆。可知小皮一定是從同一行中取石子而小貝一定是從不同行中各取一枚石子。小貝可採取的策略為以空白的主對角線為對稱軸，取出與小皮所取出的石子位置對稱的位置上的石子。因沒有石子同時位在每一列與跟它對稱的行上，因此小貝一定可以依此策略取走對應的石子。因石子數共有偶數個，故知此策略為小貝的必勝策略。



【參考解法二】

不妨將這 11 堆的 110 枚石子如下所示之方式標記：

A 堆：	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
B 堆：	00	11	12	13	14	15	16	17	18	19
C 堆：	01	11	22	23	24	25	26	27	28	29
D 堆：	02	12	22	33	34	35	36	37	38	39
E 堆：	03	13	23	33	44	45	46	47	48	49
F 堆：	04	14	24	34	44	55	56	57	58	59
G 堆：	05	15	25	35	45	55	66	67	68	69
H 堆：	06	16	26	36	46	56	66	77	78	79
I 堆：	07	17	27	37	47	57	67	77	88	89
J 堆：	08	18	28	38	48	58	68	78	88	99
K 堆：	09	19	29	39	49	59	69	79	89	99

注意到若有兩枚石子有相同的號碼，則這兩枚石子必分別在不同的石子堆之中，且若有兩枚石子的號碼分別與在同一堆的兩枚石子號碼相同，則這兩枚石子必在不同堆中。此時無論小皮如何取石子，小貝只要取其他堆中與小皮所取的石子相同編號的石子，便可保證小貝可取到最後一枚石子而獲勝。

【評分標準】

有略為修改後可行之策略，$\frac{3}{7}$；

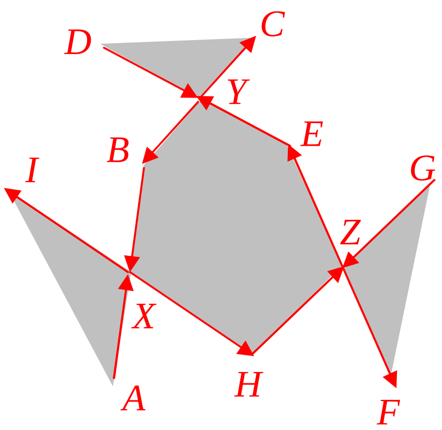
說明策略必勝，$\frac{4}{7}$。

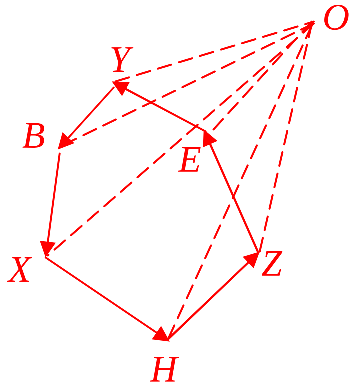
7. 平面上有一封閉的多邊形，它的每一個頂點都恰只有兩條邊在此相交，且每一條邊恰有一個內點為這條邊與另一條邊的交點。請問是否可能每一條邊都被這樣的交點平分？（十四分）

【參考解法】

我們先證明一個初步的結果：一個只有簡單自交的封閉多邊形將平面分割為一個無限大的區域及數個小多邊形區域，則我們可利用黑白相間塗色的方式使有共同邊的區域顏色都不相同。假設此多邊形沒有垂直線段，對於任何一個區域

R，可在其內部找一點 Q，以點 Q 為端點垂直往上作一條射線。若這條射線與多邊形相交奇數次，則我們將區域 R 塗上黑色，否則便塗上白色。可知點 Q 的位置與塗色的結果是不相關的，這是因為如果在 R 的內部任意左右移動 Q 點，則射線與多邊形的相交次數只會在經過頂點時改變，並且其次數變化為±2，而如果在 R 的內部任意上下移動 Q 點，則射線與多邊形的相交次數不會改變。可知此塗色方式是滿足所要求的，這是因為當 Q 點上下垂直移動至另一個區域時，射線與多邊形的相交次數變化為±1(即使當射線經過多邊形的自交點時，這個數仍不會改變)。故我們已驗證了這一個初步的結果。特別地，若使無限大的區域塗上白色時，則所有塗上黑色的區域都是小多邊形區域。





如上左圖所示，此為經過塗色後的部分圖形，其中線段 AB 與 HI 相交於點 X、線段 BC 與 DE 相交於點 Y、線段 EF 與 GH 相交於點 Z，而陰影區域即為塗上黑色的區域。可知每將一條線段平分便從白色區域內分割出一個黑色區域。給予這些半線段固定方向使得黑色區域恆在其左側而白色區域恆在其右側。接著在白色的無限大區域內選擇一點 O，且點 O 不在任何一條線段的延長線上。令$[P]$表示區域 P 的面積。對於一條半線段 MN，定義其定向面積為：若從 O 看過去，MN 為逆時鐘方向時，則其面積取$[OMN]$，否則便取$-[OMN]$。如上右圖所示，這六條半線段所對應的定向面積為：

$$[OBX]+[OXH]+[OHZ]-[OZE]-[OEY]+[OYB]=[BXHZEY]>0\text{ 。}$$

因為所有黑色區域面積的總和為正，及所有半線段都恰是一個黑色區域的一條邊，因此所有半線段的定向面積之總和必為正。現同時考慮所有的半線段。可知每一條線段都被切為方向相反的兩條半線段。若每一條線段都可被自交點所平分，則所有半線段的定向面積之總和必為 0，矛盾。

【評分標準】

全對或全錯，無部分分數。

《成績是取最高得分三題的總和，考試時間五小時。》