# 芝　諾

芝諾 (埃利亞的) (Zeno of Elea) 約公元前 490 年生於義大利半島南部的埃利亞；約公元前 425 年卒。數學、哲學。

芝諾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Zeno_of_Elea.html

# 芝　諾

周 煥 山

(江蘇教育學院)

芝諾 (埃利亞的) (Zeno of Elea) 約公元前 490 年生於義大利半島南部的埃利亞； 約公元前 425 年卒。 數學、 哲學。

芝諾生活在古代希臘的埃利亞城邦。 他是埃利亞學派的著名哲學家巴門尼德 (Parmenides) 的學生和朋友。 關於他的生平， 缺少可靠的文字記載。 柏拉圖在他的對話《巴門尼德》篇中， 記敘芝諾和巴門尼德於公元前五世紀中葉去雅典的一次訪問。 其中說：“巴門尼德年事已高， 約六十五歲； 頭髮很白， 但儀表堂堂。 那時芝諾約四十歲， 身材魁梧而美觀， 人家說他已變成巴門尼德所鍾愛的了。” 按照以後的希臘著作家們的意見， 這次訪問乃是柏拉圖的虛構然而柏拉圖在書中記述的芝諾的觀點， 卻被普遍認爲是相當準確的。 據信芝諾爲巴門尼德的 “存在論” 辯護。 但是不像他的老師那樣企圖從正面去證明存在是 “一” 不是 “多”， 是 “靜” 不是 “動”， 他常常用歸謬法從反面去證明：“如果事物是多數的， 將要比是 ‘一’ 的假設得出更可笑的結果。” 他用同樣的方法， 巧妙地構想出一些關於運動的論點。 他的這些議論， 就是所謂 “芝諾悖論”。 芝諾有一本著作《論自然》。 在柏拉圖的《巴門尼德》篇中， 當芝諾談到自己的著作時曾說：“由於青年時的好勝著成此篇， 著成後， 別人即將它竊去， 以致我不能決斷， 是否應當讓它問世。” 公元五世紀的評論家普羅克洛斯 (Proclus) 在給這段話寫的評註中說， 芝諾從 “多” 和運動的假設出發， 一共推出了四十個各不相同的悖論。 芝諾的著作久已失傳， 亞里士多德的《物理學》和辛普里西奧斯 (Simplicius) 爲《物理學》作的註

釋是了解芝諾悖論的主要依據， 此外還有少量零星殘篇可提供佐證。 而現存的芝諾悖論至少有八個， 其中關於運動的四個悖論尤爲著名。

一則廣爲流傳但情節說法不一的故事說， 芝諾因蓄謀反對埃利亞 (另一說爲敍拉古) 的僭主， 而被拘捕、 拷打， 直至處死。

芝諾因其悖論而著名， 並因此在數學和哲學兩方面享有不朽的聲譽。 數學史家 F. 卡約里 (Cajori) 說，“芝諾悖論的歷史， 大體上也就是連續性、 無限大和無限小這些概念的歷史。” 但遺憾的是， 芝諾的著作沒有能流傳下來， 我們是通過批評他的亞里士多德及其註釋者辛普里西奧斯才得以了解芝諾悖論的要旨的。 直到十九世紀中葉， 人們對於亞里士多德關於芝諾悖論的引述及批評幾乎都是深信不疑的， 普遍認爲芝諾悖論只不過是一些有趣的謬見。 英國數學家 B. 羅素 (Russell) 感慨地說：“在這個變化無常的世界上， 沒有什麼比死後的聲譽更變化無常了。 死後得不到應有的評價的最顯眼的犧牲品莫過於埃利亞的芝諾了。 他雖然發明了四個無限微妙、 無限深邃的悖論， 後世的大批哲學家們卻宣稱他只不過是一個聰明的騙子， 而他的悖論只不過是一些詭辯。 遭到兩千多年的連續駁斥之後， 這些 “詭辯” 才能得以正名， ...” 十九世紀下半葉以來， 學者們開始重新研究芝諾。 他們推測芝諾的理論在古代就沒有得到完整的、 正確的報導， 而是被詭辯家們用作倡導懷疑主意和否定知識的工具， 從而背離了芝諾的眞正宗旨。 而亞里士多德正是按照被詭辯家們歪曲過的形象來引述芝諾悖論的。 然而， 迄今爲止， 學者們還找不出可靠的證據足以推翻亞里士多德和辛普里西奧斯關於芝諾悖論的記述。 由於目前對希臘哲學史了解得仍然不夠， 因此對於芝諾提出這些悖論的目的何在尙不淸楚。 比較一致的意見是： 芝諾關於運動的悖論並不是簡單地否認運動， 芝諾責難 “多” 也不是簡單地把兩隻羊說成一隻羊。 在這些悖論後面有著更深層的內涵。 亞里士多德的著作保存了芝諾悖論

的大意，功不可沒，但是他對於芝諾悖論的分析和批評並非十分成功，是值得重新研究的。

下面來考察芝諾關於運動的四個悖論。引號內的是亞里士多德的《物理學》中的原話，前面的小標題是爲了便於研究加上的。

(1) 二分說。“運動不存在，理由是：位移事物在達到目的地之前必須先抵達一半處。”J. 伯內特 (Burnet) 解釋說：即不可能在有限的時間內通過無限多個點。在你走完全程之前必須先走過給定距離的一半，爲此又必須走過一半的一半 ··· 等等，直至無窮。亞里士多德批評芝諾在這裡犯了錯誤：“他主張一個事物不可能在有限的時間裡通過無限的事物，或者分別地和無限的事物相接觸。須知長度和時間被說成是“無限的”有兩種涵意：或分起來的無限，或延伸上的無限。因此，一方面，事物在有限的時間裡不能夠和數量上無限的事物互相接觸，另一方面，卻能和分起來無限的事物相接觸，因爲時間本身分起來也是無限的。因此，通過一個無限的事物是在無限的時間裡而不是在有限的時間裡進行的，和無限的事物接觸是在無限數的而不是在有限數的現在上進行的。”

(2) 阿基里斯 (Achilles，荷馬史詩《伊里亞特》中的善跑猛將) 追龜說。“這個論點的意思是說：一個跑得最快的人永遠追不上一個跑得最慢的人。因爲追趕者首先必須跑到被追者的起跑點，因此走得慢的人是永遠領先。”伯內特解釋說，當阿基里斯到達烏龜起跑點的時候，烏龜已經走在前面一小段路了，阿基里斯又必須再趕過這一小段路，而此時烏龜又向前走了。這樣，阿基里斯可無限接近它，但不能追到它。亞里士多德指出這個論證和前面的二分法是一回事。“區別只在於：這裡加上的距離不是用二分法劃分的。由這個論證所得到的結論是：跑得慢的人不可能被趕上。而這個結論是根據和二分法同樣的原理得到的 —— 因爲在這兩個論證裡得到的結論都是因爲無論以二分法還是以非二分法取

量時都達不到終結。在第二個論證裡說最快的人也追不上最慢的人，這樣說只是把問題說得更明白些罷了——因此，對這個論證的解決方法也必然是同一個方法。認爲在運動中領先的東西不能被追上這個想法是錯誤的。因爲在它領先的時間內是不能被趕上的，但是，如果芝諾允許它能超過所規定的有限的距離的話，那麼它也是可以趕上的。”

(3) 飛箭靜止說。“如果任何事物，當它是在一個和自己大小相同的空間裡時 (沒有越出它)，它是靜止著。如果位移的事物總是在‘現在’裡佔有這樣一個空間，那麼飛著的箭是不動的。”亞里士多德接著批駁說：“他的這個說法是錯誤的，因爲時間不是由不可分的‘現在’組成的，正如別的任何量都不是由不可分的部分組合成的那樣。”他又說：“這個結論是因爲把時間當作是由‘現在’組成的而引起的，如果不肯定這個前提，這個結論是不會出現的。”

現在把這三個悖論聯繫起來分析。誠如亞里士多德所說，阿基里斯追龜說其實可以歸結爲二分說。按照二分說，阿基里斯在到達烏龜的起跑點之前，他必須先走過這段距離的 1/2，爲此，又必須先走過 1/4、1/8 等等，即必須在有限的時間內通過無限多個點，因此按芝諾的理由，阿基里斯根本就動彈不了。亞里士多德克服這個困難的辦法是說，“時間本身分起來也是無限的”，而在解決飛箭靜止說時又說，“時間不是由不可分的‘現在’組成的，正如別的任何量也都不是由不可分的部分組合成的那樣。”亞里士多德曾明確地論證過“在時間裡確有一種不可分的東西，我們把它稱之爲‘現在’。”於是問題的癥結在於亞里士多德所說的不可分的“現在”究竟是什麼？如果用區間表示時間，所謂“現在”是長度很短的線段呢，還是長度爲零的嚴格的數學上的點？如果是前者，那麼時間就是由“現在”組成的，飛箭就是不動的了。亞里士多德的意思顯然是指後者。但按照亞里士多德對二分說的分

析，線段 (距離) 被分割爲和無限數的 “現在” 相對應的無限數的點。又按照二分法的含意，這裡的無限是可數的，那麼，由可數的無限個長度爲零的點組成的線段，其長度必爲零，這又矛盾了。因此，芝諾悖論提示的是事物內部的稠密性和連續性之間的區別，是無限可分和有限長度之間的矛盾，亞里士多德沒有能覺察到這一點，當然實際上並沒有能駁倒芝諾。P. 坦納里 (Tannery) 在 1885 年指出，芝諾悖論所反對的是那種認爲空間是點的總和、時間是瞬刻的總和的概念。換句話說，芝諾並不否認運動，但是他想證明在空間中作爲點的總和的概念下運動是不可能的。

芝諾的類似觀點還表現在他的兩個針對 “多” 的悖論中。其中一個見於失傳的芝諾原著的如下一段殘篇：

> 如果有許多事物，那就必須與實際存在的事物相符，既不多也不少。可是如果有像這樣多的事物，事物 (在數目上) 就是有限的了。如果有許多事物，存在物 (在數目上) 就是無窮的。因爲在各個事物之間永遠有一些別的事物，而在這些事物之間又有別的事物。這樣一來，存在物就是無窮的了。

芝諾認爲存在若是 “多” 就會導致無窮的論證，也表達在他另一個悖論裡。它被辛普里西奧斯至少是部分地逐字逐句記述下來。這些記述不像阿基里斯追龜說和飛箭靜止說那樣經後人或多或少地修改過，雖然表達得沒有那麼清楚，但是卻更接近於芝諾的原話。辛普里西奧斯在他的引言裡說，芝諾首先論證既無 “大小” 又無厚度的東西是不能存在的。“因爲如果這樣，它加在某物之上不能使其變大，從某物減去也不能使其變小。但若不能因增加它而使一物增大，也不能因減少它而使一物減小，這就明顯地可看出，所增加或所減少的是零。” 接著就逐字引用以下一段：

> 如果是 [這樣？]，它就必須每一個部分與別的部分有一定

的距離。對於位於這一部分前面的那個部分也是如此。那個部分也會有大小，也會有位於其前面的部分。依此類推，永無止境。這樣，它的任何一個部分都不會是最外面的邊界，也不會有任何一個部分不分割爲其它部分。所以，若存在是多，那麼它必然既是小的又是大的：小會小到沒有大小，大會大到無窮。

這段引文比較費解，特別是他只逐字引用了後半部分，以證明大會大到無窮。至於證明小會小到沒有大小，芝諾依據的是物體的無限可分性。由此假定出發，他容易證明隨著分割的繼續，各部分越來越小，以至將會小到沒有止境。如果有一個最後元素，那就只能是沒有大小的 “無”。因此，把任意數目的這些 “無” 元素加在任何東西上都不會使它增大，反之從任何東西裡減去它們也不會使它變小；當然，把這一些 “無” 元素通通加起來，即使其數目有無限多個，其總和還是 “無”。上述悖論和關於運動的前三個悖論的共同點，在於假定了空間、時間和物體的無限可分性，實際上還討論了無窮小和連續性。芝諾在這裡其實還援引了如下兩個假設：

i) 無限多個相等的任意小的正量的總和必然是無窮大；

ii) 無限多個沒有大小的量的總和仍然是沒有大小的量。

其中假設 ii) 是芝諾反對把線段 (時間、空間) 看成是一個無限點集 (無限多個沒有大小的量的總和) 的主要依據。因此解決芝諾悖論的一個關鍵就是證明假設 ii) 不成立。A. 格蘭巴姆 (Grünbaum) 於 1952 年詳盡地討論了這個問題。他把只含有一個點的子區間定意爲退化子區間，從而得出下列結論：

1) 有限區間 $(a, b)$ 是退化子區間的連續統的聯集；

2) 每個退化子區間的長度是零；

3) 區間 $(a, b)$ 的長度是 $b - a$；

4) 一個區間的長度不是它的基數的函數。

因此，芝諾的假設 ii) 不能成立。事實上，將一個線段 (或別的量) 按二分法進行無限分割，不可能有最後元素。因爲既是無限分割，它就是一個沒有最後一項的永遠不能完成的過程，在取極限的義義上，按結論 1)，有限區間 $(a,\ b)$ 成爲不可數的無限個退化子區間的聯集，這時雖然每個退化子區間 (或每個點) 的長度爲 0，但整個聯集的長度不是 0，而是 $b-a$ (按結論 3))。這樣，作爲對芝諾和亞里士多德的回答，時間和距離都是作爲無長度元素 (點) 的無窮集合的線性連續統。換言之，線段是點的無窮集合，而時間是無廣延的瞬刻的無窮集合，它們都是線性連續統。這樣，飛箭靜止說這一悖論，原來指在任一給定的瞬刻是不動的，但在由無限多瞬刻組成的連續體上卻是動的，現在轉換成一個新的 “悖論”：由無廣延的點組成的無窮集卻有廣延。

4) 運動場悖論。“第四個是關於運動場上運動物體的論點：跑道上有兩排物體，大小相同且數目相同，一排從終點排到中間點，另一排從中間點排到起點。它們以相同的速度沿相反方向作運動。芝諾認爲從這裡可以說明：一半時間和整個時間相等”。亞里士多德接著指出：“這裡錯誤在於他把一個運動物體經過另一運動物體所花費的時間，看做等同於以相同速度經過相同大小的靜止物體所花費的時間。事實上這兩者是不相等的。” 他的證明可利用下面的圖解來表示，其中 $A$、$B$、$C$ 代表大小相同的物體。

$$\begin{array}{lcl} \qquad\quad A\ A\ A\ A & \qquad\qquad & \qquad A\ A\ A\ A \\ B\ B\ B\ B \longrightarrow & & \qquad B\ B\ B\ B \longrightarrow \\ \qquad\quad \longleftarrow C\ C\ C\ C & & \longleftarrow C\ C\ C\ C \end{array}$$

$AAAA$ 爲一排靜止物體，而 $BBBB$ 和 $CCCC$ 分別代表以相同速度作相反方向運動的物體。於是當第一個 $B$ 到達最末一個 $C$ 時，第一個 $C$ 也達到了最末一個 $B$。這時第一個 $C$ 已經經過了所有的 $B$，而第一個 $B$ 只經過了所有的 $A$ 中的一半。因爲經過每個

物體的時間是相等的，所以一半時間和整個時間相等。這個錯誤結論是從上述錯誤假定得出的。

值得指出的是，這是古代文獻中第一個涉及相對運動的問題。在現存的芝諾悖論中，它是唯一的和連續統問題無關的問題。不過也有學者 (例如 P. 坦納里等人) 認爲它和連續統問題之間是有著某種聯繫的。這樣一共討論了六個芝諾悖論。在古代傳說中保存下來的還有另外幾個據信是屬於芝諾的悖論，由於內容不那麼深刻，也比較容易解決，這裡就不作介紹了。

關於芝諾悖論對於古代希臘數學發展的重要性，在科學史學者中的義見是很不一致的。P. 坦納里首先提出，芝諾和巴門尼德哲學的關係並不如古代傳說中所肯定的那樣密切。相比之下，因畢達哥拉斯學派發現不可公度量而出現的一些問題，對於芝諾具有更加深刻的影響。基於同樣的假設，H. 赫斯 (Hasse) 和 H. 斯科爾斯 (Scholz) 想把芝諾說成是對古代數學的發展方向起決定影響的人物。他們試圖證明，畢達哥拉斯學派曾假定存在無限小的基本線段 (初等線段)，想以此來克服因發現不可公度量而引起的困難。芝諾所反對的正是這種處理無窮小的不準確的做法，從而迫使下一代的畢達哥拉斯學派的數學家去探求更好、更準確的基礎。另有一些學者持有完全不同的意見。B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 指出，我們已知關於公元前五世紀下半葉的數學理論 – 不可公度量的發現無疑是那個時代作出的 – 並不支持芝諾曾經對那個時代的數學發展作過任何重大貢獻的說法。

雖然芝諾時代已經過去二千四百多年了，但是圍繞芝諾的爭論還沒有休止。不論怎樣，人們無須擔心芝諾的名字會從數學史上一筆勾銷。正如美國數學史家 E.T. 貝爾 (Bell) 所說，芝諾畢竟曾“以非數學的語言，記錄下了最早同連續性和無限性格鬥的人們所遭遇到的困難。” 芝諾的功績在於把動和靜的關係、無限和有限的關係、連續和離散的關係惹人注意地擺了出來，並進行了辯證

的考察。 雖然不能肯定他對古典希臘數學的發展有無直接的重要影響， 但是有一點決不是偶然的巧合： 柏拉圖寫作對話《巴門尼德》篇的時候， 因爲其中討論的主要話題之一是芝諾的觀點， 芝諾也是書中的主角之一， 因此在柏拉圖學園中， 很自然地熱烈討論起芝諾悖論來。 而當時歐多克索斯 (Eudoxus) 正在柏拉圖學園中攻讀和研究數學與哲學。 歐多克索斯在稍後的時間裡創立了新的比例論 (《原本》第五卷中的主要內容)， 從而克服了因發現不可公度量而出現的數學危機； 並完善了窮竭法， 巧妙地處理了無窮小問題。 因此， 在希臘數學發展的這個關鍵時刻， 很難說芝諾沒有對它的發展作出過有義義的貢獻。

芝諾在哲學上被亞里士多德譽爲辯證法的發明人。 黑格爾在他的《哲學史講演錄》中指出：“芝諾主要是客觀地辯證地考察了運動”， 並稱芝諾是 “辯證法的創始人”。

## 文　　獻


[1] Aristotle, *Physics* (中譯本： 亞里士多德， 物理學， 商務印書館， 1982)。

[2] Simplicius, *Commentary on Aristotle's Physics*: tr. A. Wasserstein, Phronesis, 4 (1950)。

[3] H.D.P. Lee, Zeno of Elea,*A text with translation and commentary*, Cambridge, 1936。

[4] Plato, *Parmenides* (中譯本： 柏拉圖， 巴門尼德篇， 陳康譯註， 商務印書館， 1985)。

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. 1, Oxford, 1921

[6] “Zeno of Elea” in *Encyclopaedia Britannica*, vol. 23, 945－946

[7] F. Cajori, *The history of Zeno's arguments on motion*, American

Mathematical Monthly,vol. XXII, 1915, 1－6。

[8] F. Cajori, *The purpose of Zeno's arguments on motion*, Isis, 3 (1920)。

[9] H. Fränkel, *Zeno of Elea's attacks on plurality*, Amercan Journal of Philology, 63 (1942), 1－25; 193－206。

[10] A. Grünbaum, *A consistent conception of the extended linear continuum at an aggregate of unextended elements*, Philosophy of Science, 19 (1952), 288－305。

[11] B. Russell,*The principles of mathematics*, vol. I,1903。

[12] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, 1972。