

# 柏 拉 圖

柏拉圖 (Plato) 公元前 427 年生於雅典；公元前 347 年卒於雅典。認識論、數學哲學、數學教育。

柏拉圖之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Plato.html>

# 柏 拉 圖

周 煥 山

(江蘇教育學院)

柏拉圖 (Plato) 公元前 427 年生於雅典；公元前 347 年卒於雅典。認識論、數學哲學、數學教育。

柏拉圖出生於雅典的顯貴世家。父親阿里斯頓 (Ariston) 據信是雅典歷史上最後一個君主科德羅斯 (Codrus) 的後裔；母親佩里克蒂妮 (Perictione) 的先輩可以上溯到公元前七世紀的雅典執政官德羅彼得 (Dropides)，據說他是被稱為七賢之一的著名政治家和詩人梭倫 (Solon) 的兄弟。柏拉圖除了有兩個年紀比他大得多的哥哥：阿得曼圖 (Adeimantus) 和格洛康 (Glaucon)，還有一個姐姐波托尼 (Potone)，其子斯標西波 (Speusippus) 後來成為柏拉圖的繼承人。

柏拉圖在幼年喪父，之後母親改嫁。繼父皮里蘭佩 (Pyrilam-pes) 是建設民主政體的傑出政治家柏里克利 (Pericles) 的親密助手，曾作為雅典使節被派往波斯等國，在國家事務中起過引人注目的作用。他的堂舅克里底亞 (Critias) 思想機敏，給柏拉圖留下深刻的印象。在柏拉圖的著作中，曾多次用頌揚的口吻滿懷眷戀地提到他的繼父、兄弟和其他親屬。他的著作的一些篇名如《克里底亞》等，就是以親屬的名字命名的。

柏拉圖自幼受到良好而完備的教育，少年時代勤奮好學、多才多藝，且體格健壯。他寫過抒情詩和悲劇，也參加過摔交等激烈運動，除去家庭的薰陶之外，給他影響最為深遠的莫過於正直善辯的哲學家蘇格拉底 (Socrates) 了。蘇格拉底是柏拉圖一家的老朋友，交往密切，所以，柏拉圖很可能從小就認識蘇格拉底。但

是，熱心追隨蘇格拉底則是從二十歲時開始的。從此，蘇格拉底成爲柏拉圖心目中最敬仰的導師。他在後來的著作中多次稱蘇格拉底是“人世間最有智慧的人”。

公元前 404 年，雅典在經過長達二十八年之久的伯羅奔尼撒戰爭 (Peloponnesian War) 後被迫向斯巴達投降。柏拉圖親眼目睹了奴隸主民主政體的垮台，取而代之的是以他的堂舅克里底亞爲首，史稱“三十僭主”(Thirty Tyrants) 的專制政體，而他的舅舅查密迪斯 (Charmides) 也成爲“三十僭主”的成員之一。雖然這些親戚們一上台就立即邀請柏拉圖參加其行列，而且他也久懷從政的願望，但是他沒有響應。事態的發展迅速表明，“三十僭主”政體的所作所爲，倒使得原先的民主政體在相比之下顯得像一個黃金時代。他們濫殺無辜，任意剝奪，甚至老朋友也不放過，連正直的蘇格拉底也險遭陷害。不到八個月，“三十僭主”的暴政就被推翻，克里底亞和查密迪斯也死於戰亂，這一切都使柏拉圖感到悲憤和失望。

在“三十僭主”垮台、民主派領袖恢復執政之後，儘管採取了比較溫和、不施報復的政策，一些政客卻指控蘇格拉底犯有不敬神和蠱惑青年的罪名，並被處死。在蘇格拉底受審時，柏拉圖和他的哥哥阿德曼圖曾去法庭聆聽蘇格拉底的雄辯、無畏的申辯詞，並在他的早期著作《申辯》篇中記錄了這件事。這一悲劇給柏拉圖以極大的刺激，使得在他心中復萌的從政願望熄滅了。隨著年歲的增長，他對於當時的政客、法典和習俗越來越感到厭惡，從而決心繼承蘇格拉底的哲學思想，開始撰寫以蘇格拉底爲主角的《對話》，並從事於締造理想國家的理論研究。

在蘇格拉底死後，柏拉圖離開雅典，退避到歐幾里得 (Euclid) 的家鄉麥加拉。歐幾里得是麥加拉學派的首領，他信奉蘇格拉底的倫理學，“把善說成是普遍意義下的絕對本質”。黑格爾在談到麥加拉學派時說：“他們曾經在一切觀念中指出矛盾，這是他

們的好辯”。但柏拉圖對於這種“好辯”似乎不太熱心，且轉而對科學產生興趣。離開麥加拉以後，他開始了長途遊歷，先後去過埃及、昔勒尼 (Cyrene)、義大利南部及西西里等地。在昔勒尼，他在著名的數學家德俄多儒 (Theodorus) 的指導下，特別鑽研了數學。而在義大利南部的塔林敦 (Tarentum)，他結交了當時畢達哥拉斯學派的主要代表人物阿契塔 (Archytas)。阿契塔在數學和力學上的造詣，他所維持的畢達哥拉斯學派的教育制度，都給柏拉圖留下深刻的印象。在西西里島的敍拉古，柏拉圖結識了年青的狄昂 (Dion，約公元前 408 – 前 354 年)。狄昂是敍拉古僭主狄俄尼索 (Dionysius) 的姻親，他厭惡上層社會的奢侈淫逸的生活，虔誠地接受了柏拉圖的哲學觀點，成為追隨柏拉圖的忠實信徒。在柏拉圖的第七封信札中提到過這次旅行，他說，四十歲時他在義大利和西西里，那裡看到的聲色享樂使他驚駭不安。他還記載了對狄昂的良好的印象。

公元前 387 年，柏拉圖在雅典城的東北角創辦一所好多方面頗像現代私立大學的學園 (Academy)<sup>1</sup>。柏拉圖學園裡有教室、花園、飯廳、禮堂和學員宿舍，並有由柏拉圖及其助手講授的正式課程。仿效畢達哥拉斯學校的慣例，學員們吃公共伙食。學園同時也作為一個敬奉繆斯的宗教社團，以確保得到合法的承認。柏拉圖自任校長，大概就住在學園的附近。

公元前 367 年春狄俄尼索去世，柏拉圖的崇拜者狄昂成為首席大臣，他籲請柏拉圖去敍拉古，以幫助教育他的外甥狄俄尼索二世，將他培養成一個能勝任他的職責的立憲君主。柏拉圖應邀於公元前 366 年到達敍拉古。根據柏拉圖的第七封信札，他到了那裡發覺形勢很複雜，一些敍拉古人認為，狄昂企圖讓他的外甥泡在沒完沒了的學習之中，以便他自己掌握實權。在柏拉圖到達三個月之後，國王狄俄尼索二世懷疑起他的舅父來了，並以勾結敵

---

<sup>1</sup> *Aκαδημεια* 原為紀念希臘英雄阿卡得穆 (Academus) 的一處園林。

國迦太基的罪名，將狄昂放逐到國外。柏拉圖於次年(公元前 365 年)，在得到狄昂將被召回的諾言之後返回雅典。

公元前 362 年，柏拉圖又應國王的邀請再次去敍拉古。據說這一次國王真正對哲學感興趣了。按照柏拉圖的第七封信札的說法，這次他同意去那裡，是被狄昂的事有可能在他返回敍拉古的條件下得以解決的前景所促成的。狄昂在被放逐的那幾年裡一直在雅典度過，並成為柏拉圖的侄兒斯標西波的朋友。然而，柏拉圖的調解努力以失敗告終。國王非但沒有聽從柏拉圖的勸說，反而禁止狄昂的代理人向狄昂解送他的地產收入，柏拉圖也被軟禁起來，好不容易才於公元前 361 年逃回雅典。於是，狄昂採取步驟以實現武力返回敍拉古，並要以非禮罪懲處國王。雖然這次他懇求柏拉圖的幫助，但被柏拉圖以年老為由婉謝了。學園中的其他一些成員參加了這次遠征。狄昂的冒險行動得到成功，國王被趕下台，並逃走了。然而在短期執政之後，狄昂被參加這次遠征的一個雅典人謀殺了(公元前 354 年)。柏拉圖的第七和第八封信札就是在這時期寫給狄昂的同黨的。

除去上面說的第二和第三次西西里之行，柏拉圖自創辦學園之後的四十年，一直都在雅典度過。他從事學園的管理、教學、研究和寫作。除去一些早期作品外，他的大部分著作都是在雅典完成的。柏拉圖逝世於公元前 347 年，享年八十。傳說他是在參加一位朋友的結婚宴會時，忽感不適，退到屋子一角平靜地辭世的。

作為一位哲學家，柏拉圖他對於整個歐洲的哲學及至整個文化的發展，有著深遠的影響。特別是他的認識論、數學哲學和數學教育思想，在古代希臘的社會條件下，對於科學的形成和數學的發展，起了不可磨滅的推進作用。古希臘最大的科學家和思想家亞里士多德，曾師事柏拉圖二十年，被柏拉圖譽為“學園的精英”；傑出的數學家歐多克索斯(Eudoxus)、梅奈奇姆斯

(Menaechmus) 以及泰特托斯 (Theaetetus) 等都是柏拉圖的學生或同事，這決不是偶然的。

先說著作。除書札外，柏拉圖的著作概用對話體裁。傳世的有三十五篇《對話》和十三封書札。《對話》中大多以蘇格拉底為主角，常假托他的話來闡述柏拉圖自己的哲學思想，行文優美，融哲學和文學為一體。關於這些著作的真偽和寫作的先後，學者們的意見歷來不太一致。比較公認的說法為大約有二十多篇對話是出自柏拉圖之手。其中常為人們所引用的名篇，按寫作的先後順序可將這些名篇大致排列為：《申辯 (Apology)》、《克里托 (Crito)》、《普羅塔戈拉 (Protagoras)》、《高爾吉亞 (Gorgias)》、《克拉底魯 (Cratylus)》、《美諾 (Meno)》、《菲多 (Phaedo)》、《會談 (Symposium)》、《理想國 (Republic)》、《菲德羅 (Phaedrus)》、《巴門尼德 (Parmenides)》、《泰特托斯 (Theaetetus)》、《智者 (Sophist)》、《政治家 (Statesman)》、《菲利布 (Philebus)》、《蒂邁歐 (Timaeus)》、《克里底亞 (Critias)》、《法律 (Laws)》等。其中《理想國》是著於壯年，如日中天，包羅萬方，可堪稱千古名作。在 13 封書札中，一般認為其中的第六、七、八封是可信的。

柏拉圖的認識論，通常被認為是客觀唯心主義的。在哲學史上，是他試圖論述諸如什麼是知識、知識的來源、感覺與知識、理性與知識等基本問題的。因此，只有柏拉圖才能稱得上是認識論的真正創始人。柏拉圖認識論的主要部分是理念論、回憶說、辯證法和靈魂轉向說。

關於柏拉圖構想理念論的原因，亞里士多德曾作過清楚的分析。柏拉圖年輕時就和雅典人克拉底魯相識。而克拉底魯信奉赫拉克利特 (Heraclides) 的學說，認為凡可目睹的事物永遠處於變化的狀態，因而關於它們沒有知識可言。柏拉圖當時和以後都沒有否認這一點，因此，為了繼承以及發展蘇格拉底在道德領域內對

永久不變的共相的探求，柏拉圖把共相和可以感知的具體事物分離開來，使之成為獨立的實在，並稱之為理念 (idea 或 form)。在他看來，具體事物是由於“分有”理念而得以存在的；當我們命名或說起這些具體事物時，我們所指的其實是同名理念。他把理念看做是可感事物的源泉，是正本；而把具體事物看做是模仿理念而成，是副本。他還設想在永恆不變的理念世界裡，“善”理念具有太陽般崇高的位置，善是知識以及真理的根源。並認為理念可以通過理性而不能通過感覺來認識。其實柏拉圖的理念就是共相，是事物的本質屬性。強調把事物的共相作為認識的起點，強調理性知識和感覺印象的區別，具有積極的一面。但是柏拉圖在處理精神世界和現實世界的關係時，犯了本末倒置的錯誤。他的得意門生亞里士多德在《形而上學》裡，對此提出了批評和糾正。亞里士多德完全否定在現實世界之外還有一個獨立自存的理念世界，認為理念實際上就是共性，它只能寓於個性之中，存在於人們的抽象概念中。列寧指出：“亞里士多德對柏拉圖的‘理念’的批判，便是對唯心主義，即一般唯心主義的批判。”<sup>2</sup> 在哲學史上，黑格爾 (Hegel) 曾從哲學的辯證發展的角度，不無過譽地高度評價了師徒二人的貢獻。他說：“哲學之作為科學是從柏拉圖開始而由亞里士多德完成的。他們比起所有別的哲學家來，應該可以叫做人類的導師。”

按照柏拉圖的神話般的設想，理念是不死的靈魂所固有的。但在轉世出生時遺忘掉了，只有後天通過感覺和學習，通過別人的詢問，才能回憶起先天固有的知識。聽到別人講的道理而能理解，並非接受了別人的知識，乃是自己原有的知識經別人的提醒得以回憶起來。這就是他在《美諾》篇中提出的回憶說。因此，他主張教育應注重誘導和啟發，應通過問答式的對話來引導對方進行由近及遠的層層推理。在《美諾》篇中，蘇格拉底

---

<sup>2</sup> 《列寧全集》第 38 卷，人民出版社，1960；p.313。

就是這樣從一個未受過教育的男僕嘴裡，引導出一道幾何題的答案。這一種採用對話來推求真理的方法，即所謂“理智助產術”，有時也被他稱為“辯證法”。不過當他在使用“辯證法”這一術語時，含義要更加廣泛些，更著重於理念的推演和對立意見的辯析，更著重於對所謂“純粹思想”的考察。黑格爾曾說：“柏拉圖的研究完全集中在純粹思想裡，對純粹思想本身的考察，他就叫辯證法。他的許多對話中都包含了這樣意義的辯證法。這些純粹思想是：‘有’與‘非’、‘一’與‘多’、‘無限’與‘有限’。這些就是他獨立地予以考察的對象，——因此這乃是一種純邏輯的、最深奧的研究”。柏拉圖在他的後期對話《巴門尼德》、《智者》和《菲利布》等篇中闡述了他的辯證法。特別是《巴門尼德》篇，被黑格爾譽為“柏拉圖辯證法最著名的傑作”。這篇對話的主題是假借巴門尼德和芝諾之口說出來的辯證法。但應注意，希臘哲學家芝諾和柏拉圖所說的辯證法，與馬克思主義所講的辯證法是有實質性的區別的。

柏拉圖在他的對話中多處提到知識和意見(有時稱為信念)之間的區別。他認為知識必須建立在理性的基礎上，必須是真實的。而處於意見狀態，則是指依據權威或僅僅出於習慣就接受的關於事實和原則的判斷。由於沒有把握事物之間的因果聯繫，意見可真可假。如果把握了事物之間的因果聯繫，就能用因果鎖鏈把它們縛住，人們的認識也就由意見轉變成知識。按照理念論，掌握知識的人通曉理念，並能將特殊情形和理念聯繫起來(雖然柏拉圖未能成功地解釋這種聯繫是怎樣發生的)；而僅滿足於特有意見的人，卻只能在半真實的特殊事物間徘徊。

柏拉圖在《理想國》中的第VI、VII兩章中，通過三個有名的比喻：“日喻”、“線喻”和“洞喻”，且在對認識過程進行深入分析的基礎上，提出並闡釋了他的“靈魂轉向說”。所謂“日喻”，簡言之，就是把理念世界中的善理念比作可感世界中的太陽。太

陽是光的源泉，是萬物生長和可感性的原因，並引發眼睛的視覺功能；而善理念是真理的源泉，是真實存在（理念）的可知性的原因，並引發了靈魂的認識功能。至於“線喻”，是通過將一條直線劃分為四段作為比喻以分析認識過程的。他將這四個部分比喻為四種等級的心理狀態：最高等級是理性，第二等級是理智，第三等級是信念，第四等級是想像。這四種心理狀態是根據認識的真實性與明確性來劃分的，前二者是對可知世界認識的結果，後二者是對可感世界認識的結果。這四個等級其實代表著認識過程由初級到高級的四個階段，只是柏拉圖從理念論的唯心觀點出發，把前後次序倒置了。第四等級想像，代表感性認識的初級階段。處於對可感事物外表的模糊覺察。例如，對物體投在水中的影像留下的第二手印象。第三等級信念，代表對現象界的比較明確的感性認識。例如，對於自然界和日常生活中一般事物的印象或意見。第二等級理智，其對象是理念世界中的一些孤立的理念。常常要藉助於圖形等的幫助，根據某些假設進行邏輯推理。例如，從事數學研究時的心理狀態就處於理智等級。第一等級理性，其對象是理念世界或所謂真實存在。憑藉辯證法和純粹思維，由理念到理念，直至達到終極真理。這就是以善理念為終極目標的純哲學研究。而“洞喻”，是以在一個洞穴內面壁而居的囚徒走向光明的過程作比喻，形象地說明了從感性認識上升到理性認識的艱難歷程。

然後，柏拉圖十分自然地通過蘇格拉底之口說：“每個人在他的靈魂內部都隱藏著一種進行學習的能力，這種能力可以比喻為知識之目。但正如必須轉動整個身體，眼睛才能由黑暗轉向光明一樣，作為整體的靈魂也必須轉移方向，知識之目才能離開變化的現象世界而朝向實在世界，並逐漸學會承受實在之光，直至看到最明亮、最美好的實在，換句話說，即看到善”。這就是柏拉圖的“靈魂轉向說”。他認為教育就是一種使靈魂轉向的藝術，要

研究利用什麼方式可使這種轉向最易行、最有效。教育的目的不在於移植視力，因為靈魂本身已經有視力，而是在於促使靈魂轉移方向，轉向該看的方向，讓視力發揮作用。“轉向說”不提知識是靈魂所固有的，而換成學習能力是靈魂所固有的。因此教育不是簡單地喚起回憶，而是要採取確當的方式，引導靈魂轉向，讓學習能力向著正確的方向發展。雖然柏拉圖沒有宣佈放棄“回憶說”，但是從《美諾》篇中的“回憶說”到《理想國》中的“轉向說”，不能不說是他的認識論發展中的一大進步。

我們從柏拉圖的著作中，可以看到數學哲學領域的最初的探究。柏拉圖的數學哲學思想是同他的認識論、特別是理念論分不開的。他認為數學所研究的應是可知的理念世界中的永恆不變的關係，而不是可感的物質世界中的變動無常的關係。因此，數學的研究對象應是抽象的數和理想的圖形。他在《理想國》中說，“我所說的意思是算術有很偉大和很高尚的作用，它迫使靈魂就抽象的數進行推理，而反對在論證中引入可見的和可捉摸的對象。”他在另一處談到幾何的時候說：“你豈不知道，他們雖然利用各種可見的圖形，並藉此進行推理，但是他們實際思考的並不是這些圖形，而是類似於這些圖形的理想形象。…，他們力求看到的是那些只有用心靈之目才能看到的實在。”

如果說數學根據的抽象化定義始於畢達哥拉斯學派，那麼，柏拉圖及其學派則把這一具有歷史意義的工作大大地向前推進了。他們不僅把數學概念和現實中相應的實體區分開來，而且把它和在討論中用以代表它們的幾何圖形嚴格地區分開來。柏拉圖是從理念論的角度去探討數學概念的涵義的。在柏拉圖的第七封信札裡，他曾以圓為例進行分析。他說，“有四種圓：(1) 被世人稱為圓的某種東西；(2) 圓的定義：在任何方向上的邊界點到中心的距離都是相等的；(3) 畫出的一個圓，即旋轉圓規所得出的圓；(4) 實質性的圓，即圓的理念，它與其它圓的存在密切相關，但又不同於任

何其它的圓。”柏拉圖接著評論道：(1) 名稱是無關緊要的，它只是由習慣形成的。我們甚至可稱圓為直線，並反過來稱直線為圓；(2) 定義其實也不具有真正的確定性，它是由名詞、動詞等詞語組成的；(3) 是畫出來或旋轉出來的具體的圓，這裡難免摻雜其它東西：它甚至充滿著和圓的本質相抵觸的成分。例如，雖然數學圓和數學直線僅能相切於一個公共點，但這在畫圖時是無法做到的。因此，(1)、(2)、(3) 都不是完善的圓，許多具體的數學圓其實介於這些不完善的圓與唯一的圓的理念之間。亞里士多德闡釋說，柏拉圖是將數學對象置於現實對象與理念之間的，數學對象因其常駐不變而區別於現實對象，又因其可能有許多同類對象而區別於理念。舉例說，三角形的理念只有唯一的一個，但存在許多數學三角形，也存在相應於這些數學三角形的各種不完善的摹本，即具有各種三角形形狀的現實物體。

儘管柏拉圖的數學理念帶有唯心主義色彩，但從客觀效果來看，這一詞語的內涵和我們今天所說的數學概念的內涵是基本一致的。名稱、定義和相應的圖形都是用以描摹數學概念的，但是它們之中的任何一個都和數學概念自身有所區別。顯然，定義要比名稱和圖形更能刻劃一個數學概念的本質特徵。事實上，柏拉圖對於數學定義極其重視。例如對偶數、圖形、直線等定義，在其著作中都作過推敲。在某些方面，他繼承畢達哥拉斯學派的傳統，但也常常提出自己的異議，並在他的學園內進行討論。例如在談到點的定義時，柏拉圖對於畢達哥拉斯的“具有位置的單子 (monad)”這一定義明確地表示反對。事實上，“單子”並不比“點”更容易理解。雖經反覆研究，但柏拉圖也沒有想出更好的定義來代替它。據亞里士多德說，柏拉圖認為把點作為一類事物純屬“幾何虛構”，他稱點是“線段之端”，有時也用“不可分之線段”這一術語來表示同一意義。亞里士多德指出，即使不可分的線段也必然還有開端，因而這樣解釋於事無補；而把點定義為“線段之

端”，則是不科學的。我們從這一段討論中可以看出，柏拉圖學派已接近於把點判爲不可定義的原始概念了。

柏拉圖在《理想國》第六卷中論及數學假設和證明。他說：“想必你知道，研究幾何、算術以及這一類學問的人，首先要假定奇數、偶數、三種類型的角以及各學科中諸如此類的東西是已知的。這就是他們的假設，他們設想這些東西是任何人都知道的，因而認爲無必要就此向他們自己或別人作任何說明。他們就從這些假設出發，並以前後一致的方式向下推，直至最後得出他們的結論。”這段話表明，從一些公認的假設出發進行演繹證明，這在當時的學園裡已經是個不爭的事實，而且得到柏拉圖的讚許。事實上，柏拉圖十分強調脫離直觀印象的純理性證明，並嚴格地把數學作圖工具限制爲直尺和圓規。據普盧塔克 (Plutarch) 的記述，當聽說歐多克索斯和阿契塔應用機械工具來解決一個與立方倍積問題有關的幾何作圖時，柏拉圖就憤憤地予以抨擊。他認爲這樣做“只能導致幾何學的墮落，並剝奪了它的優點，使它可恥地背棄純理智的抽象對象，倒退到感性，並求助於物質。”柏拉圖的這種或許有點過激的主張，對於形成歐幾里得幾何的公理演繹體系，不無促進作用。但其副作用也是不可否認的：由於古希臘的實驗科學和機械學受到哲學家的漠視，以致長期處於相對落後的狀態。柏拉圖也十分重視算術，但他是將算術和實用計算區分開來的。他所說的“算術”其實是指關於整數的學問。

希臘數學評論家普羅克洛斯 (Proclus) 和歷史學家 D. 拉爾修 (Laertius，公元三世紀)，把兩類方法論歸功於柏拉圖。第一類方法是分析法，第二類方法是歸謬法或間接法。關於第一類方法，T.L. 希思 (Heath) 認爲普羅克洛斯所指是柏拉圖在《理想國》中使用的那種哲學方法，被誤解爲數學中的分析法。但是很可能爲了強調邏輯嚴格性，柏拉圖曾指出在分析法證明之後有加以綜合的必要。而至於歸謬法，有人認爲應歸功於希波克拉底

(Hippocrates)。關於這兩種方法的發明權問題，至今尚無定論。

柏拉圖在相當大的程度上繼承了畢達哥拉斯學派的“萬物皆數”的觀點。他認為宇宙間的天體以至萬事萬物，都是按照數學規律來設計的。依賴感官所感覺到的世界是混亂和迷離的，因而是不可靠的和無價值的。只有通過數學才能領悟到世界的實質。他因此逐漸對數學產生了強烈的興趣。他對幾何學如此崇拜，以至認為創造世界的神是一個“偉大的幾何學家”。他甚至具體設想宇宙之初有兩種直角三角形，一種是正方形的一半，另一種是等邊三角形的一半。由這些三角形可組成四種正多面體，構成四種元素的微粒。其中火微粒是正四面體，土微粒是正立方體，氣微粒是正八面體，水微粒是正二十面體。至於各面為正五邊形的正十二面體，則是構成天上物質的精英。後來他特地對五種正多面體的特徵和作圖方法作了系統的論述，因而後人就把這五種正多面體統稱為柏拉圖體。他也認為宇宙是活的，是運動的，而且做的是圓周運動，因為圓是完善的。他還認為萬物都可以用一個數目來定名，這個數目體現其所含元素的比例… 等等。這一切可以說明，柏拉圖的宇宙觀是數學化的宇宙觀。這種宇宙觀是形成柏拉圖的數學教育觀的思想基礎。現代英國數學家 B. 羅素 (Russell) 評論說：“在認為沒有數學就不可能有真正的智慧這一點上，他是一個十足的畢達哥拉斯主義者。”

自公元前 387 年開始，柏拉圖就把創建和主持學園教育作為自己最重要的事業，雖然他認為學園的辦學宗旨是培養具有哲學頭腦的優秀政治人才，直至造就一個能夠勝任治國重任的哲學王，但在具體課程設計上卻繼承和發展了畢達哥拉斯學派的以數學為主課的方針。在《理想國》第七卷中，他系統地論述了學園的教育方針，他批評了雅典人過早地以“辯論術”培訓年輕人的傳統做法，認為那樣做“結果是損壞了自己和整個哲學事業在世人心目中的信譽。”他主張對二十歲到三十歲的學員進行長達十年的以數學

爲中心的教育。其課程包括算術、平面幾何、立體幾何、天文學和諧音學。其中天文學不依賴對天象的觀察，而主要憑藉純粹的數和圖形來研究天體運動；諧音學不是憑藉經驗，而主要依據數本身的性質，去思考哪些數是和諧的，哪些數是不和諧的。因此，按照畢達哥拉斯學校的慣例，這兩門課也被看成是數學學科。這些課程都是爲學習辯證法作準備的。待三十歲以後，花五年時間專心學習以辯證法爲主的哲學，三十五歲以後方才出任公職。不過在上述五門課程中，主要是算術和平面幾何，因爲其它三門學科在當時發展得還很不成熟。柏拉圖曾談到立體幾何沒有得到發展的具體原因，並倡導人們對它進行研究。此外，他還討論了關於選定哪些人去研習這些功課的問題。他的回答是要像選擇統治者那樣子，“必須挑選出最堅定、最勇敢、在可能範圍內也最有風度的人。此外，我們還得要求他們不僅性格高貴嚴肅而且還要具有適合這類教育的天賦。”接著還討論了應有哪些天賦的問題。由此可見，柏拉圖學園裡實施的是一種英才教育。據 F. 拉瑟爾說，在柏拉圖以及他的繼任人斯標西波主持學園的共約 46 年期間，數學一直在學園內佔據主導地位，柏拉圖的數學大綱得到充分的貫徹。從公元六世紀以來廣爲流傳的一則故事說，在柏拉圖學院的大門口刻有“不懂幾何者勿入”的銘文。如果確有其事的話，這恐怕是有史以來從知識方面規定入學條件的最早記錄。

柏拉圖爲什麼如此重視數學教育呢？這主要是根據他的教育目標以及他的認識論學說確定的。柏拉圖的教育目標是通過長期的嚴格訓練，培養出一批精通辯證法、能憑藉理性去把握永恆不變的實在（理念）、直至能把握善理念的人才。只有這樣的人才有資格統治國家，只有把握了善理念的哲學家才以善理念爲模型和藍圖，來塑造人間的理想國。要實現這一目標，從認識論的角度看，其關鍵是要實現由第三等級信念狀態到第一等級理性狀態的轉向。而從事數學思考的認識能力，正好處於信念和理性之間

的理智狀態，因此，對學員進行長期的數學教育，就成為完成這一極其重要的心靈轉向的必要措施。他在《理想國》第七卷中說：“對於那些將來要在城邦肩負重任的人們，尤其要力勸他們學習算術，且不可像常人那樣淺嘗即止，而必須潛心研習，直到能從純理性上洞察數的本質。因為對他們來說，學習算術的目的不是像商販那樣為了去做買賣，而是為了它在軍事上的應用，為了靈魂本身去學的，因為這是使靈魂由變化的現象世界轉向真理和實在的捷徑。”他接著討論了幾何，指出幾何學“能幫助人們較為容易地把握善理念”。並以肯定的語氣說：“因此，我的好朋友，幾何學將把靈魂引向真理，將締造哲學精神，使靈魂轉向上升，而不是像現今那樣可悲地轉向下降。”由以上一些引語可知，柏拉圖確實是把學園裡的數學教育作為引導靈魂轉向，培養哲學家和統治者的必經途徑的。

柏拉圖倡導多層次的數學教育。其最高層次就是在學園中推行的為培養“英才”服務的那種數學教育。第二層次是培養為“理想國”服務的各類知識分子，即所謂“要用算術來訓練那些天賦聰穎的人，務必不要疏忽了這門學問。”這裡的教育對象只須天賦聰穎，不必具備為選擇統治者所制訂的條件。第三層次是提高庶民的文化知識水準，即所謂“天性遲鈍的人，倘能接受算術訓練，即使沒有其它方面的益處，至少也可變得比以前伶俐些。”這種多層次的數學教育，在某種意義上也體現了一種因材施教的原則。柏拉圖接著提出了全體居民學數學的建議：“應該嚴格規定貴城邦的全體居民務必學習幾何。…，經驗證明，學過幾何的人在學習其它任何學問時，要比未學過幾何的人快得多。”柏拉圖在這裡首次提出了他對於普及數學教育的主張，並且點出了數學教育對於提高智力的功用。柏拉圖還熱心於教學方法的改進。他說，不應只向人們簡單地灌輸一堆知識，而應當讓他們學會通過表面現象看到事物的深處，看到永恆的實在，看到藏在萬物後面

的“善”。為了啓迪思維，柏拉圖善於應用“理智助產術”，通過問答式對話，引導學生的思路向深層發展。他還鼓勵學生提出一些問題來讓大家進行討論。這些教學方法即使在今天也還有一定的借鑑意義。

在柏拉圖的指導下，學園的數學教育取得極大的成功。在公元前四世紀的希臘，絕大多數知名數學家都是柏拉圖的學生或朋友。他們之間經常進行討論或交流，而柏拉圖學園則成為開展數學交流活動的中心場所。他們以柏拉圖為核心形成一個學派，史稱柏拉圖學派，其中泰特托斯(約公元前 415 – 前 369 年)是雅典人，在學園早期就是柏拉圖的親密助手。在他死後不久，柏拉圖寫了一篇以他命名的對話《泰特托斯》用以紀念他。泰特托斯對於數學的主要貢獻有二。其一是繼德俄多儒證明了  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , …,  $\sqrt{17}$  的無理性之後，泰特托斯進一步研究了一般的二次以及更高次的不盡根數，並討論了一些有關性質。歐幾里得《原本》第十卷中的某一些定理據信是出自於他的成果。其二是在已知的三種正多面體的構造方法之外，加上自己發現的正八面體和正二十面體的構造方法，並且證明了在五種正多面體之外不可能有其它正多面體。歐多克索斯是尼多斯人，他年輕時就慕名去雅典學園聆聽柏拉圖的演講。後來又帶著自己的一些學生來雅典，並很可能一起加入了柏拉圖學園。他對數學的最大貢獻是創立了關於比例的一個新理論，從而克服了不可公度量的發現給幾何學所帶來的危機。《原本》第五卷“比例論”主要採自歐多克索斯的工作。其次是建立了嚴謹的窮竭法，並用它證明了一些求積定理。雖然窮竭法起源安蒂豐(Antiphon)，但只有到了歐多克索斯，窮竭法才真正成為一種合格的幾何方法。此外他對天文學亦有重要貢獻。梅奈奇姆斯是歐多克索斯的學生，也是柏拉圖學園中的一員。他最大的功績是發現了圓錐曲線。他也研究過立方倍積問題，得到兩種幾何解法。很可能由此得到啓發，導致圓錐曲

線的發現。還有一些知名數學家也是屬於柏拉圖學派的，但關於他們的工作已無從查考。後來的大數學家歐幾里得 (Euclid) 早年也在柏拉圖學園裡攻讀過幾何學。事實上，他的《原本》中的大部分內容都是來源於柏拉圖學派數學的研究成果。美國數學史家 C.B. 波耶 (Boyer) 評論說：“雖然柏拉圖在數學研究方面沒有特別傑出的學術成果，然而他卻是那個時代的數學活動的核心，… 他對數學的滿腔熱忱沒有使他成為知名數學家，卻贏得了‘數學家的締造者’的美稱”。

而關於柏拉圖對數學之外的科學發展的影響，是褒貶不一的。H. 尤斯納 (Usener) 曾於 1884 年斷言學園是已知的第一個科學研究機關。由此引起的爭議迄今尚無定論。持反對態度的人將學園和現代的政治學院或法學院作比較，後者的方向完全是實用的。他們認為，柏拉圖的本意並非進行百科全書式的科學教育，也不是為了促進科學的全面發展，學園也不是讓一切科學都得以研究的場所；它只是出於智力訓練的目的才選教一些學科，並作一些基礎研究的，以便為哲學和制訂法律服務。雖然在《蒂邁歐》篇中提供柏拉圖本人對於醫學和生理學表現出濃厚的興趣的證據，在《政治家》篇中表現對於製造工藝的關注，在《克里底亞》篇中提出關於雅典地質的奇妙的綱要，在《法律》篇中也表現他對歐多克索斯的天體學說的支持… 等等。這些足以說明柏拉圖對自然科學的廣博知識和強烈愛好，但似乎還不足以證實學園已經成為一個科學研究機構的說法。這些爭論恐怕難得有統一的時候，但人們似乎會同意當代著名數學家 A. 懷特海 (Whitehead) 的名言：“在柏拉圖的宇宙設想的背後，始終閃耀著一個強烈的信念，即數學知識終將被證明是解開天地間種種聯繫的奧秘的鑰匙。”

## 文 獻

- [1] B. Jowett, *The dialogues of Plato*, 5 vols, Oxford, 3rd ed., 1892; reprint, 1931。
- [2] H. Hamilton and H. Cairns, *The collected dialogues of Plato*, including the letters, Princeton, 7th ed., 1973。
- [3] L.A. Post, *Thirteen epistles of Plato*, Oxford, 1925。
- [4] F.M. Cornford, *The republic of Plato*, Oxford, 1947。
- [5] 柏拉圖，理想國，吳獻書譯，商務印書館，第一版 1929；重印，1957
- [6] 柏拉圖，理想國，郭斌和，張竹明譯，商務印書館，第一版，1986。
- [7] D.J. Allan, *Plato, Dictionary of scientific biography*, vol XI, 22 – 31。
- [8] A.E. Taylor, *Plato, the man and his work*, London, 2nd ed., 1927
- [9] C.J. Rowe, *Plato*, the Harvester Press, 1984。
- [10] D. Laertius, *Lives of eminent philosophers*, the Loeb Classical Library, 1925。
- [11] F.M. Cornford, *Plato's theory of knowledge : the < Theatetus > and < Sophist > of Plato*, Indianapolis, 1957。
- [12] F. Lasserre, *The birth of mathematics in the age of Plato*, London, 1964。
- [13] R.S. Brumbaugh, *Plato's mathematical imagination : the mathematical passages in the Dialogues and their interpretation*, Bloomington, 1954。
- [14] 范明生，柏拉圖哲學述評，上海人民出版社，1984。

- [15] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. 1, Oxford, 1st ed., 1921 ; reprint, 1981 。
- [16] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972 。
- [17] W.F. Hegel, *Vorlesungen über die geschichte der philosophie* (中譯本：黑格爾，哲學史講演錄，商務印書館，新一版 1960 ；重印，1981，第二卷)。
- [18] B. Russell, *History of western philosophy*, London, 1955 (中譯本：B. 羅素，西方哲學史(上、下卷)，商務印書館，1981)
- [19] D.W. Hamlyn, *History of epistemology* (中譯本：西方認識論簡史，中國人民大學出版社，1987)。
- [20] C.B. Boyer, *A history of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968 。
- [21] S.F. Mason, *A history of the science*, 1962 (中譯本：S.F. 梅生，自然科學史，上海譯文出版社，1980)。