歐　幾　里　得

歐幾里得 (Euclid， 拉丁文爲 Euclides 或 Eucleides) 約生於公元前 325 年， 約卒於公元前 265 年， 活躍於古希臘文化中心亞歷山大。 數學。

歐幾里得之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Euclid.html

歐　幾　里　得

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

歐幾里得 (Euclid， 拉丁文爲 Euclides 或 Eucleides) 約生於公元前 325 年， 約卒於公元前 265 年， 活躍於古希臘文化中心亞歷山大。 數學。

歐幾里得以其所著的《原本》(*Elements*) 聞名於世， 他的名字在二十世紀以前一直是幾何學的同義詞， 而對於他的生平， 現在知道的卻很少。 他生活的年代， 是根據下列的記載來確定的。 雅典柏拉圖學園晚期的導師普羅克洛斯 (Proclus， 約公元 412 − 485 年) 在 450 年左右給歐幾里得《原本》卷 I 作註， 寫了一個《幾何學發展概要》， 常稱爲《普羅克洛斯概要》(*Proclus's summary*)， 簡稱《概要》， 是研究希臘幾何學史的兩大重要原始參考資料之一。 另一種資料是帕波斯 (Pappus) 的《數學彙編》(*Mathematical collection*)， 下面簡稱《彙編》。《概要》中指出， 歐幾里得是托勒密一世 (The First Ptolemy， 約公元前 367 − 前 282 年， 前 323 − 前 285 年在位， 托勒密王朝的建立者) 時代的人， 早年求學於雅典， 深知柏拉圖的學說。 他著《原本》時引用許多柏拉圖學派人物如歐多克索斯 (Eudoxus)、 泰特托斯 (Theaetetus ， 約公元前 417 − 前 369 年) 的成果， 可能他也是這個學派的成員。《概要》又說阿基米德 (Archimedes) 的書引用過《原本》的命題[1]， 可見他早於阿基米德， 也早於埃拉托塞尼 (Eratosthenes)。

[1]這是指阿基米德《論球與圓柱》(*On the sphere and the cylinder*) 卷 I 命題 6 中明確地指出引用了《原本》卷 XII 命題 2 的證明， 見 E.J. Dijksterhuis， *Archimedes*， Ejnar Munksgaard， 1956， p. 153。 1950 年丹麥數學家 J. 耶勒姆斯萊夫 (Hjelmslev， 1973 fpt− 1950) 斷言 "引用歐幾里得" 這句話是後人添加上去的。 但經過多方考察仍然可以肯定阿基米德認眞參考了歐幾里得《原本》。

通過亞里士多德 (Aristotle) 的著作， 也可以核對歐幾里得的年代。《原本》中建立公設、公理， 顯然受到亞里士多德邏輯思想的影響。 亞里士多德在《分析前篇》(*Prior analytics*) 中給出 “等腰三角形兩底角相等” 的 “證明”， 和《原本》卷 I 命題 5 完全不同， 也沒有提到歐幾里得[2]。 可見《原本》的證明是歐幾里得後來完成的， 他的活動年代應在亞里士多德之後。

另一方面， 歐幾里得的天文著作《觀測天文學》(*Phaenomena*) 曾引用奧托利科斯 (Autolycus of Pitane， 約公元前 300 年)《運行的天體》(*On moving sphere*) 的命題。 而奧托利科斯是阿塞西勞斯 (Arcesilaus， 約公元前 315 − 前 241 年， 曾是柏拉圖學園導師) 的老師。

此外， 帕波斯在《彙編》(卷 7) 中提到阿波羅尼奧斯 (Apollonius) 長期住在亞歷山大， 和歐幾里得的學生在一起。 這說明歐幾里得在亞歷山大教過學。

綜上所述， 歐幾里得活躍時期應是公元前 300 − 前 295 年前後。

《概要》還記述了這樣一則軼事： 托勒密王問歐幾里得， 除了他的《原本》之外， 有沒有其它學習幾何的捷徑。歐幾里得回答道：“幾何無王者之道” (μὴ εἶναι βασιλικὴν ’ατραπὸν ’επὶ γεωμετρίαν) 意思是在幾何學裡， 沒有專門爲國王鋪設的大路 (見 [6]， p.155)。 這句話後來推廣爲 “求知無坦途”， 並成爲傳誦千古的箴言。 斯托比亞斯 (Stobaeus， 約公元 500 年)[3]的記載略有差異， 他認爲這是梅奈奇姆斯 (Menaechmus) 對亞歷山大王說的話：“在國家裡有老百姓走的小路， 也有爲國王鋪設的大道， 但是在幾何裡， 道路只有一條！ ”(見 [12]， p.92)。 現多數學者取前說。 理由是在梅奈奇姆斯的時代， 幾何學尚未形成嚴整的獨立學科。

---

[2]見 T. L. Heath, *Mathematics in Aristotle*， Oxford Press， 1949， p. 23。
[3]選集的編者， 編過五百多個希臘作家的選集。

斯托比亞斯還記載另一則故事，說一個學生才開始學習第一個命題，就問學了幾何學之後將會得到些什麼。歐幾里得說：“給他三個錢幣，因爲他想在學習中獲取實利”(見 [13]，p.152)。由此可知歐幾里得主張學習必須循序漸進、刻苦鑽研，不贊成投機取巧的作風，也反對狹隘實用觀點。帕波斯特別讚賞歐幾里得的謙遜，他從不掠人之美，也沒有聲稱過哪些是自己的獨創。而阿波羅尼奧斯則不然，他過分突出自己，明明是歐幾里得已經研究過的工作，但他在《圓錐曲線論》(*Conics*) 中也沒有提到歐幾里得 (見 [7]，p.203)。

除《原本》之外，歐幾里得還有不少著作，可惜大都已失傳。幾何著作保存下來的有《已知數》(*The data*)、《圖形的分割》(*On divisions*)，此外還有光學、天文學和力學等，多已散失。

《原本》產生的歷史背景

歐幾里得《原本》是一部劃時代的著作。其偉大的歷史意義在於它是用公理方法建立起演繹體系的最早典範。過去積累下來的數學知識，是零碎的、片斷的，可以比作木石、磚瓦。只有藉助於邏輯方法把這些知識組織起來，加以分類、比較，揭露彼此間的內存聯繫，整理在一個嚴密的系統之中，才能建成巍峨的大廈。《原本》完成了這一艱巨的任務，對整個數學的發展產生了深遠的影響。

《原本》的出現不是偶然的，在它之前，已有許多希臘學者做了大量的前驅工作。從泰勒斯算起，已有三百多年的歷史 (見 [11])。泰勒斯是希臘第一個哲學學派 —— 伊奧尼亞學派的創建者。他力圖擺脫宗教，從自然現象中去尋找眞理，對一切科學問題不僅僅回答 “怎麼樣”？還要回答 “爲什麼這樣”？他對數學的最

大貢獻是開始了命題的證明，爲建立幾何的演繹體系邁出了可貴的第一步。

接著是畢達哥拉斯學派，用數來解釋一切，將數學從具體的事物中抽象出來，建立自己的理論體系。他們發現了勾股定理，不可通約量，並知道五種正多面體的存在，這些後來都成爲《原本》的重要內容。這個學派的另一特點是將算術和幾何緊密聯繫起來，爲《原本》算術的幾何化提供了線索。

在希波戰爭[4]以後，雅典便成爲人文薈萃的中心。而雅典的智者 (sophist) 學派提出幾何作圖的三大問題：(1) 三等分任意角；(2) 倍立方 —— 求作一立方體，使其體積等於已知立方體的兩倍；(3) 化圓爲方 —— 求作一正方形，使其面積等於一已知圓。問題的難處，是作圖只許用直尺 (沒有刻度，只能劃直線的尺) 和圓規。希臘人的興趣並不在於圖形的實際作出，而是在尺規的限制下從理論上去解決這些問題。這是幾何學從實際應用向演繹體系靠攏的又一步。作圖只能用尺規的限制最先是伊諾皮迪斯 (Oenopedes，約公元前 465 年) 提出的，後來《原本》用公設的形式規定下來[5]，於是成爲希臘幾何的金科玉律。

智者學派的安蒂豐 (Antiphon) 爲了解決化圓爲方問題，提出頗有價値的 “窮竭法”(method of exhaustion)。孕育著近代極限論的思想。後來經過歐多克索斯的改進，使其嚴格化，成爲《原本》中的重要證明手法，其中較有代表性的是卷 XII 的命題 2 (見 [2]，vol 3，p.365；[9]，p.230)。

埃利亞 (義大利半島南端) 學派的芝諾 (Zeno of Elea) 提出四個著名的悖論，迫使哲學家和數學家深入思考無窮的問題。無窮歷來是爭論的焦點，在《原本》中，歐幾里得實際上是迴避了這一矛盾。例如卷 IX 命題 20 說：“質數的個數比任意給定的質數都

---

[4]希臘各城邦反抗波斯侵略的戰爭，從公元前 500 年到前 449 年，以波斯失敗而告終。

[5]《原本》卷 I 給出 5 個公設，頭三個就是對作圖的規定：(1) 從任一點到另一點可作一直線；(2) 線段可任意延長；(3) 以任意中心，任意半徑可作一圓。根據這幾條公設，作圖只需也只可用直尺圓規。

多”[6]， 而不用我們現在更簡單的說法： 質數無窮多。 只說直線可任意延長而不是無限延長。

原子論學派的德謨克利特 (Democritus， 約公元前 410 年) 用原子法得到的結論： 錐體體積是同底等高柱體的 1/3， 後來也是《原本》中的重要命題。

柏拉圖學派的思想對歐幾里得無疑產生過深刻的影響。 柏拉圖非常重視數學， 特別強調數學在訓練智力方面的作用， 而忽視其實用價值。 他主張通過幾何的學習培養邏輯思維能力， 因爲幾何能給人以強烈的直觀印象， 將抽象的邏輯規律體現在具體的圖形之中。

這個學派的重要人物歐多克索斯創立了比例論， 用公理法建立理論， 使得比例也適用於不可通約量。 《原本》卷 V 比例論大部分採自歐多克索斯的工作。

柏拉圖的門徒亞里士多德是形式邏輯的奠基者， 他的邏輯思想爲日後將幾何整理在嚴密的體系之中創造了必要的條件。

到公元前四世紀， 希臘幾何學已經積累了大量的知識， 邏輯理論也漸臻成熟， 由來已久的公理化思想更是大勢所趨。 這時， 形成一個嚴整的幾何結構已是 “山雨欲來風滿樓” 了。

建築師沒有創造木石磚瓦， 但利用現有的材料來建成大廈也是一項不平凡的創造。 公理的選擇， 定義的給出， 內容的編排， 方法的運用以及命題的嚴格證明都需要有高度智慧並要付出巨大的勞動。 從事這宏偉工程並不是個別的學者， 在歐幾里得之前已經有好幾個數學家曾做過這種綜合整理工作。 其中有希波克拉底 (Hippocrates， 約公元前 460 年)， 勒俄 (Leo 或 Lenon， 公元前四世紀) 以及修迪奧斯 (Theudius， 公元前四世紀) 等。 但經得起歷史風霜考驗的， 只有歐幾里得《原本》這一套書。 在漫長的歲月裡， 它歷盡滄桑而能流傳千古， 表明它有頑強的生命力。 它的

[6]李善蘭、 偉烈亞力中譯本的譯文是： 任置若干數根 (質數)， 數根必不盡於此。

公理化思想和方法， 將繼續照耀著數學前進的道路。

《原本》的版本和流傳

歐幾里得本人的《原本》手稿早已失傳， 現在看到的各種版本都是根據後人的修訂本、 註釋本、 翻譯本重新整理出來的。 古希臘的海倫 (Heron)、 波菲里 (Porphyry， 約公元 233－309 年)、 帕波斯、 辛普里西奧斯 (Simplicius， 六世紀前半葉) 等人都註釋過。 最重要的是賽翁 (Theon of Alexandria， 約公元 390 年) 的修訂本， 對原文作了校勘和補充， 這個本子就是後來所有流行的希臘文本及譯本的基礎。 賽翁雖生活在亞歷山大， 但離開歐幾里得已有十九個世紀， 他究竟作了多少補充和修改， 在十九世紀以前是不清楚的。

十九世紀初， 拿破侖稱雄歐洲， 1808 年他在梵蒂岡圖書館找到一些希臘文的手稿， 帶回巴黎去。 其中有兩種歐幾里得著作的手抄本， 以後為 F. 佩拉爾 (Peyrard， 1760－1822) 所得到 (見 [2]， p.46－47、 p.103)。 1814 －1818 年， 佩拉爾將兩種書用希臘文、 拉丁文、 法文三種文字出版， 一種就是《原本》， 另一種是《已知數》， 通常叫做梵蒂岡本。 《原本》的梵蒂岡本和過去的版本不同， 過去的版本都聲稱來自賽翁的版本， 而且包含卷 VI 命題 33 (在等圓中， 無論是圓心角或者是圓周角， 兩角之比即等於所對弧之比)。 賽翁在註釋托勒密 (Ptolemy) 的書時自稱他在註《原本》時曾擴充了這個命題並加以證明。 而梵蒂岡本沒有上述內容， 可見是賽翁之前的本子， 當更接近歐幾里得原著 (見 [7]， p.207)。

在九世紀以後， 大量的希臘著作被翻譯成阿拉伯文。 《原本》的阿拉伯文譯本主要有三種： (1) 赫賈季 (al–Ḥajjāj ibn Yūsuf， 九

世紀) 譯；(2) 伊沙格 (Isḥāq ibn Ḥunain，？－910) 譯，後來爲塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，約 826－910) 所修訂，一般稱爲伊沙格－塔比本；(3) 納西爾丁 (Naṣīr ad-Dīn al Tūsī，1201－1274) 譯。

現存最早的拉丁文本是在 1120 年左右由阿德拉德 (Adelard of Bath，1120 左右) 從阿拉伯文譯過來的。後來杰拉德 (Gerard of Cremona，約 1114－1187) 又從伊沙格－塔比本譯出。在 1255 年左右，坎帕努斯 (Campanus of Novara，？－1296) 參考數種阿拉伯文本及早期的拉丁文本重新將《原本》譯成拉丁文。經過兩百多年之後 (1482) 以印刷本的形式在威尼斯出版，這是西方最早印刷的數學書。在這之後到十九世紀末，《原本》的印刷本用各種文字出了一千版以上。從來沒有一本科學書籍像《原本》那樣長期成爲廣大學子傳誦的讀物。它流傳之廣，影響之大，僅次於基督敎的《聖經》。

十五世紀以後，學者們的注意力轉向希臘文本，B. 贊貝蒂 (Zamberti，約生於 1473) 第一次直接從賽翁的希臘文本譯成拉丁文，1505 年在威尼斯出版。

目前權威的版本是由 J.L. 海伯格 (Heiberg，1854－1928，丹麥人)、H. 門格 (Menge) 校訂註釋的 "*Euclidis opera omnia*"(《歐幾里得全集》，1883－1916 出版)，是希臘文與拉丁文對照本。最早完整的英譯本 (1570) 的譯者是 H. 比林斯利 (Billingsley，？－1606)。現在最流行的標準英譯本是 T.L. 希思 (Heath，1861－1940，英國人) 譯註的 "*The thirteen books of Euclid's Elements*"(《歐幾里得原本十三卷》，1908 初版，1925 再版，1956 修訂版)，這書譯自上述的海伯格本，附有一篇長達一百五十多頁的導言，實際是歐幾里得研究的歷史總結，又對每章每節都作了詳細

的註釋。對其它文字的版本，包括義、德、法、荷、西、瑞典、丹麥以及現代希臘等語種，此書導言均有所評論。

中國最早的漢譯本是 1607 年 (明萬曆 35 年丁未) 義大利傳教士利瑪竇 (Matteo Ricci， 1552－1610) 和徐光啓 (1562－1633) 合譯出版的。這是中國近代翻譯西方數學書籍的開始，從此打開了中西學術交流的大門。所根據的底本是德國人 C. 克拉維烏斯 (Clavius，1537－1612) 所校訂增補的拉丁文本 "*Euclidis Elementorum Libri XV*"《歐幾里得原本十五卷》，1574 初版，以後再版多次。徐、利譯本只譯了前六卷，定名爲《幾何原本》，"幾何" 這個名稱就是這樣來的。

有的學者認爲元代 (十三世紀)《原本》已經傳入中國，根據是元代王士點、商企翁《元秘書監志》卷 7"回回書籍" 條有《兀忽列的四擘算法段數十五部》的書目，其中兀忽列的應是 Euclid 的音譯 (見 [15]，p.139；[16])。但也有可能仍是阿拉伯文本，但只是譯出書名而已[7]。後說似更可信。

克拉維烏斯本是增補本，和原著有很大出入。原著只有十三卷，卷 XIV，XV 是後人添加上去的。卷 XIV 一般認爲出自許普西克勒斯 (Hypsicles，約公元前 180) 之手，而卷 XV 是六世紀初大馬士革烏斯 (Damascius，敍利亞人) 所著 (見 [12]，p.119、182)。

利瑪竇、徐光啓共同譯完前六卷後，徐光啓 "意方銳，欲竟之"，利瑪竇不同意，說："止，請先傳此，使同志者習之，果以爲用也，而後徐計其餘。"[8] 三年之後，利瑪竇去世，留下校訂的手稿。徐光啓據此將前六卷舊稿再一次加以修改，重新刊刻傳世。他對未能完成全部的翻譯而感遺憾，在《題〈原本〉再校本》中感嘆道："續成大業，未知何日，未知何人，書以俟

[7]李約瑟 (Joseph Needham)《中國科學技術史》(*Science & civilization in China*，1959) 中譯本第三卷 (1978)，p.235。馬堅《〈元秘書監志〉"回回書籍" 釋義》。載《光明日報》1955 年 7 月 7 日。

[8]利瑪竇《譯〈原本〉引》。

焉。”

整整 250 年之後， 直到 1857 年， 後九卷才由英國人偉烈亞力 (Alexander Wylie， 1815 – 1887) 和李善蘭 (1811 – 1882) 兩人來共同譯出。 但是根據的底本已不是克拉維烏斯的拉丁文本而是另一種英文版本。 偉烈亞力在序中只提到底本是從希臘文譯成英文的本子， 按照英譯本的流傳情況， 可能性最大爲 I. 巴羅 (Barrow， 1630 – 1677， 牛頓的老師) 的十五卷英譯本[9]， 他在 1655 年將希臘文本譯成拉丁文， 1660 年又譯成英文。

李、 偉譯本 (通稱 “淸譯本”) 至今已有一百多年了， 現已不易看到， 況且又是文言文， 名詞術語和現代有很大差異， 這更增了研讀的困難， 因此重新翻譯是十分必要的[10]。

徐、 利前六卷的譯本 (通稱 “明譯本”) 在 “原本” 之前加上 “幾何” 二字， 稱譯本爲《原本》。 淸譯本的後九卷沿用這個名稱一直到現在。 這 “幾何” 這二字是怎樣來的？目前有三種說法： (1) 幾何是拉丁文 geometria 字頭 geo 的音譯。 此說頗爲流行， 源出於約瑟艾金 (Joseph Edkins， 1825 – 1905， 英國人) 的猜想， 並記在日本中村正直 (1832 – 1891) 爲某書所寫的序中[11]。 (2) 在漢語裡，“幾何” 原來是多少、 若干的意思， 而《原本》則實際包括了當時的全部數學， 因此幾何就是 “mathematica ” (數學) 或 “magnitude”(大小) 的意譯。 (3)《原本》前六卷講幾何， 卷 VII–X 是數論， 但全用幾何方式來敍述， 其餘各章也講幾何， 所以基本上是一部幾何書。 其內容和中國傳統的算學很不相同。 爲了區別起見， 故應創新詞來表達。 而且幾何這二字旣和 “geometria” 的字頭音近， 又反映了數量大小的關係， 採用這兩個字可以音、 意兼顧。 這也許更接近徐、 利二氏的原意。

[9]錢寶琮《中國數學史》， 科學出版社， 1964， p.324。
[10]新譯本已於 1990 年由陝西科技出版社出版。
[11]林鶴一《和算研究集錄》下卷， 東京開成館， 1937， p.403。

明、清譯本因爲是修訂增補本，和現行的希思英譯本有相當大的出入，下面以希思本爲主，兼顧明、清譯本，作一簡要的介紹。

卷 I 首先給出 23 個定義。如 1. 點是沒有部分的 (A point is that which has no part)；2. 線只有長而沒有寬 (A line is breadthless length)··· 等等。還有平面、直角、垂直、鋭角、鈍角、平行線等定義。前七個定義實際上只是幾何形象的直觀描述，後面的推理是完全沒有用到。

明譯本 (即克拉維烏斯增補本) 在原文的基礎上加入很多說明，將 23 個定義拆成 "界說三十六則"。一開頭還對 "界說" 加以界說："凡造論，先當分別解說論中所用名目，故曰界說。" 下面指出幾何研究的對象："凡論幾何，先從一點始，自點引之爲線，線展爲面，面積爲體，是名三度。" 由此可見在明譯本中，幾何 (幾何學) 所研究的是由點、線、面、體構成的圖形，和數學研究的對象不同，兩者間有廣狹之分。但是在別的地方，幾何就是 "大小"、"多少" 的意思，即通常所說的 "量"，和 "數" 是有區別的。如卷 V 第 2 界："若小幾何能度大者，則大爲小之幾倍"，現可譯爲 "當一個較大的量能被較小的量量盡時，較大的量叫做較小量的倍量 (multiple)"。

定義之後，是 5 個公設，頭 3 個是作圖的規定，第 4 個是 "凡直角都相等"。這幾個都是顯而易見的，沒有引起什麼爭論，第 5 個就很複雜："若一直線與兩直線相交，所構成的同旁內角小於二直角，那麼，把這兩直線延長，一定在那兩內角的一側相交"。這就是後來引起許多糾紛的 "歐幾里得平行公設" 或簡稱第 5 公設。

公設後面，還有 5 條公理，如 1. 等於同量的量彼此相等；5.

整體大於部分 ⋯ 等等。 以後各卷不再列其它公理。 在《原本》中， 公設 (postulate) 主要是關於幾何的基本規定， 而公理 (axiom) 是關於量的基本規定。 將兩者分開是從亞里士多德開始的 [12]， 現代數學則一律稱爲公理。

由於平行公設不像其它公理那麼簡單明了， 人們自然會懷疑， 歐幾里得把它列爲公設， 不是它不可能證明， 而是沒有找到證明。 這實在是這部千古不朽巨著的白璧微瑕。 從《原本》的產生一直到十九世紀初， 許多學者投入無窮無盡的精力， 力圖洗刷這唯一的 "污點"， 最後導致非歐幾何的建立。

這一卷在公理之後給出 48 個命題。 前四個是：

1. 在已知線段上作一等邊三角形。

2. 以已知點爲端點， 作一線段與已知線段相等。

3. 已知大小二線段， 求在大線段上截取一線段與小線段相等。

4. 兩三角形兩邊與夾角對應相等， 則這兩三角形相等。

這裡兩三角形 "相等"， 指的是 "全等"， 但是在這一卷命題 35 以後， 相等又有另外的含義， 它可以指面積相等。 但現在已把圖形全等 (congruent) 與等積 (equiareal 或 equivalent) 區分開來， 而在《原本》中是用一個字眼 (equal) 來表示的 (見 [2]， p.327)。 不過歐幾里得從來沒有把面積看作一個數來運算， 面積相等是 "拼補相等" [13]。

命題 5 頗有趣： 等腰三角形兩底角相等， 兩底角的外角也相等。

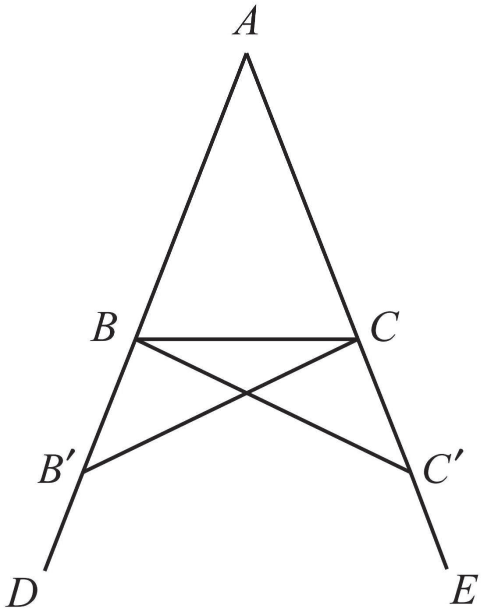
現在通常是用引頂角平分線來證明的， 不過作角的平分線是命題 9， 這裡還不能用， 只能利用前四個命題以及公設、 公理來

[12] T. L. Heath， *Mathematics in Aristotle*， Oxford Press， 1949， p.52、 56、 57。

[13] 這是後來希爾伯特 (D. Hilbert) 在《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*， 1930) 中使用的術語。 他先定義 "剖分相等" (zerlegungsgleich， divisibly–equal)： 如果將圖形 A 剖分有限多塊， 可以拼湊成另一圖形 B，則說 A 與 B 剖分相等。 進一步定義 "拼補相等"(inhaltsgleich， equal in content)： 設 C 與 D 剖分相等， A 與 C 合併成 A'， B 與 D 合併成 B'， 如果 A' 與 B' 剖分相等， 則說 A 與 B 拚補相等。 見中譯本， 科學出版社， 1958， p.104。

證。

證法是延長 AB 至 D， AC 至 E[公設 2]， 在 AD 上任取一點 B'， 以及在 AE 上截取 $AC' = AB'$ [命題 3]， 接著連接 $B'C$ 與 BC'， [公設 1]。 接著證 $\triangle AB'C \cong \triangle ABC'$[命題 4]， 故



$$B'C = BC'，$$
$$\angle BB'C = \angle CC'B，$$

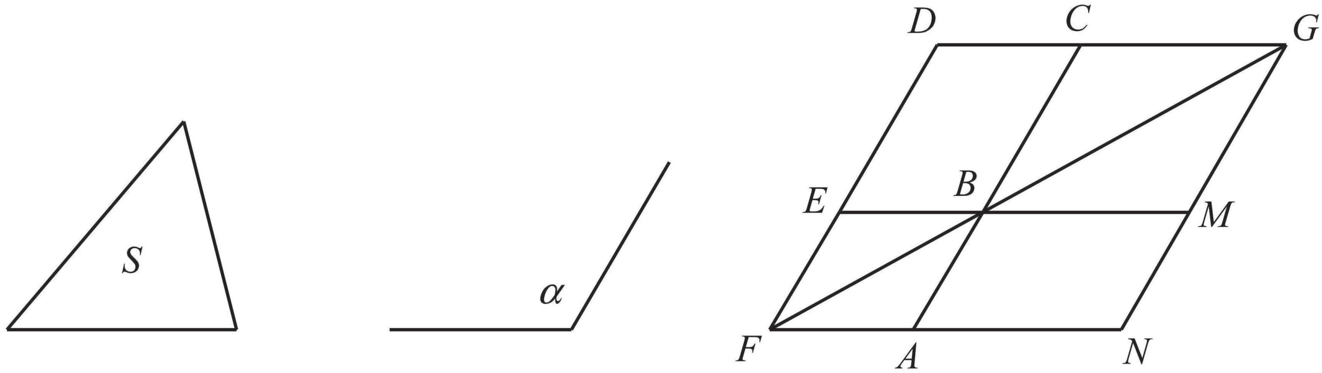
又 $BB' = CC'$， 於是可得 $\triangle BB'C \cong \triangle CC'B$。 由此不難推出命題的結論。

中世紀時， 歐洲數學水準很低， 學生初讀《原本》， 學到命題 5， 覺得線和角很多， 一時很難領會， 因此這個命題被戲稱為 “驢橋”(pons asinorum， asses’ bridge 意思是 “笨蛋的難關”) [14]。

後面的命題包括三角形、 垂直、 平行、 直線形 (面積) 相等等關係。

命題 44： 用已知線段為一邊， 作一個平行四邊形， 使它等於已知三角形， 且有一個角等於已知角。

設 AB 是已知線段， S 是已知三角形， α 是已知角。



延長 AB，並作 $\angle EBC = \alpha$，根據命題 43，可作一個 $\square EBCD$=S。過 A 作 FA 平行 EB 交 ED 的延長線於 F，連 FB 並延長之，交 DC 的延長線於 G(因 $\angle EDC$ 與 $\angle DEB$ 是

[14]“驢橋” 還有另一種解釋， 認為證明時所畫的圖形像一座高架橋， 只有腳步穩健的驢才過得去， 見 [2]， vol， I， p.415。

互補的，但 $\angle EFB < \angle DEB$，故 $\angle EDC + \angle EFB$ 小於二直角，按平行公設，FB 與 DC 延線必相交)，過 G 作 GN 平行 BC 並分別交 EB、FA 的延長線於 M、N。因爲已知 $\square ANMB = \square EBCD = S$，故 $\square ANMB$ 即爲所求。

歐幾里得的術語是 "將平行四邊形 $ANMB$ 貼合到線段 AB 上去"。普羅克洛斯評註《原本》時指出，"面積的貼合"(application of areas) 是古希臘幾何學的一種重要方法，它是畢達哥拉斯學派發現的 (見 [2]，vol. I，p.343)。

如果已知角 α 是直角，則所求的平行四邊形是矩形，矩形另一邊未知，設爲 x。命題化爲解一次方程 $ax = S$ 的問題，或用幾何作圖進行除法 $S \div a$ 運算的問題。

命題 47 就是有名的勾股定理："在直角三角形斜邊上的正方形等於直角邊上的兩個正方形。" 這裡相等仍然是指拼補相等，不牽涉到長度、數的關係。本卷最後一個命題 (命題 48) 是勾股定理的逆定理。

卷 II 包括 14 個命題，用幾何的形式敘述代數的問題，即所謂 "幾何代數學"(geometrical algebra)。將一個數 (或量) 用一條線段來表示，兩數的積說成兩條線段所構成的矩形，數的平方根說成等於這個數的正方形的一邊。

命題 1：設有兩線段，其中之一被截成若干部分，則此兩線段所構成的矩形等於各個部分與未截線段所構成的矩形之和。

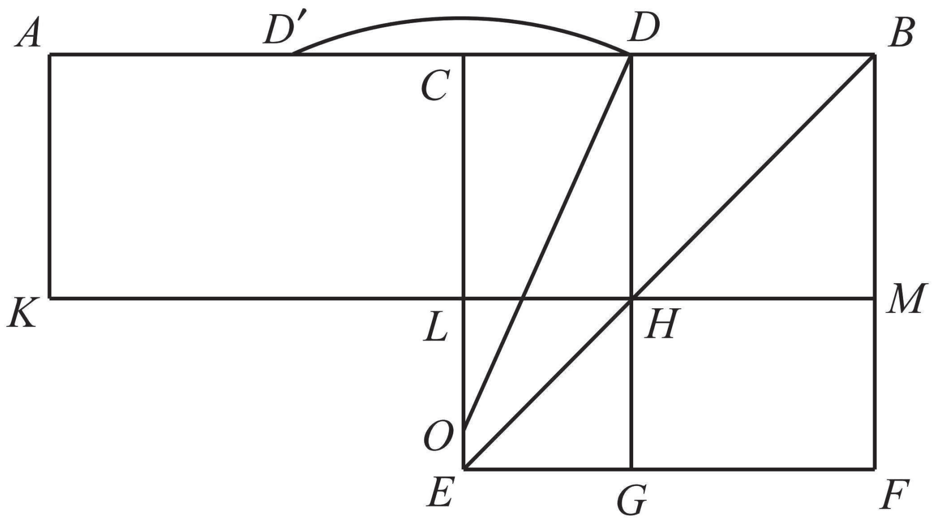
相當於恆等式

$$a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$$

命題 4: 將一線段任意分爲兩部分，在整個線段上的正方形等於在部分線段上的兩個正方形加上這兩部分線段所構成的矩形的二倍。相當於 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$。

命題 5 是值得注意的一個命題，它相當於二次方程的解法。今用現代術語、符號解釋如下：

設 C 是線段 AB 的中點，D 是另一任意點，則 AD 與 DB 所構成的矩形加上 CD 上的正方形等於 CB 上的正方形。



[證明]　完成 $\square CEFB$，連對角線 EB，作 $DG // CE$ 交 EB 於 H，過 H 作 $KM // AB$，作 $AK \perp KM$。

因爲 $\square AKLC = \square CLMB$，$\square CLHD = \square HGFM$，$DB = HD$，故 AD 與 DB 所構成的矩形 $= \square AKHD = \square AKLC + \square CLHD = \square CLMB + \square HGFM$，同加上 $CD (= LH)$ 上的正方形 $\square LEGH$，即得命題的結論。

1756 年，R. 西姆松 (Simson，1687 − 1768)[15] 註釋《原本》的英譯本時指出，將本命題 (記爲 II5) 稍加改變，即相當於二次方程的解法。

已知線段 $AB = a$，求其一上點 D，使 AD 與 DB 所構成的矩形等於已知 $\square b^2$(以 b 爲邊的正方形)。設 $DB = x$，列成方程得 $(a - x)x = b^2$ 或 $x^2 - ax + b^2 = 0$。由 II5，AD 與 DB 所構成的 $\square AKHD$=$\square CEFB - \square LEGH$，利用勾股定理 (I47)，作一個正方形等於二正方形的差是輕而易舉的，現 $\square CEFB$，$\square b^2$ 已知，作兩者之差即得 $\square LEGH$，由此得 CD 及 x。具體的作法是：取 AB 中點 C，作 $CE \perp AB$，在 CE 上取 O 點，使 $OC = b$，以 O 爲心，CB 爲半徑作弧交 AB 於 D、D'，則

[15] 英國數學家，格拉斯哥大學教授，幾何學中“西姆松線”的發現者。

D 就是所求的點， 由對稱性可知， 取 D' 也一樣。 和代數解法對照， $CB=\dfrac{a}{2}$， $CD^2=OD^2-OC^2=(\dfrac{a}{2})^2-b^2$， $x=DB$ (或 $D'B$)$=CB\pm CD=\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{(\dfrac{a}{2})^2-b^2}$， 和公式解法是一致的。

II5 的另一種形式是恆等式

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$$

其中 $a=AD$、 $b=DB$、 $\dfrac{a+b}{2}=CB$、 $\dfrac{a+b}{2}-b=\dfrac{a-b}{2}=CD$。 這是很有用的恆等式。

若令 $a=(2n+1)^2$、 $b=1$， 代入上式化簡爲

$$(2n+1)^2+(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1)^2。$$

則可得由畢達哥拉斯求出的勾股數組 (用正整數表示直角三角形的三邊)： $2n+1$、 $2n^2+2n$、 $2n^2+2n+1$。

與此相仿， 命題 6 則是相當於求解另一種類型的方程 $x^2+ax-b^2=0$。

命題 11： 分已知線段爲兩部分， 使它與一小線段所構成的矩形等於另一小線段上的正方形。 相當於解方程 $x^2+ax-a^2=0$。 這就是將線段分成 “中末比”， 後來叫做 “黃金分割” 的著名問題。 後面卷 IV 命題 10“作一等腰三角形， 使底角是頂角的兩倍”， 也就是作出 36° 及 72° 角， 從而能作出正五邊形和正十邊形。 卷 VI 命題 30： “截已知線段成中末比”， 都是同一問題的不同表現形式。 卷 XIII 命題 9 再次提出正十邊形、 正六邊形與中末比的關係， 可見歐幾里得很重視這個分割。

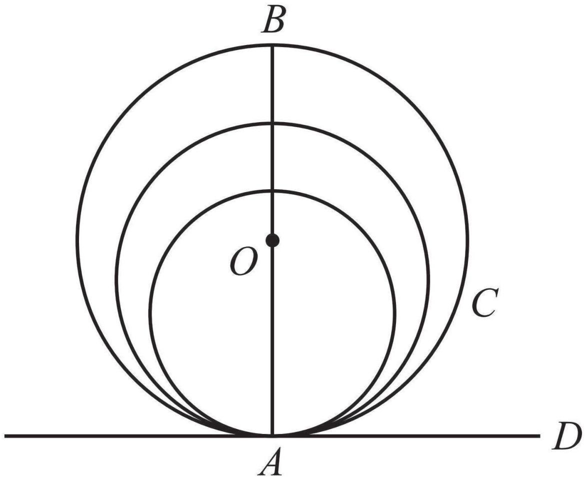
命題 12、 13 是三角學中的餘弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C，$$

不過也是用幾何的語言來敍述的， 沒有出現三角函數。

卷 III 有 37 個命題討論圓、弦、切線、圓周角、圓內接四邊形及有關圓的圖形等。

較引人注目的是命題 16：過直徑 AB 端點 A 的垂線 AD 必在圓外，半圓周 ACB 與 AD 之間不可能再插入其它直線，半圓周 ACB 與 AB 之間的角比任何銳角都大，剩下的角 ($\overset{\frown}{AC}$ 與 AD 間的角) 比任何銳角都小。



$\overset{\frown}{AC}$ 與 AD 間的角究竟算不算角? 在歷史上有很大爭論。在普羅克洛斯的評註中稱它爲 "牛角"(horn–like angle)，這綽號在歐幾里得以前早已有，在《原本》中沒有使用，也沒有說它的值是零。若作一系列切於 A 點的圓，似乎圓越小，"牛角" 越大，但命題的結論並非如此。如果說它的值是零，角邊應處處重合，而圖形不是這樣。這些疑問按現在曲線交角的定義已經解決，"牛角" 的值是零。

卷 IV 有 16 個命題，包括圓內接與外切三角形、正方形的研究，圓內接正多邊形 (五邊、十邊、十五邊) 的作圖。

最後一題是正十五邊形的作圖。普羅克洛斯認爲和天文學有關，因爲在埃拉托塞尼 (Eratosthenes，約公元前 276 − 前 195) 之前，希臘天文家認爲黃赤交角 (黃道與天球赤道交角) 是 $24°$，即圓周角 $360°$ 的 $1/15$。後來埃拉托塞尼測出的是 $180°$ 的 $11/83$，大約是 $23°51'20''$ [16]。

[16]黃赤交角隨著時間的推移略有減少，現代的精確值是 $23°27'8''$，古代測得的值較大是合理的。

卷 V 是比例論。 後世的評論家認爲這一卷是《 原本 》的最高的成就[17]。 畢達哥拉斯學派過去雖然也建立了比例論， 不過只適用於可公度量。 如果 A、 B 兩個量可公度， 即存在兩個正整數 m、 n 使得 $mA = nB$， 那麼 $\dfrac{A}{B} = \dfrac{n}{m}$ 就是一個數。 但若 A、 B 不可公度， 希臘人包括歐幾里得就根本不承認 $\dfrac{A}{B}$ 或 $A : B$ 是一個數。 畢達哥拉斯甚至認爲 A 與 B 無法相比。 這樣就很難建立關於一切量的比例理論。 擺脫這一困境的是歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus， 公元前四世紀)， 他用公理法重新建立了比例論， 使它適用於所有可公度與不可公度的量。 可惜他的著作已全部失傳， 好在還有相當一部分被保存在《 原本 》中， 如卷 V 就主要取材於歐多克索斯的工作， 當然也有歐幾里得本人的加工整理， 有的還散見於卷 XII、 VI、 X、 XIII 之中。

卷 V 首先給十八個定義。 定義 3： 比是兩個同類量之間的大小關係。 定義 4： 如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量， 則說這兩量有一個 “比”(ratio)。 這樣就突破了畢達哥拉斯認爲只有可公度量才可以比的限制。 實際上， 如果承認了 “阿基米德公理” 或 “歐多克索斯公理” (在卷 X 命題 1 正式使用)“兩個有限的同類量， 任一個加大適當的倍數後就能大於另一個”， 任何兩個有限量都有比， 不必考慮可否公度。 儘管不承認這個 “比” 是數， 仍然不妨礙以此爲起點建立適用於一切量的比例論。

現在已經有嚴格建立的實數理論和完整的比例論， 如果 $A : B = C : D$， 則有

$$mA : nB = mC : mD$$

(m， n 是任意正整數)， 從而

[17] I. 巴羅 (Barrow) 評論 (1666) 說： “在整個《 原本 》中， 再沒有比比例理論更精巧的創造、 更穩固的建立、 更妥善的安排了。 ” A. 凱萊 (Cayley) 說： “在數學中很難找到像令人讚嘆的 (《 原本 》) 第 5 卷那樣優美的篇章。 ”

由 $mA > nB$ 可推出 $mC > nD$，

由 $mA < nB$ 可推出 $mC < nD$，

由 $mA = nB$ 可推出 $mC = nD$。

這是比例的基本性質。《原本》巧妙地利用這一性質來作比例的定義，即

定義 4: 設有 A、B、C、D 四個量，A 與 C，B 與 D 分別乘以同樣的倍數 m、n，如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB\text{，可以推出 } mC \gtreqless nD\text{，}$$

則說兩個比 $A : B$ 與 $C : D$ 相等，即四個量可構成比例 $A : B = C : D$。

這定義是整個理論的基礎，由此推出 25 個有關比例的命題。

近代實數理論中的 "戴德金分割" 實際上受這比例定義的啓發[18]。

設有 A、B 二量，任取分數 $\dfrac{n}{m}$，比較 mA 與 nB 的大小。

如 $ma > nB$，$\dfrac{n}{m}$ 歸入第 1 類；

如 $ma < nB$，$\dfrac{n}{m}$ 歸入第 2 類；

如 $ma = nB$，$\dfrac{n}{m}$ 歸入第 3 類；

每一個分數必歸入一類且只歸入一類。設 $\dfrac{n_1}{m_1}$、$\dfrac{n_2}{m_2}$ 分別是第 1 類及第 2 類的分數，則由

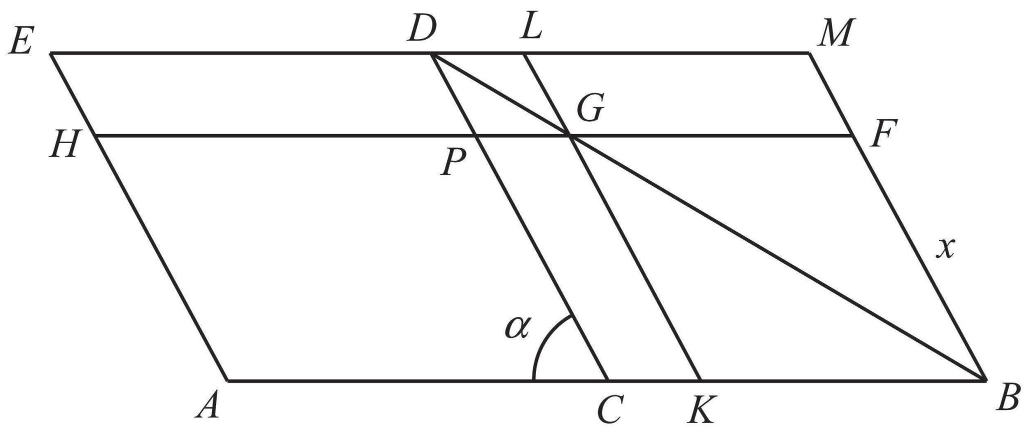
$$m_1A > n_1B\text{，}$$
$$m_2A < n_2B\text{，}$$

[18]參考 В.И.К.остин，Основания Геомерии，1948(中譯本：幾何學基礎，商務印書館，1954，p.20)。

兩式相除，得 $\frac{m_1}{m_2} > \frac{n_1}{n_2}$ 或 $\frac{n_2}{m_2} > \frac{n_1}{m_1}$，即第 2 類數必大於第 1 類的數，於是全體有理數構成一個 "戴德金分割"。如果 $mA = nB$，說明 A、B 可公度，$\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ 是一個有理數。如 A、B 不可公度，則得第 3 類數是空集，這一分割定義了一個無理數 α，α 就是 $\frac{A}{B}$ 的值。可以看出來，分割的思想和上述比例定義是一脈相承的。儘管兩者的思想很接近，但歐幾里得始終不把 $A : B$ 和數聯繫起來考慮，因而從來沒有出現 $A : B$ 與 $C : D$ 相加或相乘的情況。這是時代的局限性，無理數理論的產生，足足拖延了兩千多年。

卷 VI 把卷 V 已建立的理論用到平面圖形上去，共 33 個命題。處理相似直線形中的各種成比例的線段等。其中命題 30 頗重要。

命題 27：設 C 是線段 AB 中點，在 AC 上作 $\square ACDE$ [原文的說法是將平行四邊形貼合 (apply) 到 AB 上]，又在 AB 的部分線段 KB 上作 $\square KBFG \sim \square ACDE$，延長 FG 交 CD 於 P，交 AE 於 H，求證 $\square AKGH < \square ACDE$。



因 $\square KBFG \sim \square ACDE \sim \square CBMD$，故對角線 BG、BD 重合。$\square KBML = \square CBFP = \square ACPH$，此時兩端同時加上

$\square CKGP$， 即知

$\square AKGH =$ 磬折形 $PCBMLG < \square CBMD = \square ACDE$。

本題給出求極大極小的一種途徑。 和代數方法比較：

設 $AB = a$、 $AE = b$、 $\angle ACD = \alpha$、 $BF = x$， 則

$$KB : x = \frac{a}{2} : b、 KB = \frac{a}{2b}x、$$
$$AK = a - \frac{a}{2b}x、$$
$$\square AKGH \text{面積 } S = x\left(a - \frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha，$$

即

$$x^2 - 2bx + \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0。$$

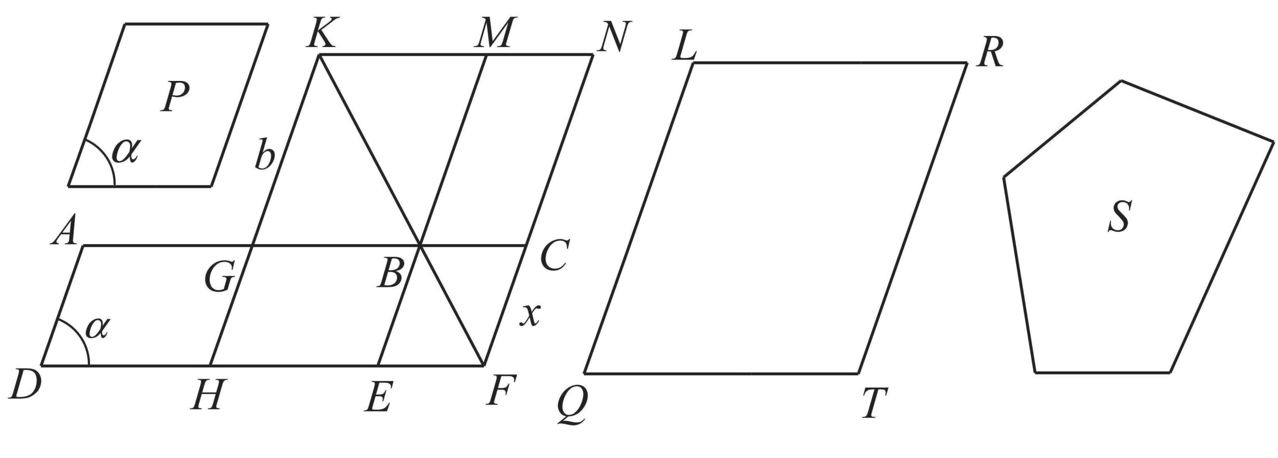
這二次方程有實根的充要條件是判別式非負， 即

$$S \le \frac{ab}{2}\sin\alpha，$$

這正是命題的結論。 $x = b$ 時 S 取最大值。

特例： 如果 $\alpha = 90^\circ$， $b = a/2$， 則 $\square ACDE$，$\square KBFG$ 都是正方形，$\square AKGH$ 是矩形， 它的周長是常數 $2a$。 於是推出有相同周長的矩形中， 以正方形面積最大的結論。

命題 29 相當於某種類型的二次方程解法： 作 $\square ADFC$ 貼合到 AB 上， 使其等於已知面積 S， 且 AC 邊超出 AB 的部分 BC 上的 $\square BEFC$ 與已知 $\square P$ 相似。



作法是取 AB 中點 G，在 GB 上作 $\square GBMK \sim \square P$，另作 $\square QTRL$，使其面積等於 $\square GBMK$ 與 S 之和 (根據 VI，25)，延長 KM 至 N、KG 至 H，使 $KN = LR$、$KH = LQ$，完成 $\square KHFN$，連對角線 KF，完成 $\square BEFC$、$\square ADFC$。因爲 $\square BCNM = \square HEBG = \square DHGA$，又 $\square HFNK = \square QTRL = \square GBMK + S$，故知

$$\begin{aligned}\text{磬折形}GHFNMB &= S = \square HFCG + \square BCNM \\ &= \square HFCG + \square DHGA = \square DFCA\text{。}\end{aligned}$$

故 $\square DFCA$ 即爲所求。

設 $AB = a$、$GK = b$、$FC = x$、$\angle ADF = \alpha$，則

$$\begin{aligned}&EF : x = \frac{a}{2} : b\text{、}EF = \frac{a}{2b}x\text{、}\\ &DF = a + \frac{a}{2b}x\text{、}\\ &\square DHCA = S = x\left(a + \frac{a}{2b}x\right)\sin\alpha\text{，}\end{aligned}$$

即

$$x^2 + 2bx - \frac{2bS}{a\sin\alpha} = 0\text{。}$$

本命題就是這二次方程的幾何解法。

《原本》多次使用 “貼合”(application，$\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\grave{\eta}$) 這個詞，而命題 27 所作的平行四邊形並未佔滿整個線段，這叫做 “不足”(falling short，$'\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\iota\varsigma$)，以及命題 29 超過了已知線段，則這就叫做 “過剩”(exceeding，$\grave{\upsilon}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$)。這些術語後來阿波羅尼奧斯用到圓錐曲線上，希臘文 “不足” 轉化成 ellipes (橢圓)，“過剩” 轉化爲 hyperbola (雙曲線)，“貼合” 變成 parabola (拋物線)。

卷 VII、VIII、IX 是數論，分別有 39、27、36 個命題討論正整數的性質與分類。數被看作是線段，兩數的乘積叫做平面

(plane) 或平面數 (定義 16)， 這兩個數叫做平面的邊。 三個數的乘積叫做立體 (solid) 或立體數 (定義 17)， 這三個數叫做立體的邊。

這一卷許多內容和卷 V 相同， 歐幾里得爲什麼不把卷 V 的結論直接搬過來用， 而非要重新論證一遍不可？這大概是他不把數看作普通的量， 因爲卷 V 中討論的量包括可以公度和不可公度量， 而這一卷只牽涉到有理數。 也可能是他認爲數論可以建立在較簡單的基礎上， 所以單獨處理[19]。

卷首共給出 22 個定義。 定義 20： 如果第 1 數之爲第 2 數的某個倍數或某個部分， 與第 3 數之爲第 4 數的某個倍數或某個部分相同[20]， 則這四個數成比例。 這定義完全回到畢達哥拉斯學派可公度量的比例論上去。

定義 22： 一個數等於它自身的部分 (即眞因子) 之和， 這數叫做完全數。

命題 1 、 2 就是 “歐幾里得輾轉相除法”(Euclidean algorithm) 的出處。 兩數輾轉相除， 最後得到最大公約數， 如最大公約數是 1， 則兩數互質。 命題 4 − 20 是數的比例問題， 命題 21 − 32 是關於質數的問題。

命題 30： 某質數能整除兩數之積， 則此質數必至少能整除兩數之一。 這在數論中是很重要的。

命題 31： 任何合數必被某一質數整除。 在證明中提出 “任何正整數集必有最小數”(現在叫做良序性) 的假定。

命題 33 − 39 討論最小公倍數。

卷 VIII 是講連比例 (實際就是等比數列)， 平面數， 立體數的性質。

卷 IX 有幾個命題是値得注意的。 命題 14： 如果某一數是被某些質數所整除的數中之最小者， 則這一數不能被這些質數以外的

[19] 另一種意見是歐幾里得還未來得及修訂《原本》就已去世， 以致留下這樣不恰當的安排。 此說出自 A. 德摩根 (De Mogan)《歐幾里得》(*Euclides*， 1846)， 又見 W.W.R. Ball， *A short account of the history of mathematics*， Dover Publications， 1908， p.58。

[20] 即兩個比値相等， 就可以構成比例。

任何質數整除。這就是算術基本定理：合數的質因子分解是唯一的。

命題 20：質數的個數比任意給定的質數都多。證明是用反證法，設 A、B、C 是給定的質數，則 $ABC+1$[21] 或者是質數或者含有異於 A、B、C 的質因子，兩者都可以推出有多於 A、B、C 的質數存在。

命題 35 導出了等比數列的求和公式，在形式上和現在常見的不同。

設 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n、a_{n+1} 是等比數列，命題結論是

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1}=\frac{a_2-a_1}{a_1}\text{。}$$

如將數列改寫爲 a、ar、ar^2、$\cdots$、ar^{n-1}、ar^n，並把前 n 項和記作 S_n，上式即化爲常見的形式

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\text{。}$$

接著命題 36 證明了數論中一個有名的定理：若 2^n-1 是質數，則 $(2^n-1)2^{n-1}$ 是完全數。

事實上，設等比數列 1、2、2^2、$\cdots$、2^{n-1} 的和 $P=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ 是質數，則 $2^{n-1}P$ 被下列各數整除：1、2、$\cdots$、2^{n-1}、P、$2P$、$\cdots$、$2^{n-2}P$ 且不被任何其它小於它自身的數整除，而這些因子的和正好等於 $2^{n-1}P$，

$$\begin{aligned}&1+2+\cdots+2^{n-1}+P+2P+\cdots+2^{n-2}P\\=\ &P+P(2^{n-1}-1)=(2^n-1)2^{n-1}\text{。}\end{aligned}$$

現在形如 2^n-1 (n 是質數) 的質數叫做 “梅森質數”，因 M. 梅森 (Mersenne，1588－1648) 曾深入研究而得名。有一個梅森質數就相應有一個完全數。前四個完全數 6、28、496、8128 已爲希臘人所知[22]。

---

[21] 原來的說法是：設 DE 是被 A、B、C 量盡的最小數，DE 加上單位 EF 是 DF。

[22] 載入尼科馬霍斯 (Nicomachus)《算術入門》第 16 章。

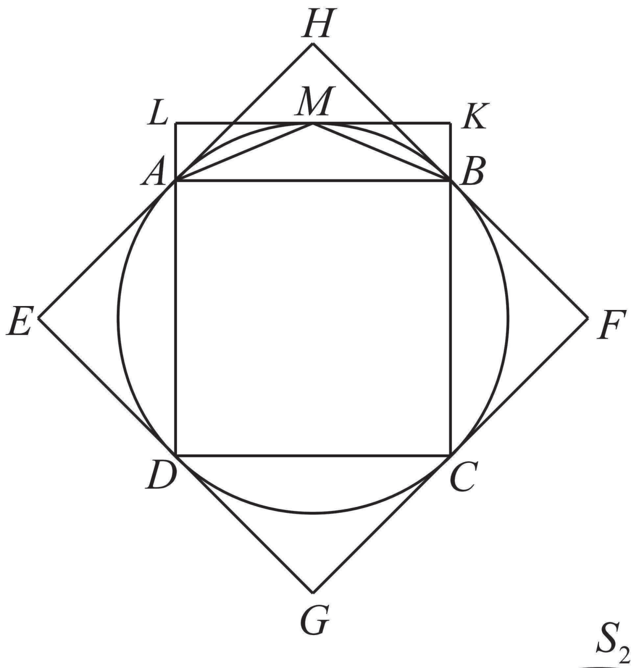
卷 X 是篇幅最大的一卷，約佔全書的 1/4，這和其它各卷不很相稱，包含 115 個命題，有版本是 117 個命題 (如清譯本)。主要討論無理量 (不可公度量)，但實際只牽涉到相當於 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 之類的無理量，即二次或四次不盡根，而這只是無理量的極小一部分，歐幾里得使用 "有理"、"無理" 的術語，但和現代的意義不同。"有理" 的原文是 $\grave{\rho}\eta\tau\acute{o}\varsigma$，這詞的原意是 "可表達的" (expressible)。後來才譯爲 "有理的"(rational)。如果給定一個叫做有理的線段 A，若另一線段 B 和 A 有公度，就說 B 是 "線段可公度有理量"。用現代的術語來說，就是設 A 是有理量 (線段)，m 是任意有理數，則 mA 是 "線段可公度有理量"。但若 m 不是平方數，則 $\sqrt{m}A$ 不是 "線段可公度有理量"，它叫做 "正方形可公度有理量"。意思是在 A 與 $B = \sqrt{m}A$ 上所作的正方形可公度。"正方形可公度" (commensurable in square) 是《原本》的特殊用語。"線段可公度有理量" 顯然都是 "正方形可公度有理量"，但反過來，"正方形可公度有理量" 可以不是 "線段可公度有理量，" 如 $\sqrt{m}A$，這種情形特別叫做 "僅正方形可公度有理量"，不管是那一種情形，都叫有理量。一個量平方以後仍然不可公度，例如 $\sqrt[4]{m}$，才叫做無理量。

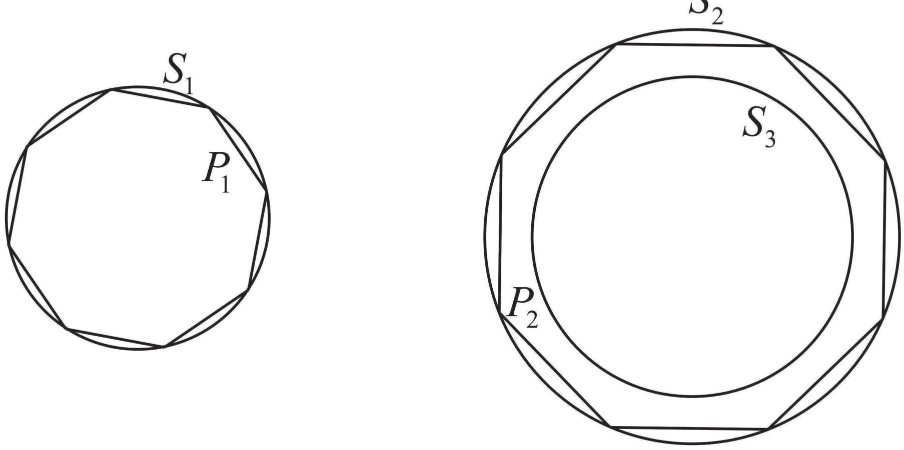
本卷將無理量分爲十三大類，各給專門的名稱。當時沒有符號，敍述起來相當困難。用現代的眼光看，這種分類沒有多少用處，甚至可以說是 "作繭自縛"，它沒有推進無理量的發展。

這一卷命題 1 非常重要：給定大小兩個量，從大量中減去它的一大半，再從剩下的量中減去它的一大半，這手續重複下去，可使所餘的量小於所給的小量。

這是極限論的雛形，也是 "窮竭法" 的理論基礎，和後面各卷有密切關係。在證明中實際默認了阿基米德公理。

有的版本最後還有命題 117，證明正方形的一邊與對角線不可公度，有時叫做 "歐幾里得奇偶數證法"，經考證這是後人滲入





的， 所以後來的校訂註釋者只將它放入附錄中。

卷 XI 是立體幾何， 講空間中的平面、 直線、 垂直、 平行、 相交等關係， 還有多面角、 平行六面體、 稜錐、 稜柱、 圓錐、 圓柱、 球等問題， 共 39 個命題。

卷 XII 是窮竭法 (method of exhaustion)[23] 的應用。 這是希臘人創造的強有力的證明方法， 一般認爲是經歐多克索斯的手而臻於完善， 以後被收入《原本》的卷 XII 中。

命題 2 是相當典型， 從中可以看到窮竭法的基本精神。 要證明： 圓與圓之比等於其直徑平方之比。

作圓內接 □$ADCB$、 外切 □$EGFH$。

[23]exhaustion 這個詞有雙重含義。 一是將所有可能情形都一一考慮到的一種證明方法， 多用於反證法， 今譯爲 “窮舉法”； 另一種是指某一個圖形 (如圓被另一個圖形 (如內接正多邊形) 所逐步 “窮竭”(填滿)， 譯爲 “窮竭法”， 使在漢語中兩者不致相混。

因 $\square EGFH = 2\square ADCB$，又 $\square EGFH$ 大於圓，故 $\square ADCB$ 包含圓面積的一半以上。取 $\overset{\frown}{AB}$ 中點 M，完成 $\square ABKL$，因 $\square ABKL = 2\triangle AMB$，又 $\square ABKL$ 大於弓形 AMB，故可知 $\triangle AMB$ 包含弓形 AMB 一半以上。$\square ADCB$ 的每一邊都加上這樣的 $\triangle$，就得到內接正八邊形，它包含 $\square ADCB$ 以及圓與 $\square ADCB$ 之差的一半以上。同理作再正十六邊形，它包含正八邊形及圓與正八邊形之差的一半以上。重複這個手續，每次邊數加倍，根據卷 X 命題 1，可得到一個邊數足夠多的內接正多邊形，與圓面積之差小於任給的小量。

現有圓面積 S_1、S_2，直徑各爲 d_1、d_2，要證明

$$S_1 : S_2 = d_1^2 : d_2^2。$$

設等式不成立而有

$$S_1 : S_3 = d_1^2 : d_2^2，$$

S_3 是大於或小於 S_2 的某一面積。不妨設 $S_3 < S_2$，作 S_2 的邊數足夠多的內接正多邊形 P_2，使 $S_2 - P_2 < S_2 - S_3$，即 $S_3 < P_2 < S_2$。在 S_1 內作與 P_2 相似的內接正多邊形 P_1，根據卷 XII 第 1 命題，

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2，$$

於是有

$$P_1 : P_2 = S_1 : S_3$$

或

$$P_1 : S_1 = P_2 : S_3，$$

但 $S_1 > P_1$，故 $S_3 > P_2$，與前面不等式 $P_2 > S_3$ 矛盾。同理可證若 $S_3 > S_2$ 也一樣產生矛盾。

下面用類似的方法證明 “錐體體積等於同底等高柱體的 1/3”(命題 7、10)，“球體積的比等於直徑立方的比”(命題 18) 等。全卷共 18 個命題。

卷 XIII 是最後一卷，共十八個命題。前一部分研究了中末比

的若干性質， 最後 6 個命題討論五種球內接正多面體的作圖法。

《原本》的一些存在問題

(一) 公理化結構是近代數學的主要特徵。 而《原本》是完成公理化結構的最早典範， 它產生於兩千多年前， 這是難能可貴的。 不過用現代的標準去衡量， 也還有不少缺點。 首先， 一個公理系統都有若干原始概念或稱不定義概念。 點、 線、 面就屬於這一類。 而在《原本》中一一給出定義， 這些定義的本身就是含混不清的。 例如卷 I 的定義 4： “直線是這樣的線， 在它上面的點都是高低相同地放置著的” 就很費解， 而且這定義在以後的證明中完全沒有用到。 其次是公理系統不完備， 沒有運動、 順序、 連續性等公理， 所以許多證明不得不藉助於直觀。 此外， 有的公理不是獨立的， 即可以由別的公理推出 (如第 4 公設 “凡直角都相等”)。 這些缺陷直到 1899 年 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的《幾何基礎》(*Grundlagen der Geometrie*)([14]) 出版才得到了補救。 儘管如此， 畢竟瑕不掩瑜， 《原本》開創了數學公理化的正確道路， 對整個數學發展的影響超過了歷史上任何其它著作。

(二) 全書的組織安排也是可以改進的。 如卷 V 已建立了一般量的比例論， 而且在卷 VI 中已用之於幾何， 但後面的卷 VII 的數論卻沒有用它。 這幾卷數論基本上是畢達哥拉斯學派的成果， 在理論水準上遠遜於卷 V。 其實卷 II 已提出幾何代數學， 接下去講數論是順理成章的。

卷 X 份量過於龐大， 而且大部分和前後沒有聯繫， 現在證明其用處甚同。 整修《原本》並不企圖將當時已有的幾何知識納入其中 (例如三角形三個高交於一點這樣普通的定理也未收入)， 只是精選最基本的命題作爲《原本》的內容。 本著這種精神， 卷 X 應大大壓縮。

(三) 有的書[24]指出，《原本》的證明常常是以偏概全的，即對一般性定理只給出特例的證明，或者只用了某些具體數據而忽略了普遍性，這種情況的確比比皆是。不過批評者可能並不了解歐幾里得的用意。《原本》當時是作爲教科書中講義來使用的，如果一個問題有若干種情形，證明了其中一種之後，其餘的留給學生自證，這在今天也是司空見慣的。以卷 I 命題 7 爲例，從線段 AB 的兩端分別作一直線交於一點 C，則在同一側不可能再有交於另一點 D 的兩線段 AD 與 BD 使得 $AC = AD$、$BC = BD$。證明是用反證法，設 D 點落在 $\triangle ABC$ 之外，由此推出矛盾。而 D 點落在內的情形就沒有討論。後世有的註釋者如克拉維烏斯認爲不夠全面，把所有可能情形都增補上去 (見明譯本)，包括 D 點落在 AC 或 BC 延長線上以及 $\triangle ADB$ 完全被包含在 $\triangle ABC$ 之中等等。希思譯本保留了原書的面貌，只在註釋中加以說明。

還有一種以偏概全的情形是只用某個具體的數字來證明一般性的結論。如卷 IX 命題 20：質數的個數比任意給定的質數都多。證明時只給定 A、B、C 三個質數，由此推還有別的質數存在。現在的嚴格證法無非是將三個改爲任意 n 個，這在方法並沒有什麼區別。

《原本》對我國數學的影響

中國傳統數學最明顯的特點是以算爲中心。雖然也有邏輯證明，但卻沒有形成一個嚴密的公理化演繹體系，這也許是最大的弱點。明末《原本》傳入，應該是切中時弊，正好彌補中算之不足。可是實際情況並不理想。

徐光啓本人對《原本》十分推崇，也有深刻的理解。他認爲學習此書可使人 “心思細密”。在譯本卷首的《原本雜議》中說：“人

[24]例如 M. Kline，*Mathematical thought from ancient to modern times*，Oxford Univ. Press，1972 (中譯本；M. 克萊因，古今數學思想，上海科技出版社，1979，第一册，p.99)。

具上資而意理疏莽，即上資無用：人具中材而心思縝密，即中材有用：能通幾何之學，縝密甚矣，故率天下之人而歸於實用者，是或其所由之道也。” 在他的大力倡導下，確實也發揮了一定的作用。可惜言者諄諄，聽者藐藐，要在群衆中推廣，仍然有很大的困難，他在《雜議》中繼續寫道：“而習者蓋寡，竊意百年之後，必人人習之。” 他只好把希望寄托於未來。

明末我國正處在數學發展的低潮，《原本》雖已譯出，學術界是否看到它的優點，大有疑問。事實上，明清兩代幾乎沒有人對《原本》的公理化方法及邏輯演繹體系作過專門的研究。康熙以後，清統治者實行閉關鎖國、盲目排外的政策。知識分子喪失思想、言論自由，爲了逃避現實，轉向古籍的整理和研究，以後便形成以考據爲中心的乾嘉學派。徐光啓之後，數學界的代表人物是梅文鼎 (1633 – 1721)，他會通中西數學，對發揚中國傳統數學及傳播西方數學均有貢獻，然而他卻沒有認識到公理方法的重要性。他認爲西方的幾何學，無非就是中國的勾股數學，並沒有什麼新鮮的東西。他在《幾何通解》中曾寫道：“幾何不言勾股，然其理並勾股也。故其最難通者，以勾股釋之則明。⋯⋯ 信古《九章》之義，包舉無方。”(見 [17]，卷 18)。而他在《勾股舉隅》中也說：“勾股之用，於是乎神。言測量至西術詳矣。究不能外勾股以立算，故三角即勾股之變通，八線乃勾股之立成也。”(見 [17]，卷 17) 類似的說法還有多處，他見到的只是幾何的一些命題，至於眞正的精髓 —— 公理體系及邏輯結構，竟熟視無睹。梅文鼎這種 “古已有之” 的觀點，也是妄自尊大和保守思想的反映。由於他當時的威望，確實產生了一些消極的影響。

其它著作

歐幾里得還有好幾種著作，可惜流傳下來的不多。

(一)《已知數》(*The data*) 除了《原本》以外唯一保存下來的希臘文純粹幾何著作。包含 94 個命題，後來被收入帕波斯的《分析薈萃》(*Treasury of Analysis*) 中。內容和《原本》卷 I–VI 相仿，但問題的提法不同。例如開頭所給出的定義，是解釋何謂“已知的”。定義 1：面積、線段、角叫做已知的，如果可以作出和它們相等的同類量。定義 5：一個圓叫做已知的，如果它的半徑已知。等等。

全篇的中心內容是指出圖形內的某些元素若爲已知，則另外的元素也是已知的 (即可以確定)。如命題 84：若兩條線段以一定的夾角構成一個已知面積，又兩線段的差已知，則兩線段即爲已知。這相當解聯立方程

$$y - x = a$$
$$xy = b^2$$

或二次方程

$$x^2 + ax - b^2 = 0。$$

(二)《圖形的分割》(*On divisions*) 是他另一本幾何著作，但不是希臘文本。現有的兩種存本都來自阿拉伯文本。第一種的拉丁文本由 J. 迪伊 (Dee，1527 − 1608) 發現並於 1570 年出版，這種版本不甚完整。另一種爲 F. 韋普克 (Woepcke，1826 − 1864) 在巴黎所發現，於 1851 年出版，現有英譯校訂本 ([3])。此書的中心思想是作直線將已知圖形分爲相等的部分、成比例的部分或分成滿足某種條件的圖形。共 36 個命題，如命題 1：作平行於底邊的直線將三角形分成相等的兩部分。命題 4：作平行於上下底的直線將梯形分爲相等的兩部分。命題 29：作二平行弦將已知圓分成給定的比例。

(三) 下面幾種幾何著作已失傳。《糾錯集》(*Pseudaria*，或 *Book of fallacies*) 目的在指出初學幾何者常見的錯誤，引導他們走上正確的道路，普羅克洛斯曾提到此書。《推論集》(*Porisms*) 是

一部較高級的幾何學， 在帕波斯的《分析薈萃》中有著較詳細的描述。“Porism” 這個詞有雙重意義， 一是普通的推論 (corollary)，二是指某些與定理不同的命題， 定理一般要求證明某個結論， 而 “porism” 是要找出某種事物而不僅僅證明它成立或存在。 例如要根據給定條件找出圓心等。 按帕波斯的說法， 歐幾里得曾寫了四卷的《圓錐曲線》(*Conics*)， 它是後來阿波羅尼奧斯八大卷《圓錐曲線論》的基礎。 另一本失傳的著作《曲面軌跡》(*Surface loci*) 是討論軌跡的問題。

(四) 幾本應用數學著作。《觀測天文學》(*Phaenomena*) 是一本幾何天文學， 最先使用地平圈 (Horizon) 以及子午圈 (Meridian) 等術語， 並參考了奧托利科斯的工作及不知名作者的球面幾何學。《光學》(*Optics*) 是希臘文的第一本透視學， 從 12 個假設 (公設) 出發推出 61 個命題。 假設 1 是 “人看到物體， 是光線從眼睛出發射到所看的物體上去”。 這是從柏拉圖以來的傳統觀點。 命題 6 是 “處於平行位置， 大小相同但距離不同的物體， 在眼中看到的大小並不與遠近成比例”。 這相當於證明了當 $\alpha<\beta<\pi/2$ 時

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\text{。}$$

此外，歐幾里得還寫過音樂和力學的書。看來他是相當博學的，不像人們通常認爲的那樣，歐幾里得的貢獻只是初等幾何。不過，經過兩千多年的歷史考驗，影響最大的仍然是《原本》。

文　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg and H. Menge, *Euclidis opera omnia*, 8 vols, Leipzig, 1883－1916。

[2] T.L. Heath, *The thirteen books of Euclid's Elements with introduction and commentary*, 3 vols., Dover Publications, Inc., 1956

[3] R.C. Archibald, ed., *Euclid's book on divisions of figures*, Cambridge University Press, 1915。

[4] 利瑪竇 (Matteo Ricci)，徐光啓譯，《原本》卷 I–VI，1607，收入《叢書集成初編》，商務印書館，1939。

[5] 偉烈亞力 (Alexander Wylie)、李善蘭，《原本十五卷》(包括利瑪竇、徐光啓譯的卷 I–VI 及偉烈亞力、李善蘭譯的卷 VII–XV)，1857，金陵版，1865。

研究文獻

[6] I. Thomas, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, I, 1957。

[7] T.L. Heath, *A manual of Greek mathematics*, Oxford at the Clarendon Press, 1931。

[8] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics I*, Oxford at the Clarendon Press, 1921。

[9] I. Mueller, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, The MIT Press, 1981。

[10] E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*, 2 vols., Groningen, 1929－1930。

[11] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, 1976。

[12] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Co., I, 1923。

[13] R.E. Moritz, *On mathematics and mathematicians*, Dover Publications, Inc., 1942, P.152。

[14] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7th ed., 1930 (中譯本：D. 希爾伯特，幾何基礎，第一分册，科學出版社，1958)

[15] 李儼，中國算學史，商務印書館，1955。

[16] 嚴敦傑，歐幾里得原本元代輸入中國說，東方雜誌，39 (1943)，13 號。

[17] 梅文鼎，梅氏叢書輯要，1761，1874 版。