阿　波　羅　尼　奧　斯

阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga) 約公元前 262 年生於佩爾格； 約公元前 190 年卒於埃及亞歷山大 。 數學 。

阿波羅尼奧斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Apollonius.html

阿 波 羅 尼 奧 斯

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

阿波羅尼奧斯 (Apollonius of Perga) 約公元前 262 年生於佩爾格; 約公元前 190 年卒於埃及亞歷山大。 數學。

阿波羅尼奧斯是佩爾格 (Perga 或 Perge) 地方的人。 古代黑海與地中海之間的地區, 稱爲安納托利亞 (Antalya, 今屬土耳其), 南部有古國潘菲利亞 (Pamphylia), 佩爾格是它的主要城市。

阿波羅尼奧斯年青時到亞歷山大跟隨歐幾里得的後繼者學習, 那時是托勒密三世 (Ptolemy Euergetes, 公元前 246 − 前 221 在位) 時代, 他在天文學研究方面已頗有名氣。

後來他到過小亞細亞西岸的帕加馬 (Pergamum) 王國 [1], 那裡有一個大圖書館, 規模僅次於亞歷山大圖書館。 國王阿塔羅斯一世 (King Attalus I Soter, 公元前 269 − 前 197 年, 前 241 − 197 年在位) 除崇尙武功外, 還注重文化建設。 阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》從第四卷起都是呈遞給阿塔羅斯的, 後世學者認爲就是這位國王 (見 [5], p.126; [6], p.227; [4], p.595)。 但存在一個疑點, 他在寫信給阿塔羅斯時直書其名, 而沒有在前面加上 "國王" 的稱呼, 這是違背當時的禮儀習慣的。 可能有兩種解釋, 一是他指的不是國王而是另一個同名的人, 二是阿波羅尼奧斯相當放蕩不羈, 而這位君主確能禮賢下士, 不拘小節。

在帕加馬還認識了一位歐德莫斯 (Eudemus) [2], 《圓錐曲線論》的前三卷是寄給他的。 在這書的第二卷的前言中, 阿波羅尼奧斯

[1] 臨愛琴海和馬爾馬拉海。 公元前三世紀脫離塞琉西王國, 成爲希臘統治下的王國, 都城帕加馬。 公元前 133 年成爲羅馬帝國一個行省。 其遺跡 1878 年由柏林博物館開始發掘。

[2] 羅德島的歐德莫斯 (Eudemus of Rhodes, 公元前 320)。

說他曾將這一卷通過他兒子來交給歐德莫斯， 並說如果見到菲洛尼底斯 (Philonides) 時， 請歐德莫斯將書也給他一閱。 菲洛尼底斯是阿波羅尼奧斯在以弗所 (Ephesus)[3]結識的幾何學家， 對圓錐曲線論頗感興趣， 阿波羅尼奧斯曾介紹過他和歐德莫斯認識。

第三卷沒有留下前言。 第四卷的前言是寫給阿塔羅斯的， 開頭說： 這八卷著作的前三卷是交給歐德莫斯的， 現在他已去世， 我決定將其餘各卷獻給你， 因爲你渴望得到我的著作。

由此可知阿波羅尼奧斯寫此書是在晚年， 至少是在他兒子成年以後。 又知道他到過以弗所。 他的主要成就是建立完美的圓錐曲線論， 總結了前人在這方面的工作， 再加上自己的研究成果， 撰成《圓錐曲線論》(*Conics*) 八大卷， 將圓錐曲線的性質網羅殆盡， 幾乎使後人沒有插足的餘地。 直到十七世紀的 B. 帕斯卡 (Pascal)、 R. 笛卡兒 (Descartes) 才有實質性的推進。 歐托基奧斯 (Eutocius of Ascalon， 約生於公元 480 年) 在註釋這部書時， 說當時的人稱他爲 “大幾何學家”。

阿波羅尼奧斯常和歐幾里得、 阿基米德合稱爲亞歷山大前期三大數學家。 時間約當公元前 300 年到前 200 年， 這是希臘數學的全盛時期或 “黃金時代”(見 [14]， p.157)。

主要著作

《圓錐曲線論》是一部極其重要的著作。 在第一卷的前言中， 阿波羅尼奧斯向歐德莫斯述說撰寫的經過：“幾何學家諾克拉底斯 (Naucrates) 來到亞歷山大， 鼓勵我寫出這本書。 我趕在他乘船離開之前倉促完成交給他， 根本沒有仔細推敲。 現在才有時間逐卷修訂， 並分批寄給你”。

這部書是圓錐曲線的經典著作， 寫作風格和歐幾里得、 阿基

[3]希臘伊奧尼亞城市， 在小亞細亞西岸， 今土耳其伊茲密爾附近， 公元前六世紀是呂底亞王國的工商業中心。

米德是一脈相承的。先設立若干定義，再由此依次證明各個命題。推理是十分嚴格的，有些性質在歐幾里得《原本》中已得到證明，便作爲已知來使用，但原文並沒有標明出自《原本》何處，譯本爲了便於參考，將出處補上 (比較 [6]，p.280 – 335 中的希臘原文和英譯文)。後人對此頗有微詞。阿基米德的傳記作者甚至說阿波羅尼奧斯將阿基米德未發表的關於圓錐曲線的成果據爲已有。此說出自歐托基奧斯的記載，但他同時說這種看法是不正確的。帕波斯 (Pappus) 則指責阿波羅尼奧斯採用了許多前人 (包括歐幾里得) 在這一方面的工作，但卻從未歸功於這些先驅者 (見 [7]，p.203)。當然，他在前人的基礎上作出了巨大的推進，其卓越的貢獻也是應該肯定的。

《圓錐曲線論》的出現，立刻引起人們的重視，被公認爲這方面的權威著作。帕波斯曾給它增加了許多引理，塞里納斯 (Serenus，四世紀) 及希帕蒂婭 (Hypatia) 都作過註解。歐托基奧斯校訂註釋前四卷希臘文本。九世紀時，君士坦丁堡 (東羅馬帝國都城) 興起學習希臘文化的熱潮，歐托基奧斯的四卷本被轉寫成安色爾字體 (*uncial*，手稿常用的一種大字體) 並保存下來，不過有些地方已被竄改。

前四卷最早由敍利亞人希姆斯 (Hilāl ibn Abī Hilāl al–Ḥimṣī，卒於 883 或 884) 譯成阿拉伯文。第 5 – 7 卷由塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra，約公元 826 – 901 年) 從另外的版本譯成阿拉伯文。納西爾丁 (Naṣīr ad-Dīn al-Ṭūsi，1201 – 1274) 第 1 – 7 卷的修訂本 (1248 年) 現有兩種抄本藏於英國牛津大學博德利 (Bodleian) 圖書館，一種是 1301 年的抄本，一種是 1626 年第 5 – 7 卷的抄本。

第 1 – 4 卷的拉丁文譯本於 1537 年由 J.B. 門努斯 (Menus) 在威尼斯出版，而較標準的拉丁文譯本由 F. 科曼迪諾 (Commandino，1509 – 1575) 譯出，於 1566 年在博洛尼亞出版。其中包括帕波斯的引理和歐托基奧斯的評註，還加上許多解釋以便於研讀。第 5 –

7 卷最早的拉丁譯本的譯者是 A. 埃凱倫西斯 (Echellensis) 及 G.A. 博雷利 (Borelli， 1608－1679)， 1661 年出版於佛羅倫薩， 是從 983 年阿拉伯文抄本譯出的。 天文學家 E. 哈雷 (Halley， 1656－1743) 參考了各種版本， 重新校訂了第 1－7 卷拉丁文本及第 1－4 卷希臘文本， 1710 年在牛津出版。

目前權威的第 1－4 卷希臘文、 拉丁文對照評註本是 J.L. 海伯格 (Heiberg， 1854－1928)“*Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*”(《佩爾格的阿波羅尼奧斯的現存希臘文著作， 包括古代註釋》) 2 卷， 1891－1893 在萊比錫出版。 阿拉伯文本只有第 5 卷的一部分正式出版， 並附 L. 尼克斯 (Nix) 的德譯文 (1889， 萊比錫)。 現代語的譯本有 P.V. 埃克 (Eecke) 的法文譯本 “*les coniques d'Apollonius de Perge*”(《佩爾格的阿波羅尼奧斯的圓錐曲線論》)， 前四卷根據希臘文本， 後三卷是根據哈雷的拉丁文本， 1923 年出版於布魯日 (Bruges)， 1963 年重印於巴黎。 T.L. 希思 (Heath， 1861－1940) 編訂的英譯本 “*Apollonius of Perga， Treatise of conic sections*” (《佩爾格的阿波羅尼奧斯， 圓錐曲線論》) 1896 年劍橋大學出版社出版，1961 年重印。 此書實際是意譯本或改編本。 另一種英譯本爲 C. 托利弗 (Taliaferro) 所譯 (1939)， 載於《西方名著叢書》(*Great books of the western world*， 1952， 不列顛百科全書出版社) 第 11 卷中， 但只有 1－3 卷。

除了《圓錐曲線論》外， 阿波羅尼奧斯還有好幾種著作， 爲後世的學者 (特別是帕波斯) 所提及。 列舉如下：

1.《截取線段成定比》(*Cutting of a ratio*)， 共兩卷；

2.《截取面積等於已知面積》(*Cutting an area*)， 共兩卷；

3.《論接觸》(*Tangencies*)， 共兩卷；

4.《平面軌跡》(*Plane loci*)， 共兩卷；

5.《傾斜》(*On Verging Constructions*)， 共兩卷；

6.《確定截線》(*On determinate Section*)，共兩卷。

此外還有《無序無理量》(*Unordered Irrationals*)、《取火鏡》(*On the burning mirror*)、圓周率計算以及天文學方面的著述等。

圓錐曲線論的前驅工作

在阿波羅尼奧斯之前，圓錐曲線的研究已有一百多年的歷史。它是由倍立方問題引起的[4]。所謂“倍立方”，就是求作一立方體，使其體積爲一已知立方體的 2 倍。希波克拉底 (Hippocrates of Chios) 首先指出它可歸結爲求線段 a 與 $2a$ 之間的兩個等比中項[5]。設 x，y 是這兩個中項，$a:x=x:y=y:2a$，則 $x^2=ay$，$y^2=2ax$，$xy=2a^2$，於是得 $x^3=2a^3$。如果 a 是已知立方體的邊，那麼 x 就是所求立方體的邊。前面幾個二次方程在解析幾何中是拋物線與等軸雙曲線，由此導致這兩種曲線的發現。這發現一般歸功於梅奈奇姆斯 (Menaechmus，約公元前 350 年)，普羅克洛斯 (Proclus) 推測他是用兩條圓錐曲線的交點來解決倍立方問題的。

他又有平面去截圓錐面，得到三種截線。圓錐面是直角三角形圍繞一個不動的直角邊旋轉所產生的。不動的直角邊叫做軸，斜邊叫做母線，通過軸的平面與圓錐面相交而成的三角形叫做軸三角形。軸三角形的頂角有銳角、直角、鈍角的三種情形。梅奈奇姆斯用垂直於一條母線的平面去截圓錐面，所得到的截線當軸三角形的頂角是直角時叫做“直角圓錐截線”(section of the right-angled cone)，現稱拋物線；當頂角是鈍角時叫做“鈍角圓錐截線”(section of the obtuse-angled cone)，現稱雙曲線；當頂角是銳角時則叫做“銳角圓錐截線” (section of the acute–angled cone)，現

[4]另一種說法是由日晷的研究引起，見 [8]，p.226。
[5]根據普羅克洛斯 (Proclus，約 412 − 485) 在歐幾里得《原本》卷 I 註釋中的記載，見 [6]，p.253。

稱橢圓[6]。這些名稱爲歐幾里得、阿基米德所沿用，直到阿波羅尼奧斯，才證明一個平面和一個圓錐面相交，也可以得到這三種曲線。

圓錐曲線發現以後，進展很快，研究的成果足以使阿里斯泰奧斯 (Aristaeus，約公元前 340 年) 寫出五卷本《立體軌跡》(*Solid loci*)，也就是圓錐曲線論[7]。這個名稱的來源可能是把圓錐曲線看作一種軌跡，而它可以通過用平面截取立體 (圓錐面) 得到。

不久又出現歐幾里得四卷本的《圓錐曲線》(*Conics*)，更有系統地闡述了若干錐線的性質。可惜此書連同阿里斯泰奧斯的書均已失傳，只能從帕波斯的著作中得知其大概。帕波斯認爲阿波羅尼奧斯是以這四卷爲基礎，再加上四卷才完成其八卷的巨著的。

歐幾里得對圓錐曲線的認識並不限於梅奈奇姆斯的三種截法 (截面垂直於一母線)，他在《現象》一書中曾指出：用平面去截正圓柱或正圓錐，若平面不平行於底，其截線就是“銳角圓錐截線”(橢圓)，其形狀似盾牌。阿基米德在《劈錐曲面與迴轉橢圓體》(*On conoids and spheroids*) 中更進一步證明任何一個橢圓都可以看成是一個圓錐面的截線，這個圓錐面頂點的選擇有很大的任意性 (命題 7、8)。由此可知，在阿波羅尼奧斯之前，並非不知道這三種曲線也可以用別的方法獲得，但仍採用梅奈奇姆斯的定義，理由可能是處理某些問題時更加簡單方便 (見 [10]，p.245)。

阿基米德對圓錐曲線以及由圓錐曲線產生的迴轉體作了深入的研究，如求面積、體積、重心、浮力等等。到此爲止，圓錐曲線的理論已經積累了大量的資料。正像歐幾里得將初等幾何問題整理成一個嚴密的體系那樣，將圓錐曲線問題也整理出來已經有了足夠的條件，這關鍵性的一步，是由阿波羅尼奧斯來完成的。

---

[6]根據帕波斯、歐托基奧斯等的記載，見 [9]，p.153 − 179。

[7]另一種看法認爲他還寫了 5 卷《圓錐曲線基礎》(*Elements of conics*)，但多數的意見認爲是同一部書的不同名稱。

第一卷的序言是給歐德莫斯的信， 簡單說明了寫書的經過和全書的主要內容。 全書共八卷， 前四卷是基礎部分。 第一卷給出三種截線的一般定義和主要性質， 他說這些內容“比其他作家寫的更全面也更一般”。

序言之後給出八個定義。 以前用直角三角形繞直角邊的迴轉來定義圓錐， 只得到正圓錐。 阿波羅尼奧斯改變了產生圓錐的辦法：

給定一個圓及圓所在平面外一點 V， 連接 V 與圓周上的一點， 並向兩端延長成一直線。 令這直線沿著圓周移動， 最後回到出發點， 這直線就描繪出圓錐曲面的兩支。 這兩支分別位於點 V 的兩側， 可向兩側任意伸展。 固定點 V 叫做圓錐面的頂點， 給定的圓叫做底。 點 V 與圓心 O 的聯線叫做軸， 如果軸 VO 垂直於底， 這圓錐叫做正圓錐 (right cone)， 如軸不垂直於底， 則叫做斜圓錐 (scalene cone)。 此外還定義了直徑、 共軛直徑、 截線的軸等。

定義之後給出 60 個命題。 下面取出最有代表性的命題 13 來分析一下， 即可窺見阿波羅尼奧斯推理思想的一斑。

設有斜圓錐 ABC，任作一平面，與圓錐的底平面相交於 GF(GF 位於底圓之外)，與圓錐面交於曲線 EDL。作底圓的直徑 $BC \perp GF$ (即過圓心作直線垂直於 GF) 並延長之交 GF 於 G。 通過直徑 BC 及頂點 A 的平面與圓錐相交而成的 $\triangle ABC$ 是軸三角形。 E、 D 是軸三角形與曲線的交點， E、 D、 G 均在軸三角形平面上， 又在截平面上， 故 EDC 是軸三角形平面與截平面的交線。

在圓錐截線上任取一點 L， 作 $ML//GF$， 交 ED 於 M。 過

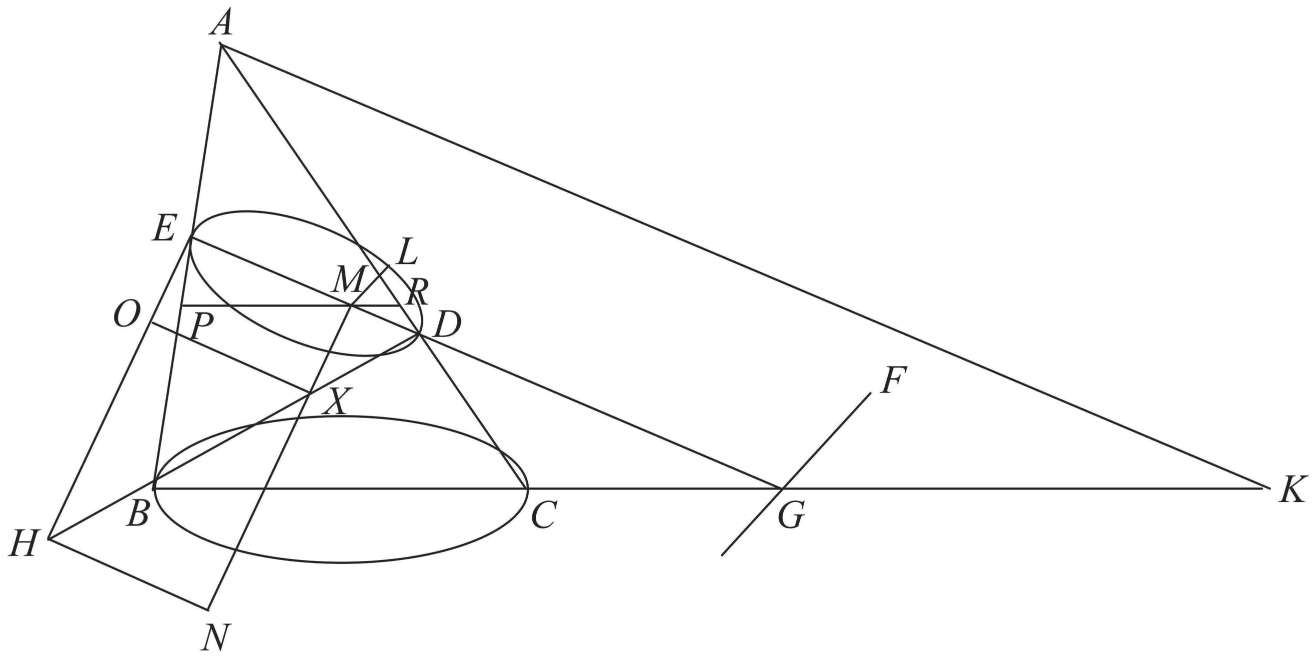

圖 1

M 作 $PR//BC$，則 PR 與 ML 所確定的平面與底平面平行[8]，因此與圓錐面的交線是一圓 (圖中未畫出)。P、L、R 是此圓周上三點，且 PR 是直徑，而 $ML \perp PR$ [9]。設 $EM = x$，$ML = y$，則

$$y^2 = PM \cdot MR \tag{1}$$

在軸三角形平面內作 $AK//EG$ 交 BC 的延長線於 K，因 $\triangle EPM \sim \triangle ABK$，故

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK}\text{，} \tag{2}$$

又 $\triangle DRM \sim \triangle ACK$，故

$$\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}\text{，} \tag{3}$$

(2)、(3) 兩式左右相乘，

$$\frac{PM \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK \cdot CK}{AK^2}\text{，} \tag{4}$$

圓錐及截平面給定後，ED 即已確定，記 $ED = 2a$，則

[8]平面上兩相交直線分別與另一平面上的兩相交直線平行，則此二平面平行。

[9]因 $ML//GF$，而 $GF \perp BC$，$BC//PR$。

$$MD = 2a - x。$$

式 (4) 的右端也是常數， 記作 $\frac{p}{2a}$ ， 再由式 (1)、 (4) 可寫成

$$y^2 = \frac{p}{2a} \cdot x(2a - x) \tag{5}$$

過 E 作 $EH \perp EG$，使 $EH = p$。連接 HD，作 MN 與 EH 平行且相等，交 HD 於 X，作 $XO \perp EH$。在 $\triangle EHD$ 中，

$$\frac{EO}{EH} = \frac{MX}{EH} = \frac{MD}{ED} = \frac{2a - x}{2a}，$$

即

$$EO = \frac{p}{2a}(2a - x)。$$

代入 (5)，

$$y^2 = EO \cdot x。$$

此式表明 EO 、 EM 構成的矩形面積等於 ML 上的正方形。

在歐幾里得幾何中， 常見這樣的作圖題： 以 EM 爲一邊作一個矩形， “貼合”(application) [10]到 EH 上去， 使其面積等於一個已知正方形。 所謂 “貼合”， 就是矩形的一條邊與 EH 重合， 其長度可以小於 、 等於或大於 EH 。

更一般的提法是求作平行四邊形， 貼合到已知線段上去， 使其滿足某種條件 (如有一個角等於已知角， 或與某平行四邊形相似等)， 且面積等於某已知圖形 (參見歐幾里得《 原本 》卷 I 命題 44 、 卷 VI 命題 27 、 29 等)。

此處以 EM 爲一邊， 貼合到 EH 上， 使其面積等於 ML 上的正方形。 所求矩形 $EOXM$ 的一邊 $EO < EH$ 時， 這種情形叫做 “不足”(falling short， 希臘文是 $\varepsilon\lambda\lambda\varepsilon\iota\Psi\iota\varsigma$)， 後來這個詞漸漸變成

[10]面積的貼合問題最早爲畢達哥拉斯所用， 後在歐幾里得《 原本 》中多次出現 。

專門的術語，取代 “銳角圓錐截線” 而成爲一類圓錐曲線的名稱。此即 “橢圓”(英 ellipse，法 ellipse，德 EIlipse，義 ellisse，西 elipse，俄 зллипсис) 一詞的來源。對於雙曲線的情形，矩形的一邊 $EO > EH$，這時叫 “過剩” (exceeding，$\grave{\nu}\pi\varepsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$)，後來轉換成爲 “雙曲線”(英 hyperbola，法 hyperbole，德 Hyperbel，義 ipèrbole，西 hipérbola，俄 гипербола)。而 “拋物線” (英 parabola，法 parabole，德 parabel，義 paràbola，西 parábola，俄 парабола) 的字源就是 “貼合”($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\grave{\eta}$)，既非不足，也非過剩[11]。這些名稱最先爲阿波羅尼奧斯創用，一直沿用到現在。拋物線之名出自命題 11，雙曲線出自命題 12，橢圓出自命題 13。

本例貼合到 EH 上的矩形的邊是不足的，阿波羅尼奧斯稱所得的截線爲橢圓。如建立一個坐標系，問題就看得更清楚。以 E 爲坐標原點，EDC 爲橫軸，過 E 作平行於 ML 的直線爲縱軸。這樣就得到笛卡兒斜角坐標系。$ML \perp PR$，但一般不垂直 ED，故爲斜角坐標。x、y 是 L 點的橫、縱坐標，恆滿足 (5)，即

$$y^2 = px - \frac{p}{2a}x^2 \text{，} \tag{6}$$

在解析幾何中這正是橢圓的方程。

用類似的方法可以得到另外兩種截線。如果截平面和底圓相交，而且和圓錐面的另一支 (位於頂點 A 的另一側) 也相交，便得到雙曲線，其方程爲

$$y^2 = px + \frac{p}{2a}x^2 \text{，} \tag{7}$$

如截平面平行於一條母線，則與底圓相交，但只與圓錐的一支相交，這時得到拋物線，方程爲

$$y^2 = px \text{。} \tag{8}$$

[11] 圓錐曲線理論於明末、清初隨著西方天文曆法輸入我國，譯名開始時不統一。橢圓還有斜圓、長圓形、瘦圈界、鴨蛋形等名稱；拋物線又叫圭竇形；雙曲線也叫陶丘形。偉烈亞力、李善蘭譯《代微積拾級》(1859 年) 統一用今名，但《數學名詞》(1935) 拋線與拋物線並用，戟線與雙曲線並用，直到《數學名詞》(1956) 才最後統一用現在的名稱。

方程中的 p 在圖中是線段 EH， 稱矩形的 "豎直邊"(erect side)， 原文是 $\acute{o}\rho\theta\iota\alpha$(原意是豎直)， 相當於現在的 "正焦弦"(latus rectum)。式 (6)、(7)、(8) 表明， 橢圓、 雙曲線、 拋物線上任一點的縱坐標的平方分別小於、 大於、 等於正焦弦乘以橫坐標。

這幾個方程是圓錐曲線的基本性質。 阿波羅尼奧斯在這一卷中用語言來表述並證明了這些性質， 以後就利用它推導出其它性質而不必再依賴於圓錐曲面。 他沒有創用符號， 更沒有使用方程， 但其中實際上含有深刻的坐標制思想。 完全可以相信笛卡兒的坐標制得自阿波羅尼奧斯的啓發。 另一個來源則可能是天文和地理用經緯度來表示點的位置， 這在希臘也早已不是新鮮的事。

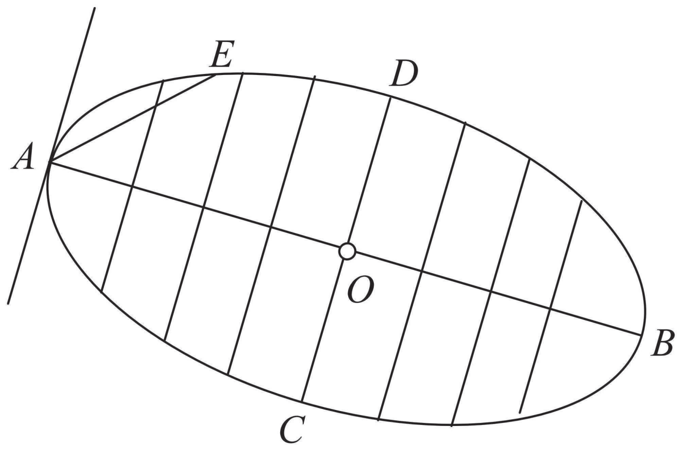

圖 2

本卷後面的命題很多牽涉到直徑、 共軛直徑及切線等問題， 這些概念和現今解析幾何中的概念是一致的。 對於橢圓來說， 任一組平行的弦， 必爲某一條通過橢圓中心 O 的直線 AB 所平分 (圖 2)， 這直線叫做橢圓的直徑。 而在這一組弦中通過中心的那一條 CD 與 AB 互爲共軛直徑。 CD 也平分任一條平行於 AB 的弦。 雙曲線的情況稍有不同， 任兩條共軛直徑一條與雙曲線相交， 另一條則不相交。 拋物線的直徑必平行於其對稱軸， 它沒有共軛直徑。

在圖 1 中， 阿波羅尼奧斯實際是用斜角坐標去刻劃圓錐截線的性質， EDG 是橫坐標軸， 過 E 且平行於 ML 的直線是縱坐標軸[12]。 可以證明 ED 是橢圓的直徑， 它平分與 ML 平行的任一弦。 ML 方向稱 "縱坐標" (ordinate， 希臘原文是 $\tau\varepsilon\tau\alpha\gamma\mu\grave{\varepsilon}\nu\omega\varsigma$， 原意是 "有序"、"規則") 方向。 在圖 2 中如以直徑 AB 爲橫坐標

[12]他當然沒有使用坐標的名稱。

軸， 則與 CD 平行的方向就叫縱坐標方向 。

命題 17 證明了這樣的性質： 通過直徑 AB 的端點 A 作直線平行於縱坐標方向， 則這直線必落在橢圓之外 。 不然的話， 若有一段 AE 落在橢圓內， 則這是一根弦， 必被 AB 平分， 這是不可能的 。 因命題 10 已證明延長弦的兩端， 必超出橢圓外 。

和橢圓相交於一點， 又完全落在橢圓外的直線現在就叫做切線 。 不過當時沒有切線的名稱， 只用 "與曲線 '接觸'(touch) 的直線" 來表達 。 阿波羅尼奧斯對切線的理解和歐幾里得是一樣的 。 或者說他的觀點來自歐幾里得 。 在《 原本 》卷 I 命題 16 中證明了過直徑端點且垂直於直徑的直線必完全落在圓外， 且此直線與圓周之間不可能再插入其它直線 。 阿波羅尼奧斯將它移植到圓錐曲線來 。 但阿基米德與此不同， 他對切線的看法帶有運動學的觀點 。

本卷有相當多的命題是牽涉到切線的 。 如命題 33 給出拋物線切線的一個性質 。

拋物線的任一組平行的弦必被某一條直線 AB 所平分 (圖 3)，這 AB 叫做拋物線的直徑。它一定平行於拋物線的對稱軸 VX。設 EF 是被 AB 平分於 D 的弦，延長 AB 至 T，使 $TA = AD$。過 A 作平行於縱坐標方向 DE 的直線 AC，則 AC 是拋物線的切線，聯結 TF，TF 也是拋物線的切線。

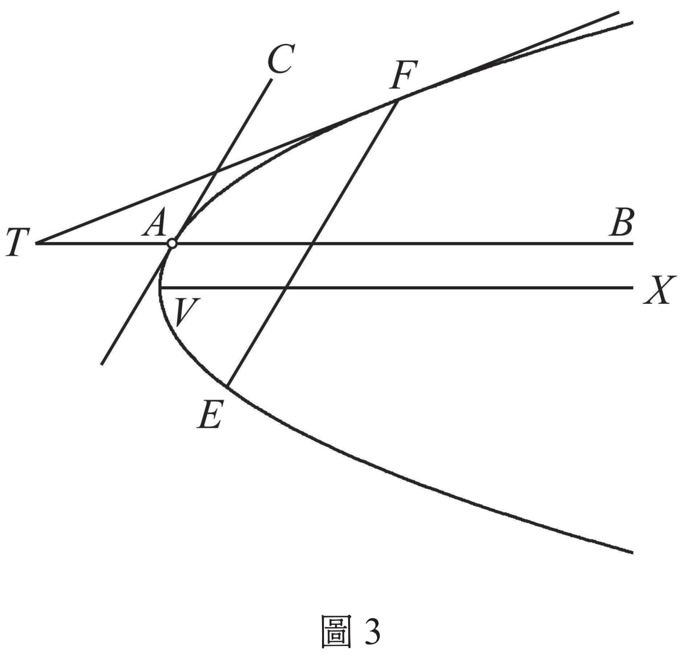

圖 3

上述性質已爲阿基米德 (或更早的阿里泰奧斯及歐幾里得) 所知， 他在《 方法 》中用到過 。

還有一些命題 (41 − 50) 相當於坐標變換， 將一組共軛直徑換成

另一組， 用以描繪圓錐曲線， 相當於將一個斜角坐標系變換成另一個斜角坐標系， 證明基本性質不變。 如變成互相垂直的共軛直徑， 就相當從斜角坐標變換成直角坐標。

這一卷最後還有好幾個作圖題， 要求作出滿足某些條件的圓錐曲線。

第二卷用很大的篇幅來討論雙曲線的漸近線。 命題 1 給出定義並證明其存在。 這是阿波羅尼奧斯的獨創， 前人沒有論述過。 “漸近線” (asymptote， 希臘原文 $\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\pi\tau\omega\tau o\varsigma$ 原意是 “不可能相交”) 的名稱也是他引入的。 命題 14 證明如果將雙曲線和漸近線無限延長， 可使兩者的距離任意小。 命題 17 證明共軛的雙曲線具有相同的漸近線， 還有一些命題給出直徑、 切線、 漸近線之間的種種關係。

第二卷第 44 − 53 命題是一些作圖題。 包括求作有心圓錐曲線的中心， 求作圓錐曲線的對稱軸、 直徑， 從曲線外一點向曲線作切線， 還有滿足某種條件的切線等。

第三卷前面有若干個命題是關於面積和比例的。 指出由各種線段如直徑、 對稱軸、 弦、 漸近線、 切線等所構成的三角形、 四邊形、 矩形等之間的相等、 和、 差、 比例的關係。

命題 45 以後的幾個命題頗值得注意， 這是橢圓與雙曲線的焦點性質。 但沒有給出焦點的專門名稱， 把焦點說成 “由貼合產生的點”。

焦點 F'、 F 的位置由下式確定：

$$A'F' \cdot F'A = A'F \cdot FA = \frac{p}{4} \cdot A'A。$$

其中 A'、 A 是對稱軸與曲線交點， p 是正焦弦。 如用表示橢圓的半長軸與半短軸， 或雙曲線的半實軸與半虛軸， 在笛卡兒直角坐標系中橢圓與雙曲線的標準方程是

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1，$$

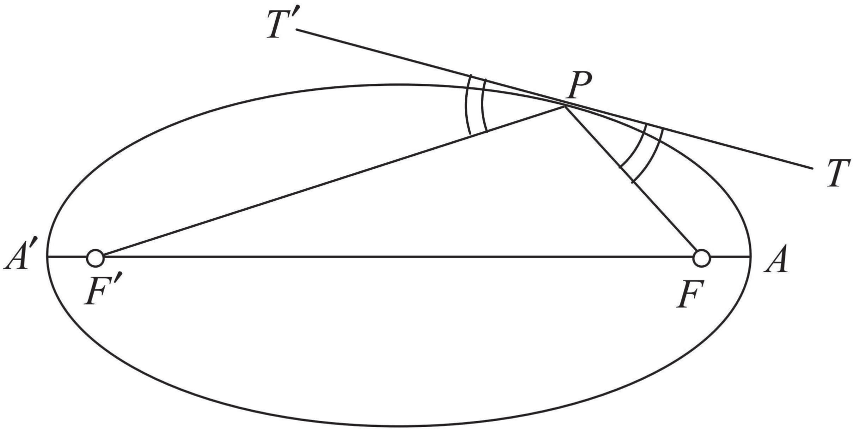

圖 4

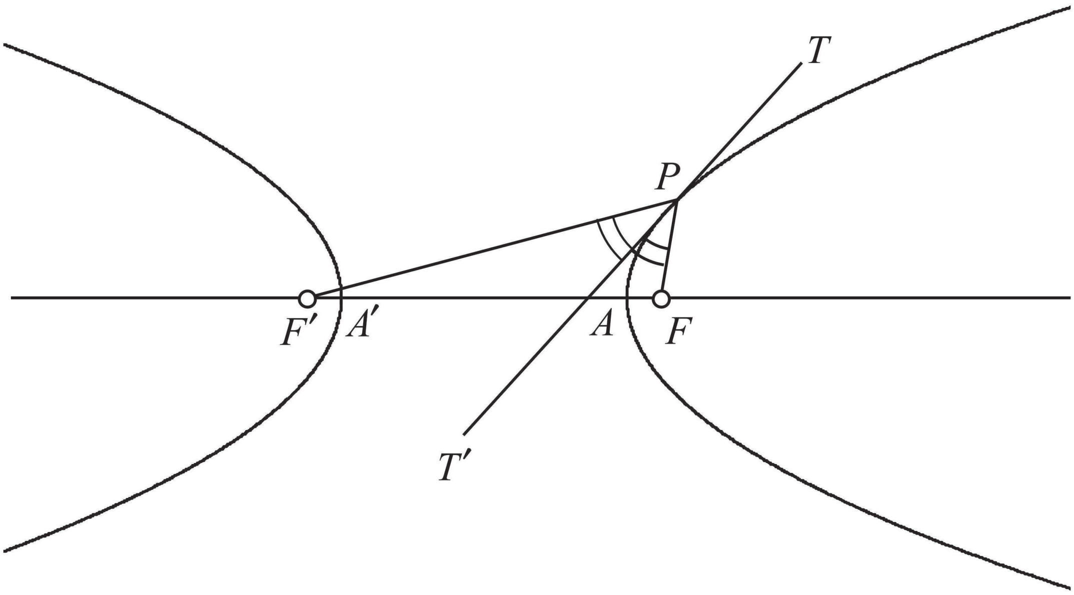

圖 5

$p=\dfrac{2b^2}{a}$。上面確定焦點位置的等式相當於

$$
\begin{aligned}
a^2-c^2&=b^2 \quad \text{(橢圓的情形)},\\
c^2-a^2&=b^2 \quad \text{(雙曲線的情形)},
\end{aligned}
$$

其中 $(\pm c,0)$ 是焦點的坐標，$c=\sqrt{a^2\pm b^2}$。阿波羅尼奧斯確定的位置和解析幾何是一致的。

命題 48 證明了著名的焦點切線性質：在 P 點的切線 $T'T$，與兩焦點半徑 $F'P$，FP 交成等角，即 $\angle F'PT'=\angle FPT$ (圖 4)，或 $\angle F'PT'=\angle FPT'$ (圖 5)。

奇怪的是，全書竟沒有提到拋物線的焦點，更沒有焦點準線統

一定義：一動點到一定點 (焦點) 的距離與到定直線 (準線) 的距離之比是常數 e，則動點軌跡是圓錐曲線。$e<1$ 時是橢圓，$e=1$ 時是拋物線，$e>1$ 時是雙曲線。書中也沒有出現離心率的概念。

這是一個謎，可能有兩種解釋。一是在帕波斯 (四世紀) 之前，希臘人並不知道拋物線有焦點，當然也不知道焦點準線定義。這是數學史家 M. 康托爾的看法 (見 [11]，p.339、344)。帕波斯認爲歐幾里得已知焦點準線定義，這只是他的推測，當時歐幾里得的《圓錐曲線》已經失傳。很難想像這樣重要的性質阿波羅尼奧斯既已知道但又不把它收入其巨著中。另一種解釋是他在別的已失傳的著作中作了專門的論述，無需在此重複。這兩種解釋都存在一些疑問。

近年來出版了狄俄克利斯 (Diocles，約公元前 190 − 180 年前後)《取火鏡》[13]，對這問題有了進一步的認識。根據圖默的考證，狄俄克利斯和阿波羅尼奧斯略同時，後者可能看到《取火鏡》，他認爲別人既已詳細討論過，就不必寫在自己的書中了。

《取火鏡》一開頭就說明本書的緣起：天文學家芝諾多羅斯 (Zenodorus，約公元前 180 年) 曾提出這樣的問題，什麼樣的鏡面對著太陽，能使反射的光線集中到一點而引起燃燒？這問題實際已由多西修斯 (Dositheus，公元前 225 年前後) 解決，答案是 “直角圓錐截線” 的迴轉面。本書的目的就是要給出理論證明。至於前人是否已有證明，書中沒有明確。傳說阿基米德曾用取火鏡燒毀敵船，雖是誇大的說法，但他已知道取火鏡這一事實是可信的。

至於焦點 (focus) 這一術語，最早是由 J. 刻卜勒 (Kepler) 在 1604 年創用的 [14]。

第三卷還有幾個命題是所謂 “3 或 4 條直線的軌跡” 問題。

在平面上給定 3 條 (或 4 條) 固定的直線，一動點與一直線的距

[13] 此書原藏在伊朗東北部的馬什哈德聖地 (Mashgad Shrine) 圖書館，是阿拉伯文譯本，原希臘文本已失傳。手稿的年代是 1462 − 1463 年。由 G.J. 圖默 (Toomer) 英譯並註釋，見 [12]，p.15、26、34。

[14]《取火鏡》英譯本 p.15 註 13。focus 來自拉丁文，原意是壁爐。

離的平方正比於與另外兩條直線距離之積，求動點的軌跡 (若爲 4 條直線，則動點與其中兩條直線距離之積，正比於與另外兩條直線距離之積)。所謂距離，或者是垂直距離，或者量距離的直線與固定直線交於一定的角度。

用解析幾何方法很容易看出軌跡是圓錐曲線。以 3 直線爲例，設直線方程爲

$$A_ix + B_iy + C_i = 0\ (i = 1、2、3)，$$

又量距離的直線分別與固定直線交於 $\theta_i(i = 1、2、3)$ 角，於是根據點與直線距離的公式，有

$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{(A_1^2+b_1^2)\sin^2\theta_1} = \frac{K(A_2x+B_2y+C_2)}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}\sin\theta_2} \times \frac{(A_3x+B_3y+C_3)}{\sqrt{A_3^2+B_3^2}\sin\theta_3},$$

這是關於 x，y 的二次方程，因此必爲圓錐曲線。

阿波羅尼奧斯用綜合幾何去處理這一問題，認爲這是自己的得意傑作，他在全書的序言中特別提到：

“第三卷包含了許多出色的定理，…… 其中最優美的是我新發現的。我注意到歐幾里得並沒有解決 ‘3 或 4 直線的軌跡’ 問題，僅僅是碰到某些特例，而且也沒有成功。因爲沒有我發現的定理，要徹底綜合解決是不可能的”。

幾百年後，帕波斯介紹這一問題時將它進一步推廣於 4 條以上的直線，他認爲阿波羅尼奧斯仍未完全解決這一問題，並且對他過份誇耀自己的成就，而鄙薄前人勞動的頗欠謙遜的態度表示遺憾。

又過了一千多年，笛卡兒 (1637) 用代數方法去研究 “3 或 4 直線軌跡”，這是促使他去創立解析幾何的動機之一。他在《幾何學》(*La g éométrie*)([13]) 中從這一問題入手去闡發他的坐標幾何思想。

第四卷除了繼續第三卷討論圓錐曲線的極點與極線的調和性質之外，還用很大的篇幅去探討圓錐曲線交點的個數。證明了兩圓錐

曲線相交至多有 4 個交點。

第 5 卷的內容十分新穎，著重討論極大極小問題。考慮從某一點到圓錐曲線的最大和最小距離。用現代的術語來說，最大最小線段都在法線的方向上。但當時沒有法線的名稱，只是證明了：設 O 是一固定點，P 是曲線上一點，若 OP 是最大或最小距離，則通過 P 且垂直於 OP 的直線必爲曲線的切線。進一步研究法線的數目，設在橢圓的長軸上取一點 H，H 可向橢圓作 4 條法線 (圖 6)，包括長軸本身。現將點的位置向著縱坐標的方向向上 (或向下) 移動，到達某一點 G_2 (或 G_1) 處，法線仍然是 4 條，但過了 $G_2(G_1)$，法線突然變成只有 2 條。這種分界點的集合構成一個封閉的圖形，在圖形內部的點可向橢圓作 4 條法線，在圖形外部的點一般可以作兩條法線。

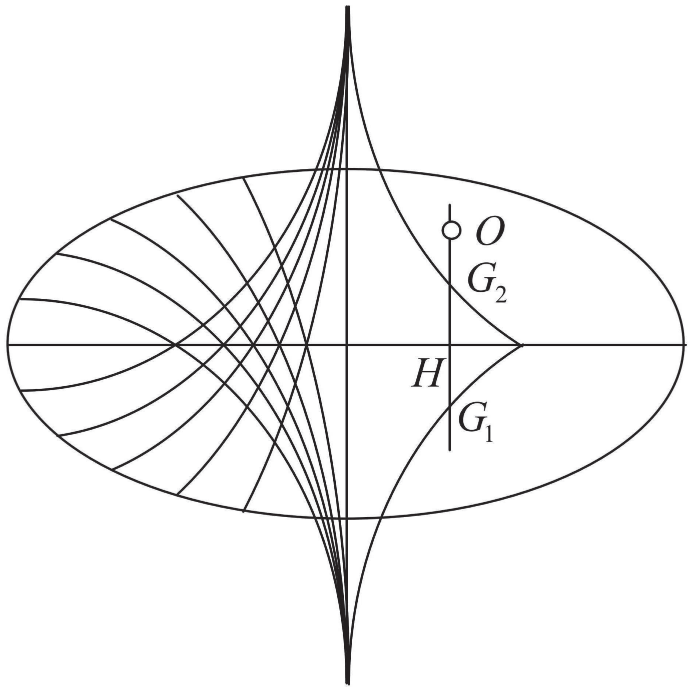

圖 6

用現代微積分可以證明這圖形就是橢圓的漸屈線或法包線，即法線的包絡。對於橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 來說，漸屈線是 $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$。而拋物線的漸屈線具有這樣的方程 $y=kx^{3/2}$，稱爲半立方拋物線。阿波羅尼奧斯並沒有引入這一類曲線，只限於對每一點 H，確定相應的分界點 G_1，G_2。

第 6 卷沒有什麼重要的內容，前一部分講述全等的及相似的圓錐曲線，還有圓錐曲線弓形。後一部分是一些作圖題，如從一個正圓錐如何截取一條曲線與已知圓錐曲線相等。

第 7 卷是關於共軛直徑的論述， 例如： 命題 12. 橢圓兩個共軛直徑上的正方形之和等於兩個對稱軸上的正方形之和。 命題 13. 雙曲線兩個共軛直徑上的正方形之差等於兩個對稱軸上的正方形之差。 命題 31. 橢圓或雙曲線的兩條共軛直徑所構成的平行四邊形 (以其交角爲內角) 等於兩條對稱軸所構成的矩形。

第 8 卷已失傳， 從第 7 卷的序言中， 可以看出它大概是第 7 卷的繼續或補充。 哈雷根據帕波斯所提供的線索， 進行了卓有成效的復原。

《圓錐曲線論》是一部經典巨著， 它可以說代表了希臘幾何的最高水準。 自此以後， 希臘幾何便沒有實質性的進步。 直到十七世紀的笛卡兒和帕斯卡， 圓錐曲線的理論才有所突破。 以後便向著兩個方向發展， 一是笛卡兒的解析幾何， 二是射影幾何， 兩者幾乎同時出現。 這兩大領域的思想和基本原理， 都可以在阿波羅尼奧斯的工作中找到萌芽。

和阿基米德比較， 阿波羅尼奧斯注意圖形的幾何性質， 而阿基米德側重數值計算， 這使他成爲微積分的先驅。

《圓錐曲線論》的篇幅很大， 第 1 − 7 卷就有 387 個獨立命題， 完全用文字來表達， 沒有使用符號和公式。 命題的敍述相當冗長， 言辭有時是含混的， 在希臘的著作中， 這是較難讀的一種。

其它著作

1. 帕波斯提到阿波羅尼奧斯除了《圓錐曲線論》之外， 還有六種著作， 但只有《截取線段成定比》完整地保存下來， 而且只是阿拉伯文本。 哈雷將它譯成拉丁文， 於 1706 年出版。 書共兩卷， 討論下述問題：

設有兩直線， 平行或相交， 在其上各有一點 A、 B， 現從某

一點 O 作直線與此二直線交於 M 、 N 二點， 使 $AM : BN$ 等於已知比。

全書圍繞這一問題考慮了各種可能情形。 它導致一個二次方程。 問題的解就相當於給出這二次方程的幾何解法。

2.《截取面積等於已知面積》和前一問題相仿， 不同之處是要求 AM 與 BN 構成的矩形與已知面積相等， 即 $AM \cdot BN$ 爲已知數。

3.《論接觸》提出一個有名的作圖題： 設有三個圖形， 可以是點、 直線或圓， 求作一圓通過所給的點 (如果三個圖形中包含點的話) 並與所給直線或圓相切。 共有十種可能情形： (1) 點、 點、 點； (2) 點、 點、 線； (3) 點、 線、 線 $\cdots\cdots$ (9) 線、 圓、 圓； (10) 圓、 圓、 圓。 最著名的是最後一種情形： 求作一圓與三已知圓相切， 常稱爲 “阿波羅尼奧斯問題”。 其解法已失傳， 詳見 [5]， P.184。

4.《平面軌跡》討論能用直尺圓規作出的軌跡， 即直線與圓。 圓錐曲線在希臘時代叫做 “立體軌跡”(solid loci)， 而其它曲線 (如螺線、 蚌線、 蔓葉線等) 叫做 “線性軌跡”(linear loci)。 本篇討論的問題隱含反演的思想。

下篇證明了一個軌跡問題： 與兩點的距離之比等於常數 ($\neq 1$) 的動點軌跡是一圓。 後人稱它爲 “阿波羅尼奧斯圓”。

5.《傾斜》是某一類作圖題。 例如要求作一線段， 使它或它的延長線通過一定點， 而兩端點落在二直線或圓周上。

6. 歐幾里得《原本》原文只有十三卷， 第 14 卷是後人添加上去的， 作者是許普西克勒斯 (Hypsicles， 約公元前 180 年)。 他在序中提到阿波羅尼奧斯曾比較過正十二面體與正二十面體的對比， 指出這兩種正多面體如內接於相等的球內， 那麼兩者面積之比就等於體積之比。

阿波羅尼奧斯還作過圓周率的計算， 但結果已失傳， 可能還設

計過一種以 “萬”(myriad) 爲基礎的記數法。

天文學說

阿波羅尼奧斯對天文學也有深入的研究。他推算過月球到地球的距離，因此有 ε 綽號 (這希臘字母形似月亮)。

在哥白尼 (十六世紀) 之前，西方天文學一直奉行托勒密 (二世紀) 的地球中心說。其要旨就是一切天體都圍繞地球旋轉。行星的軌跡，並不單純是一個以地球爲中心的圓，而是沿著一個叫做 “本輪” (epicycle) 的小圓旋轉，本輪的中心又沿著一個叫 “均輪”(deferent) 的大圓旋轉，均輪的中心才是地球。這種 “本輪、均輪” 說最早爲赫拉克利特 (Heraclides of Pontus，約公元前 390－前 339 年以後) 所倡導，不過只限於解釋水星、金星 (內行星) 的運行 (見 [5]，p.195)。阿波羅尼奧斯推廣用於一切行星，並作了詳細的數學論證。最後由托勒密集其大成，構造了盛行一千多年的地心說體系。

文　　獻

原始文獻

[1] J.L. Heiberg, *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, 2 vols, Leipzig, 1891－1893。

[2] P. Ver Eecke, *Les coniques d’Apollonius der Perge*, Bruges, 1923, Paris reprint, 1963。

[3] T.L. Heath, *Apollonius of Perga： Treatise on Conic Sections*, Cambridge, 1896; reprint 1961。

[4] R. Catesby Taliaferro, *Conics of Apollonius of Perga*, Great books of the western world 11, Encyclopaedia Britannica, Inc. 1952, 23rd edi., 1980。

[5] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the clarendon Press, II, 1921 。

[6] I. Thomas, *Seletions illustrating the history of Greek mathematics*, Harvard University Press, II, 1957 。

[7] T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford at the clarendon Press, II, 1931 。

[8] O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*, Brown University Press, 1957 。

[9] G.J. Allman, *Greek geometry from Thales to Euclid*, Arno Press, 1976 。

[10] B.L. van der Waerden, *Science awaekening*, Translated by A. Dresden, P. Noordhoff Ltd., 1954 。

[11] M. Cantor, *Vorlesungen über Gescichte der Mathematik*, B.G. Teubner, 1922 。

[12] G.J. Toomer, *Diocles on burning mirrors*, Springer–Verlag, 1976

[13] M. Latham, D.E. Smith, *The geometry of René Descates*, Dover Publications, 1954 。

[14] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, Princeton University Press, 1985 。