奧 馬 • 海 亞 姆

奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 1048 年 5 月 18 日生於霍臘散 (Khorāsān，今伊朗東北部一省) 內沙布爾 (Nīshāpūr，即 Neyshābūr)；1131 年 12 月 4 日卒於內沙布爾。數學、天文學、哲學、詩歌。

奧馬海亞姆之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Khayyam.html`

奧 馬 • 海 亞 姆

梁 宗 巨

(遼寧師範大學)

奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 1048 年 5 月 18 日生於霍臘散 (Khorāsān, 今伊朗東北部一省) 內沙布爾 (Nīshāpūr, 即 Neyshābūr); 1131 年 12 月 4 日卒於內沙布爾。數學、天文學、哲學、詩歌。

奧馬海亞姆的全名是吉亞斯丁•阿布•法斯•奧馬•本•伊卜拉欣•內沙布里•海亞姆 (Ghiyāth al-Dīn abu'l-Fatḥ 'Umar ibn Ibrāhīm al-Ñābūrī al-Khayyami)。從他的名字可以知道他的家族大致情況[1]。父親是伊卜拉欣, 有一個兒子名法斯, 奧馬 ('Umar 也拼作 Omar) 是他自己的名字, 吉亞斯丁 (Ghiyāth al-Dīn) 原意是 "信仰的幫助", 是後來獲得的尊稱, 內沙布里表明他來自內沙布爾或籍貫是內沙布爾。西方人更多地稱他爲奧馬海亞姆或海亞米 (al-Khayyāmī), "海亞姆" 是製造或經營帳篷的職業, 說明他的父親或祖輩是從事這種工作的。

奧馬出生之前, 西亞地區政局動蕩不安。十一—十二世紀, 塞爾柱 (Seljuk) 突厥人 (Turk) 在那裡建立一個龐大但不穩固的軍事帝國, 佔有兩河流域和現在的伊朗、敍利亞、巴勒斯坦、格魯吉亞、亞美尼亞等地。奧馬早年在家鄉受教育, 以後成爲一名家庭教師, 生活是淸苦的, 沒有很多閒暇去從事科學研究。奧馬在他的《代數學》中寫道: "我不能集中精力去學習這種 '代數學', 時局的變亂阻礙著我, ……。" 儘管如此, 奧馬仍然寫出了頗有價值的《算術問題》(*Problems of arithmetic*) 和一本關於音

[1] ibn (伊本, 在名字中可簡譯爲本) 表示是誰的兒子; abu (阿布) 表示是誰的父親。

樂的小册子。

1070 年左右，奧馬來到了撒馬爾罕 (Samarkand，今屬烏兹别克)。在當地統治者阿布•塔希爾 (Abū Ṭāhir) 的庇護下，奧馬寫成他的主要代數著作《還原與對消問題的論證》(*Risāla fi'l-barāhīn 'alā masā'il al-jabr wa'l-muqabala*，*Treatise on demonstration of problems of algebra and almuqabala*)，簡稱《代數學》。不久，他又接受塞爾柱蘇丹 (Sultan，最高統治者的稱號) 傑拉勒丁•馬拉克沙 (Jalāl al-Dīn Malik-shāh，1055－1092) 和他的大臣尼贊•穆勒克 (Niẓām al-Mulk) 的邀請，前往伊斯法罕 (Esfahan，今伊朗西部)，管理那裡的天文台，進行曆法改革。他在那裡工作了 18 年之久。這是他一生中最安謐的日子。

1092 年，政治氣候突變，馬利克沙去世，庇護人尼贊•穆勒克遭到暗殺，奧馬備受冷遇。馬利克沙的第二個妻子土坎•哈通 (Turkān-Khātūn) 接替執政二年，對奧馬很不友善，撤消了天文台的資助，研究工作被迫停止，曆法改革半途而廢。奧馬雖已失去昔日的恩寵，但仍留在塞爾柱的宫廷裡，盡力勸説馬利克沙的繼承者重新支持天文台和開展一般的科學研究。他描述伊朗古代的統治者寬宏大量，尊重學者，致力於興辦教育，發展科學，爲文化事業立下不朽的功勳。

奧馬始終未能説服當權者。直到 1118 年，馬利克沙的第三子桑賈爾 (Mu'izz ad-Dīn Sanjar，1084?－1157) 登上王位。奧馬離開伊斯法罕，到塞爾柱王朝的新首都梅爾夫。[Merv，今馬雷 (Мары)，屬土庫曼]。他和弟子們一起寫了《智慧的天平》(*balance of wisdoms*) 等書，研究如何利用金屬比重去確定合金的成分，所用方法是純粹代數的。這問題源出於阿基米德的研究。

奧馬是一個淵博的科學家，但在西方卻以詩人而聞名。他寫了很多四行詩 (quatrain)，其中透露出無神論的自由思想。這在他的一生中導致很多麻煩。晚年的時候，他甚至到麥加去朝覲，力圖

洗刷人們對他的無神論的指控。

曆法改革

奥馬在伊斯法罕期間， 領導一批天文學家編制天文表。 爲了紀念庇護人， 定名爲《馬利克沙天文表》(*Zīj Malik-shāhī*， *Malik-shāh Astronomical Tables*)， 現在只有一小部分流傳下來， 其中包括黃道座標表和 100 顆最亮星的星表等。

天文台更重要的工作是進行曆法改革。 波斯地區自古以來就使用陽曆， 公元前一世紀施行瑣羅亞斯德教 (Zoroaster。 中國史稱祆教、 拜火教) 的陽曆， 定一年爲 365 天， 分 12 個月。 薩珊 (Sāsān) 王朝 (公元 226 − 621 年) 定陽曆爲官曆。 阿拉伯人征服這個地區以後， 實行伊斯蘭教的陰曆。 這種曆分一年爲 12 個月。 6 個大月、 6 個小月， 大月 30 天、 小月 29 天， 全年 354 天。 閏年增加一個閏日成爲 355 天， 30 年加 11 個閏日。 陰曆一年和實際的迴歸年 365.2422 日相差約 11 天， 因此和四季是不合拍的， 這對農業很不方便。 奥馬時代， 波斯人繼續使用傳統的陽曆， 但因置閏的方法不精， 漸漸產生誤差。 有識之士看到， 曆法要符合天時， 必須進行根本的改革。

馬利克沙執政後， 在伊斯法罕興建天文台， 聘請以奥馬爲首的一群天文學家去完成改革的任務。 奥馬提出在平年 365 天的基礎上， 每 33 年增加 8 個閏日， 即平均曆年長 $365\frac{8}{33} = 365.\overline{24}$ 日。 這與實際的迴歸年 365.2422 日僅相差 19.37 秒鐘， 積 4460 年後才差 1 天。 而現行的公曆 (格里曆) 400 年置 97 個閏日， 曆年長 365.2425 日， 3333 年差 1 天。

值得注意的是， 如將 0.2422 展成連分數， 可知各個漸近分數

是

$$\frac{1}{4}\text{、}\frac{7}{29}\text{、}\frac{8}{33}\text{、}\frac{31}{128}\text{、}\frac{132}{545}\text{、}\cdots$$

第 1 個分數 $\frac{1}{4}$ 相當於每 4 年加 1 個閏日， 這就是儒略曆所用的閏法， 每 128 年差 1 天。 第二個分數是 29 年 7 閏， 1218 年差 1 天。 根據有理逼近的理論， 比奧馬閏法 (33 年 8 閏) 更精密的閏法有 95 年 23 閏，1 萬年以上才差 1 天。 如果限定週期小於 95 年， 那麼 33 年 8 閏就是最佳的選擇。 這表明奧馬有較高的理論水準。 他以 1079 年 3 月 16 日爲曆法的起點， 定名爲 “馬利克紀元”(Malikī era) 或 “傑拉勒紀元”(Jalālī era)。 可惜改曆工作隨著領導人的死亡而夭折。

伊斯蘭教的陰曆主要用於宗教， 它最大的缺點是和寒暑完全脫節， 夏天有時在 1 月， 有時在 6 月。 而奧馬改革後的陽曆和四季是一致的。 他對此頗感欣慰， 曾作四行詩以詠其事：

啊， 人們說我的推算高明，
我曾經把舊曆的歲時改正 —
誰知道那只是從曆書之中
消去未生的明日和已死的昨晨。 (文獻 [2]， p.59)

開高次方根

奧馬在《代數學》一書中寫道：“印度人有他們自己的開平方、開立方方法，⋯⋯ 我寫過一本書， 證明他們的方法是正確的。 我並加以推廣， 可以求平方的平方、 平方的立方、 立方的立方等高次方根。 這些代數的證明僅僅以《原本》的代數部分爲根據。”

這裡所說他寫的書可能就是《算術問題》。 現在萊頓大學藏有奧馬著作的手稿， 但只有《算術問題》的封面， 內容已遺失。

奧馬所了解的 “印度算法”， 實際來自兩本較早的書。 一本是吉利 (Kushyār ibn Labbān al-Jīlī) 的《印度計算原理》(*Principles of Hindu reckoning*)； 另一本則是奈塞維 (‘Alī ibn Aḥmad al-Nasawī) 的《印度計算必備》(*Things sufficient to understand Hindu reckoning*)。 然而這些書所記述的開平方、 開立方法和印度文獻所載的相去頗遠， 倒是和中國古代的方法密近。 中國的《九章算術》早已給出開平方、 開立方的完整法則， 並推廣用於方程的數值解。 伊斯蘭數學很可能受到中國直接或間接的影響， 因爲自古以來絲綢之路就是中國和中亞的交通要道。 不過由於他們使用了 10 個印度數碼， 於是被誤認爲 “印度算法”。

在現存阿拉伯文獻中， 最早系統地給出正整數開高次方一般法則的是納西爾丁 (Naṣir ad-Dīn al-Ṭūsī， 也稱圖斯) 編纂的《算板) 與沙盤算術方法集成》(*Collection on arithmetic by means of board and dust*)。 他沒有指出發明者， 但他非常熟悉奧馬的工作。 故很可能來自奧馬。

用圓錐曲線解三次方程

中世紀的阿拉伯數學家對圓錐曲線作了很多探索。 最值得稱道的是奧馬海亞姆用圓錐曲線來解三次方程。 這種方法可以溯源於希臘的梅奈奇姆斯 (Menaechmus)， 事實上他就是爲了解決倍立方問題 (相當於三次方程 $x^3 = 2a^3$) 而發現圓錐曲線的。 後來阿基米德在《論球與圓柱》(*On the sphere and cylinder*) 卷 2 命題 4 提出這樣的問題： 用一平面把球截成兩部分， 使這兩部分的體積成定比。 這問題導致三次方程

$$x^2(a-x) = bc^2\text{。}$$

解法的要點是求出兩條圓錐曲線的交點， 一條是雙曲線 $(a-x)y = ab$， 另一條是拋物線 $ax^2 = c^2y$。

阿基米德的 “平面截球問題” 引起阿拉伯數學家的極大興趣。 巴

格達的馬哈尼 (al-Māhānī) 最先試圖用代數方法去解， 但沒有成功。 後來哈津 (Abū Jafar al-Khāzin) 用圓錐曲線來解。 研究這問題的還有庫希 (al-Kuhi)、 伊本 • 海塞姆 (Ibn al-Haytham)、 艾布爾 • 朱德 (Abu'l Jud) 等。

奧馬的功勞， 在於考慮了所有形式的三次方程。 由於他只取正根， 係數也只限於正數。 因此三次方程有各種不同的類型。 他將一、 二、 三次方程歸結爲 25 類， 屬於三次方程的 14 類： 缺一、 二次項的 $x^3 = a$； 缺二次項的 3 類： $x^3 + bx = a$、 $x^3 + a = bx$、 $bx+a = x^3$； 缺一次項的 3 類： $x^3+cx^2 = a$、 $x^3+a = cx^2$、 $cx^2 + a = x^3$； 不缺項的 7 類： $x^3 + cx^2 + bx = a$、 $x^3 + cx^2 + a = bx$、 $x^3 + bx + a = cx^2$、 $cx^2 + bx + a = x^3$、 $x^3 + cx^2 = bx + a$、 $x^3 + bx = cx^2 + a$、 $x^3 + a = cx^2 + bx$。

每一類都給出幾何解法， 即用兩條圓錐曲線的交點來確定方程的根。 奧馬在《代數學》中， 專門闡述了方程的幾何解法。 1815 年， F. 韋普克 (Woepcke) 將此書從阿拉伯文譯成法文， 書名爲《奧馬海亞姆代數學》(*L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī*)， 以後又有 D.S. 卡西爾 (Kasir) 英譯校訂本《奧馬海亞姆代數學》(*The algebra of Omar Khayyam*， 1931)。 下面取出其中的一個例子， 用現代術語和符號來分析奧馬的方法 (文獻 [1]， p. 75)。

要解的方程是

$$x^3 + ax = b 。 \tag{1}$$

按照希臘人的觀點， 將一個數看作一個線段， 那麼兩個數之積就是矩形， 三個數之積是長方體。 同維數的量才能相加， 所以先將方程改成齊次的形式

$$x^3 + c^2x = c^2h ， \tag{2}$$

右端 c^2h 表示一個以 c、 c、 h 爲邊的長方體。

用解析幾何的語言來說， 方程 (2) 的根就是拋物線

$$x^2 = cy \tag{3}$$

和半圓周

$$y^2 = x(h-x) \tag{4}$$

交點的橫座標 x。 因爲從 (3)、 (4) 兩式消去 y， 就得到 (2)。

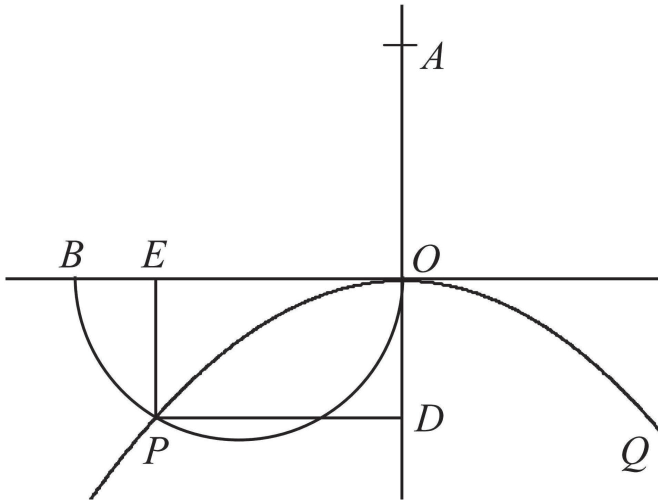

圖 1

此題在原書中是第 6 章第 1 題， 完全用文字敘述， 沒有方程的形式。 方程 (2) 表述爲 “立方與邊 (根) 等於一個數”。 解題的步驟是： 以 $BO = h$ 爲直徑作半圓 BPO， 作 $AOD \perp BO$， 以 O 爲頂點， $OA = C$ 爲 “參數” (正焦弦) 作拋物線 POQ 交半圓周於 P。 作 $PD \perp AD$、 $PE \perp BO$， 則 PD 就是 (2) 的根 (圖 1)。

事實上， 記 $PD = x$、 $PE = y$， 在半圓內，

$$PE^2 = y^2 = EO \cdot BE = PD \cdot BE = x(h-x),$$

根據拋物線的性質，

$$PD^2 = x^2 = OA \cdot PE = cy,$$

這正是 (3)、 (4) 兩式。

奧馬曾探索過三次方程的算術 (代數) 解法， 但沒有成功。 他在《代數學》中寫道：“對於那些不僅含有常數項、 一次項、 二次項的方程， 也許後人能夠給出算術解法。” 經過幾百年的努

力，三、四次方程的一般代數解法直到一六世紀才由義大利數學家給出，五次以上方程的可解性問題到十九世紀才解決[2]。

奧馬發展了歐幾里得的幾何代數學，使幾何與代數更緊密地聯繫起來，這是一項重要的貢獻。可惜在 1851 年韋普克的譯本出現之前，歐洲人幾乎完全不知道他的工作 (儘管在十八世紀已有一些零星的介紹)，否則解析幾何的發現和推進會更加迅速。

用現代的觀點看，如果引入負數並承認負根，三次方程可以寫成統一的形式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\text{，} \tag{5}$$

不必如此繁瑣地分類。以

$$x^2 = py \tag{6}$$

代入 (5)，得到

$$pxy + apy + b^2x + c^3 = 0\text{。} \tag{7}$$

(6) 是拋物線，(7) 是雙曲線。作出這兩條線，交點的橫座標便是 (5) 的根。

對《原本》的研究

奧馬在歐幾里得幾何的研究方面有兩項貢獻，一是對平行公設的試證，二是對比與比例提出新的見解。

早在九世紀，當歐幾里得《原本》傳入伊斯蘭國家後，第五公設就引起學者們的注意。所謂第五公設或平行公設就是《原本》中提出的公理：“如果一直線和兩直線相交，所構成的兩個同傍內角之和小於兩直角，那麼，把這兩直線延長，它們一定在那兩內角的一側相交。”這公設不論在詞句或內容方面都比其它四個公設複

[2]有些書上說的奧馬斷言三次方程的算術解法不可能有，只能用幾何 (圓錐曲線) 去解。(文獻 [8]，p. 269；[11]，p. 194。) 這些書的說法不確切。

雜得多， 而且也不那麼顯而易見。 人們自然會發生是否可以證明的疑問。

阿拉伯學者對此公設進行試證的有焦赫里 (al-Jawharī)， 塔比伊本庫拉 (Thābit ibn Qurra)， 伊本海塞姆 (Ibn al-Haytham， 即 Alhazen)， 奧馬海亞姆等人。 實質上他們並沒有證明了公設， 而是採用另外一些與之等價的公設來代替它。

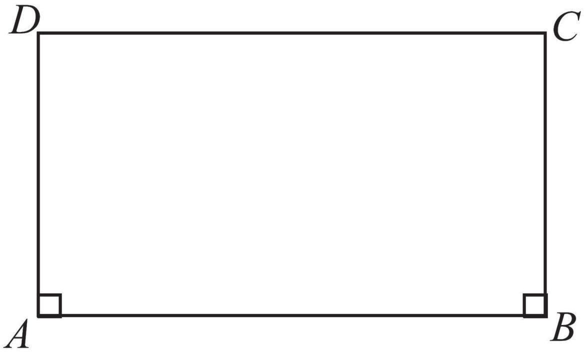

圖 2

奧馬在 1077 年撰寫了《辯明歐幾里得公設中的難點》(*Explanation of the difficulties in the postulates of Euclid*) 一書， 討論了兩個難題， 一是平行公設， 二是比的問題。 他考察四邊形 $ABCD$， DA 與 CB 同垂直於 AB 且 $DA = CB$(圖 2)。 無需用平行公設， 很容易證明 $\angle C = \angle D$。 而 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的大小有三種可能： (1) 等於直角； (2) 等於鈍角； (3) 等於銳角。 若採用平行公設， 可以證明 $\angle C$ 、 $\angle D$ 等於直角。 反之， 若能證明 $\angle C$ 、 $\angle D$ 等於直角， 便可推出平行公設。 奧馬用反證法， "證明" 鈍角、 銳角假設必導致矛盾， 因此只有直角的情形成立， 這就無異證明了平行公設。 但他的證明是有缺陷的， 實際是引入下述假設來代替平行公設： 兩條直線如果越來越接近， 那麼它們必定在這個方向上相交。 所以他也未解決平行公設問題。

十八世紀時， G. 薩凱里 (Saccheri) 重新研究這個四邊形 (後人常稱之爲 "薩凱里四邊形")， 由此得出一系列互不矛盾的命題。 他和前人雖然未建立 (也未意識到) 非歐幾何， 但已爲非歐幾何的誕生鋪平了道路。

比與比例也是奧馬研究的中心問題。 早在公元前五世紀， 畢達哥拉斯學派就建立過比例論， 不過只限於可公度量。 如果 A、 B 兩個量可公度， 即存在正整數 m、 n 使得 $mA=nB$，則

$$A:B=\frac{A}{B}=\frac{n}{m}$$

就是一個數。 但若 A， B 不可公度， 他們便認爲 A 與 B 無法相比。 這樣就很難建立一切量的比例論， 歐多克索斯 (Eudoxus of Cnidus) 爲了擺脫這一困難， 另立 “比” 的定義： 如果一個量加大若干倍之後就可以大於另一個量， 則說這兩個量有一個 “比”。 接著定義 “比例”： 設有 A、 B、 C、 D 四個量， A 與 C、 B 與 D 分別乘以同樣的倍數 m、 n， 如果

$$\text{由 } mA \gtreqless nB \text{ 可推出 } mC \gtreqless nD\text{，}$$

則說兩個比 $A:B$ 與 $C:D$ 相等， 即 4 個量可構成比例 $A:B=C:D$。

歐多克索斯採取這一定義是煞費苦心的， 這樣可迴避無公度的麻煩， 由此出發完成了適用於一切量的比例論。歐幾里得將歐多克索斯的理論編入《原本》成爲卷 V。伊斯蘭學者並不懷疑比例論的眞理性， 而是對其立論的出發點即比例的定義持有異議。最先提出新定義的是馬哈尼 (al-Māhānī)，他的思路可用現代術語表述如下：將 A/B 及 C/D 展開成連分數，$A/B=(q_1,q_2,\cdots,q_n,\cdots)$， $C/D=(q'_1,q'_2,\cdots,q'_n,\cdots)$， 其中 q_i、 q'_i ($i=1$、 2、 $\cdots$) 是各個偏商。 如果 $q_i=q'_i$ ($i=1$、 2、 $\cdots$) 則稱 A、 B、 C、 D 成比例， 即 $A/B=C/D$。 馬哈尼認爲這定義能更好地揭露比例的本質。 它適用於可公度量與不可公度量， 在可公度的情況， n 是有限的。

奧馬論證了這種定義和《原本》中比例定義的等價性， 進而研究比及比例的若干性質， 對伊斯蘭數學和西方數學有重要影響。

另一方面， 希臘人雖然承認無公度的兩個量 A、 B 有比， 但

始終不承認 A/B 是一個數 (即無理數)， 這就大大妨礙了數學的發展。 奧馬勇敢地衝破這一桎梏， 主張擴大數系， 將無公度量的比接納在內。 例如 2 的平方根， 圓周長與直徑的比等等， 應該考慮爲一種新的數。 這在思想上是一次不尋常的飛躍， 是建立實數系的先聲。 然而直到十九世紀才眞正實現了他的理想。

四行詩

四行詩很像中國的絕句， 每一首四行， 其中第一、 二、 四行押韻。 奧馬究竟寫了多少首四行詩， 沒有準確的數字。 劍橋大學圖書館藏有最早的 (1208 年) 手抄本， 收入 252 首。 而在他名義下出版的波斯文詩集多達 1069 首。 但有人考證只有一百多首確實是他作的。 1859 年， 英國詩人菲茨杰拉德 (Edward Fitz Gerald) 將 75 首譯成英文， 取名 “Rubáiyát of Omar Khayyam”， 廣爲流傳。 郭沫若於 1928 年將英譯本譯成中文， 題名《 魯拜集 》。 (魯拜是阿拉伯語， 意爲四行詩。)

奧馬曾寫過幾種哲學著作， 他的四行詩也包含很多哲理， 其中表露的思想相當複雜。 很難作出一致的評價。 一方面， 詩作的可靠性問題衆說紛紜； 另一方面， 在官方的示意下有時很難暢所欲言。 因此對他的議論褒貶不一， 毀譽參半。 總的來說， 他不囿於伊斯蘭教所宣揚的眞主創造世界的觀點， 對窒息學術探討的社會環境表示不滿。 正統的穆斯林不喜歡他， 但廣大讀者愛讀他的詩， 從中得到啓迪， 進而探索人生的眞諦。 後人爲了紀念他， 1934 年由多國集資， 在內沙布爾爲他修建了一座高大的陵墓。

文　　獻

原始文獻

[1] D.S. Kasir, *The algebra of Omar Khayyam*, Columbia Universety, 1931。

[2] 奧馬海亞姆 (Omar Khayyam) 著，郭沫若譯，魯拜集 (*Rubáiyát*)， 人民文學出版社， 1978。

[3] Омар Хайям, Математические трактаты, пер. Б. А. Роэенфельда, примеч, Б. А. Роэенфельда и А. П. Юшкевича, Историко-математ ические исследования, вып, 6, 1953。

[4] F. Woepcke, *L'algèvbre d'Omar Alkhayyāmī*, Paris, 1951。

研究文獻

[5] А. П. Юшкевича, История математики в средние века, Москва, 1961。

[6] J.L. Berggren, *Episodes in the mathematics of medieval Islam*, Springer-Verlag, 1986。

[7] B.L. van der Waerden, *A history of algebra*, Springer-Verlag, 1985。

[8] C.B. Boyer and U.C. Merzbach, *A history of mathematics*, John Wiley & Sons, 1989。

[9] D.E. Smith, *Euclid, Omar Khayyam and Saccheri*, Scripta Mathematica, 3(1935), 1, 5－10。

[10] D.J. Struik, *Omar Khayyam, mathematician, Mathematical Teacher*, 1958, 4, 280－285。

[11] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972。