納 皮 爾

納皮爾，J. (Napier， John) 1550 年出生於蘇格蘭的愛丁堡；1617 年 4 月 4 日卒於愛丁堡。數學。

納皮爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Napier.html

納 皮 爾

歐 陽 絳

(山西大學)

納皮爾，J. (Napier，John) 1550 年出生於蘇格蘭的愛丁堡；1617 年 4 月 4 日卒於愛丁堡。數學。

納皮爾出生於蘇格蘭的貴族家庭。13 歲進入聖安德魯斯的聖薩爾瓦特學院，曾在那裡接受神學教育。他的舅父 A. 博瑟韋爾 (Bothwell) 是奧克尼的主教，支持他到國外留學。1517 年納皮爾回到蘇格蘭。1572 年，與 J. 斯特靈 (Stirling) 爵士的女兒伊麗莎白 (Elizabeth) 結婚，並定居在加爾特內斯。1608 年遷居愛丁堡附近的梅爾契斯頓堡。1579 年，其妻去世，又娶珀思州克羅姆利克斯的 A. 奇絲霍姆 (Chisholm) 爲妻；第一任妻子有兩個孩子，第二任妻子有十個孩子。納皮爾的遺著是第二個兒子羅伯特 (Robert) 整理出版的。

納皮爾是一位地主，他曾經試驗肥料的使用和飼料的配合，並發現在飼料中加鹽的好處。他還發明了螺旋抽水機，用於抽去煤坑中的水 (1597)。

納皮爾還預言將來會有許多種殺傷力強的武器，並提出了設計，畫了示意圖。他預言將來會造出一種槍炮，它能“清除四英里圓周內所有超過一英尺高的活著的動物”；會生產“在水下航行的機器”；並且會創造一種戰車，它有“一只血盆大口”，能“毀滅所經之處的任何東西”。

他大部分時間生活在梅爾契斯頓堡的貴族莊園，並且把大部分精力花在那個時代的政治和宗教論爭中，但仍爲數學的發展做了許多有價值的工作。自 1572 年他第一次結婚後不久，就開始搜集資

料， 寫了一本關於算術和代數的論著， 此書僅以手稿形式保存下來； 納皮爾死後， 兒子羅伯特在 H. 布里格斯 (Briggs) 的幫助下抄寫， 整理成書。 1839 年， 由其後裔 M. 納皮爾發表， 書名爲《算術技巧》(*De arte logistica*)。 從這部著作中看出， 納皮爾研究過方程的虛根； 並把它當作是代數學中的秘密。

納皮爾於 1590 年左右開始寫關於對數的著作， 後來發表了兩本拉丁文論著：《奇妙的對數定理說明書》(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*， 1614) 和《奇妙對數定律的構造》(*Mirifici logarithmorum canonis constructio*， 1619)。《奇妙的對數定理說明書》對於對數的性質和用法作了簡要敍述， 並包括以分弧爲間隔的角的正弦的對數表。 此書的第一個英文譯本的譯者是 E. 賴特 (Wright)， 他死後由兒子 S. 賴特 (Wright) 發表 (1616)。《奇妙對數定律的構造》一書， 是 R. 納皮爾 (Napier) 在其父死後整理出版的， 其中包括納皮爾多年前寫的材料； 此書對於對數表計算和賴以建立的根據作了充分解釋。

《奇妙的對數定理說明書》引起了人們廣泛的興趣。 此書出版之後， 倫敦格雷沙姆學院幾何學教授布里格斯專程到愛丁堡向這位偉大的對數發明者表示敬意。 通過這次訪問， 納皮爾和布里格斯商定： 如果把對數改變一下， 使得 1 的對數爲 0， 10 的對數爲 10 的適當次冪， 造出來的表會更有用。 於是， 就有了今天的常用對數。

對數作爲一種計算方法， 其優越性在於： 通過對數， 乘法和除法被歸結爲簡單的加法和減法運算。 這種想法起源於納皮爾時代人們所熟知的公式

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)，$$

在這裡， $2\cos A$ 和 $\cos B$ 兩個數的乘積被 $\cos(A+B)$ 和 $\cos(A-B)$ 兩個數的和取代。 此公式易於擴展爲： 從任何兩個數的積變成另

外兩數的和。與上述的三角恆等式相聯繫，有下列三個恆等式：

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\text{，}$$
$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)\text{，}$$
$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\text{。}$$

這四個恆等式有時被稱做沃納公式，因爲 J. 沃納 (Werner) 曾利用它們簡化由天文學引起的長計算。此公式在 16 世紀末被數學家和天文學家們廣泛地用於把積變成和與差。此方法以 “加與減”(prosthaphaeresis) 著稱。長除法也可以類似地處理。

納皮爾通曉 “加與減” 的方法，並可能受到這種方法的影響；否則就難以說明他爲什麼最初把對數限制於能用角的正弦表示的那些數。但是，他的消除長乘法和長除法困難的辦法，與 “加與減” 方法是有顯著區別的。

納皮爾在對數的理論上至少花了 20 年；最終以幾何術語說明該原理如下。考慮線段 AB 和無窮射線 DE，如下圖 1 所示。令 C

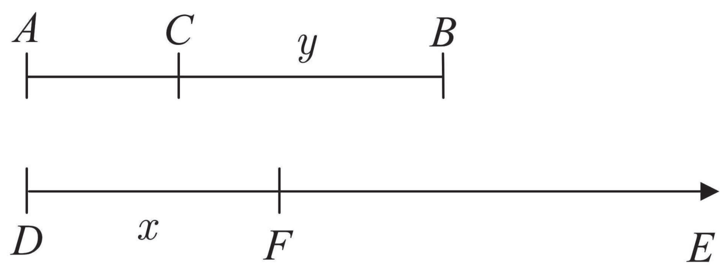

圖 1

點和 F 點同時分別從 A 和 D，沿著這兩條線以同樣的初始速度開始移動。假定 C 點的速度與線段 CB 成正比 (比例常數是 1)，而 F 點以勻速移動。納皮爾定義 DF 爲 CB 的對數。也就是說，令 $DF=x$，$CB=y$，則

$$x=\text{Nap}\log\ y\text{。}$$

納皮爾爲了免去小數的麻煩，取 AB 的長爲 10^7。我們現在藉助

於微積分。 可從納皮爾的定義推出

$$\mathrm{Nap}\log y = 10^7 \log_{1/e}(\frac{y}{10^7})。$$

推導過程如下： 由 $AC = 10^7 - y$， 得

$$C \text{ 的速度} = -\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y，$$

即 $\mathrm{d}y/y = -\mathrm{d}t$。 積分之， 得 $\ln y = -t + C$， 將 $t = 0$ 代入， 計算積分常數得 $C = \ln 10^7$。 所以

$$\ln y = -t + \ln 10^7。$$

由於

$$F \text{ 的速度} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 10^7，$$

所以

$$\begin{aligned} x &= 10^7 t， \\ \mathrm{Nap}\log y &= x = 10^7 t = 10^7(\ln 10^7 - \ln y) \\ &= 10^7 \ln(10^7/y) = 10^7 \log_{1/e}(y/10^7)。 \end{aligned}$$

有人說納皮爾對數是自然對數， 這是沒有根據的。 實際上， 納皮爾對數隨著眞數的增加而減少， 與在自然對數中的情況相反。

logarithm(對數) 這個詞意思是 “比數”(ratio number)， 意指數與數之間總保持相同的比。 納皮爾最初用的是 artificial number (人造數)， 後來才用 logarithm 這個詞。 布里格斯引進 mantissa 這個詞， 它起源於伊特拉斯坎語的一個晚期拉丁名詞， 原來的意思是 “附加” 或 “補缺”， 到十六世紀意指加尾數。 Chracteristic (首數) 這個術語也是布里格斯提出的。

納皮爾的驚人發明被整個歐洲熱心地採用， 尤其是天文學界， 簡直爲這個發現沸騰起來了。 P. S. 拉普拉斯 (Laplace) 就認爲， 對數的發現 “以其節省勞力而延長了天文學家的壽命”。

在誰最先發現對數這問題上， 納皮爾只遇到一個對手， 他就是瑞士儀器製造者 J. 比爾吉 (Biirgi)。 比爾吉獨立設想並造出了

對數表， 於 1620 年出版了《算術和幾何級數表》(*Arithmetische und geometrische Progress-tabulen*， 1620)。 雖然兩個人都在發表之前很早就有了對數的概念， 但納皮爾的途徑是幾何的， 比爾吉的途徑是代數的。 納皮爾以其對數的發現成爲數學史上的重要人物。 除此以外， 他還有三項重要成果。

(1) 解直角球面三角形時幫助記憶的方法， 稱爲圓的部分的規則。

畫一個直角球面三角形， 依習慣用法標上字母， 在該三角形的右邊有一個被分成五部分的圓， 除 c 外， 包括和該三角形同樣的字母， 且依同樣次序排列 (圖 2)。 C、 B、 A 上一槓， 指

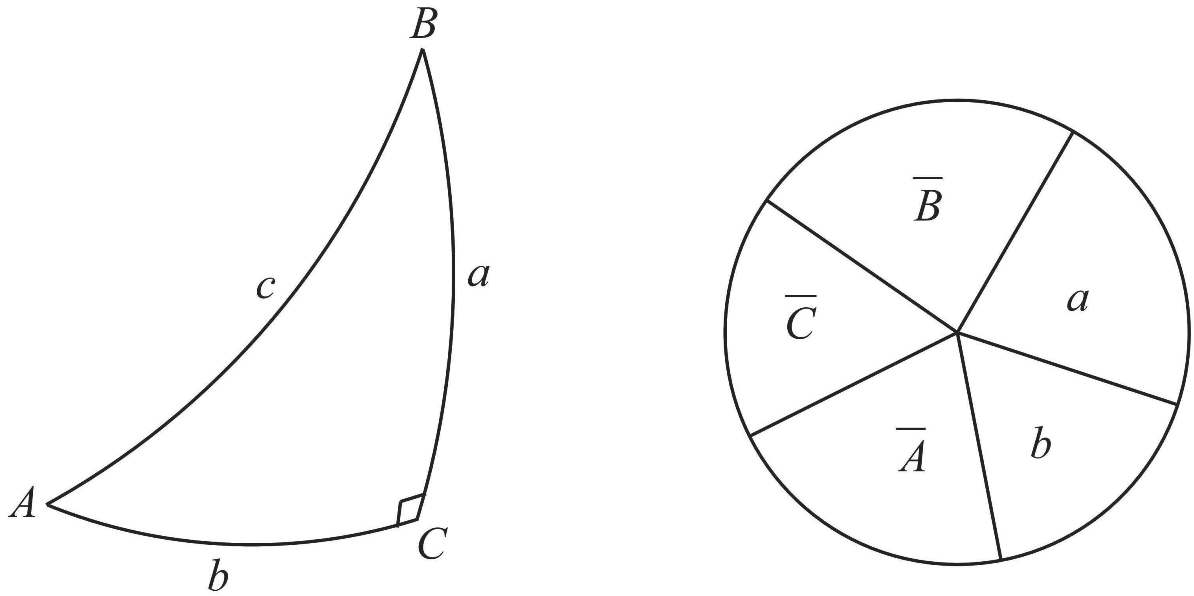

圖 2

其 “餘”(例如， $\overline{B}$ 指 $90^\circ - B$)。 角量 a、b、$\overline{C}$、$\overline{A}$、$\overline{B}$ 被稱作圓部 (circular parts)。 在該圓中， 與某一給定部分相鄰的有兩個圓部， 與它不相鄰的也有兩個圓部。 我們稱此給定部分爲 “中部”， 兩個相鄰的部分爲 “鄰部”， 兩個不相鄰的部分爲 “對部”。 納皮爾的規則可敘述如下：

① 任何中部的正弦等於兩個對部餘弦的乘積；

② 任何中部的正弦等於兩個鄰部正切的乘積。

(2) 得出用於解斜角球面三角形的四個三角公式 (稱做納皮爾比

擬) 中的至少兩個。 這四個公式是：

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\tan\frac{1}{2}c}\ ,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}c}\ ,$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\cot\frac{1}{2}C}\ ,$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\cot\frac{1}{2}C}\ 。$$

(3) 發明納皮爾算籌 (Napier's rods)。 它是用於機械地進行數的乘法運算、 除法運算和求數的平方根的。 納皮爾在 1617 年發表的《籌算集》(*Rabdologiae*) 中作了敍述。 例如， 在進行乘法運算時， 就要準備好 10 條卡片 (當然， 也可以用骨板， 金屬板或木板)。 圖 3 左方便是這些卡片中的一個， 頭上標有 6， 卡片上是 6 的各種倍數。 爲了說明如何使用這些長條作乘法運算， 請看《籌算集》中的例子： 1615 乘以 365。 把頭上標有 1、 6、 1、 5 的長條一個挨一個地擺成圖右邊的樣子。 容易讀出 1615 乘以 365 的 5、 6、 3 的結果 (遇到對角線上有兩個數字， 就把它們加到一起)： 8075， 9690 和 4845。 答案如圖 3 右上方所示。

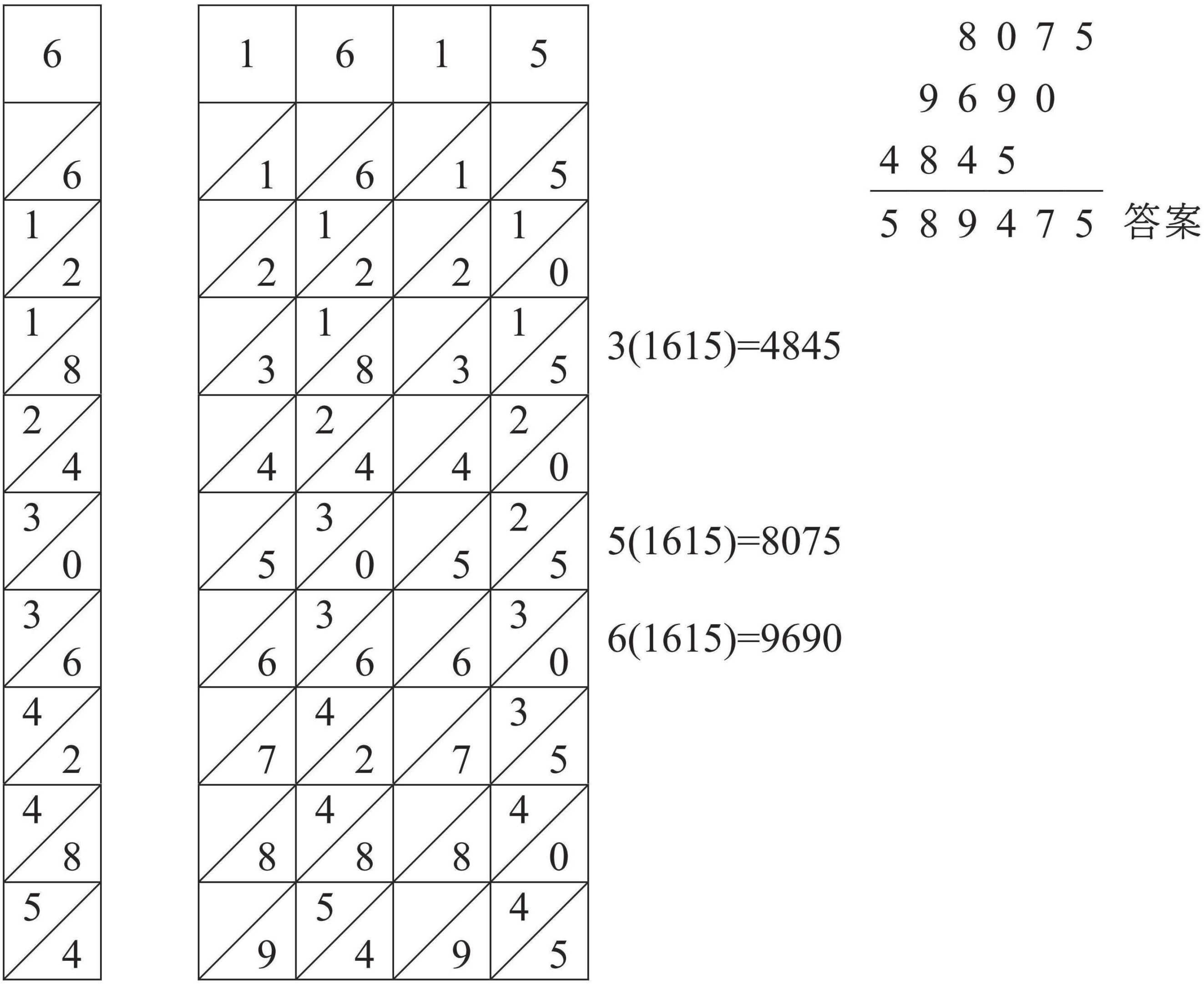

圖 3

文　　獻

原始文獻

[1] J. Napier, *Mirfici logarithmorum canonis description*, ejusque usus Edinburgh, 1614。

[2] J. Napier, *Rabdologiae, seu numerationis per virgulas libri duo*, Edinburgh, 1617。

[3] J. Napier, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*；*et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines*, Edinburgh, 1619

[4] M. Napier ed., *De arte logistica*, Edinburgh, 1839。

[5] C.G. Knott ed., *Napier tercentenary memorial volume*, London, 1915。

[6] M. Napier, *Memoirs of John Napier of Merchiston*： *His linage, life and times*, Edinburgh, 1834。

[7] E.M. Horsburgh ed., *Modern instruments and methods of caculation*： *A handbook of the Napier tercentenary of exhibition*, London, 1914。

[8] E.W. Hobson, *John Napier and the invention of logarithms*, Cambrdge, 1914。

[9] E.W. Hobson, *On early tables of logarithms and early history of logarithms, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 48(1920), 151－192。

[10] F. Cajori, *History of exponential and logarithmic concepts, American Mathematical Monthly*, 20(1913), 5－14, 35－47, 75－84, 107－117, 148－151, 173－182, 205－210。

[11] D.T. Whiteside, *Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1961) 214－231。