德　扎　格

德扎格， G. (Desargues， Girard) 1591 年 2 月 21 日生於法國里昂； 1661 年 10 月卒於法國 。 數學 。

德扎格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Desargues.html

德　扎　格

趙　林　峯

(遼寧師範大學)

德扎格， G. (Desargues， Girard) 1591 年 2 月 21 日[1]生於法國里昂； 1661 年 10 月卒於法國。 數學。

德扎格出生在法國里昂的一個教會人員家庭， 早期教育可能就是在那裡接受的。 他後來到了巴黎， 曾在 1626 年向巴黎地方當局建議用機械裝置提升塞納河的水， 供應城內。 這是我們知道的德扎格的第一次科學活動。

1628 年， 德扎格作爲軍事工程師參加了包圍拉羅舍爾 (La Rochelle) 的戰鬥， 在那裡結識了笛卡兒， 並成爲朋友。 大約在 1630 年， 住在巴黎的德扎格又同那時法國的幾個領頭的數學家 — M. 梅森 (Mersenne)、 P. 加桑迪 (Gassendi)、 C. 米多爾熱 (Mydorge) 等成爲朋友。 隨後， 德扎格經常出席梅森的 “巴黎學會”(Academie Parisienne， 這是一個科學史上著名的學術團體， 後來逐漸演化爲法國科學院) 的活動。 同時參加的還有 E. 帕斯卡 (Pascal)、 米多爾熱、 C. 哈代 (Hardy)、 G.P. 羅貝瓦爾 (Roberval) 以及 P. 卡爾卡維 (Carcavi)、 B. 帕斯卡 (Pascal)。 此外， 德扎格和著名的數學家 P. 費馬 (Fermat) 也有交往。 上述這批人的活動和所取得的成就， 使法國成爲 17 世紀上半葉世界數學史上最輝煌的國度， 也爲 18、 19 世紀形成世界的數學中心打下良好的基礎。 身處這一漩渦的德扎格以其新穎的思想和獨特的數學方法， 開闢了數學的一個新領域， 成爲射影幾何學的先驅。

[1]關於德扎格出生日期， 《簡明大不列顚辭典》註爲 1591 年 3 月 2 日。 D.E. 史密斯 (Smith) 等人的書中則只有出生年份 1593 年。

1636 年，德扎格出版了他的第一本幾何學著作《關於透視繪圖的一般方法》(*Exemple de L'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la partique de la perspective*，以下簡稱《透視法》)。在這本只有 12 頁的小册子中，他主要介紹了自己的透視繪圖方法，最後一段寫有他對平行和相交直線的新見解。此時，他的射影思想已露端倪，而巴黎的學者們卻被另外的兩本書所吸引，一本是 1636 年出版的 J. 博格朗 (Beaugrand) 的《大地靜力學》(*gèostatique*)，另一本是 1637 年 5 月出版的笛卡兒的《方法論》(*Discours de la méthode*)。德扎格也積極參加了討論，並由此和博格朗成爲論敵。在爭論中，他贏得了笛卡兒、梅森、費馬、羅貝瓦爾和 E. 帕斯卡 (Pascal) 等人的尊敬。

當人們醉心於笛卡兒處理幾何問題的代數方法時，德扎格正頑強地向獨闢的蹊徑前進。1639 年，他最重要的著作《試圖處理圓錐與平面相交結果的草稿》(*Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan*，以下稱《草稿》) 出版了。這本書集中體現了德扎格的新思想、新方法，是射影幾何早期發展的代表作。該書在當時只印了大約 50 本，德扎格把它們分送給朋友和熟人。他原想聽取這些人的意見，加以修改後重新出版。這一點可以從笛卡兒於 1639 年 6 月 19 日、博格朗於 1639 年 7 月 25 日給德扎格的信中看到。遺憾的是，由於該書難以閱讀，博格朗等人又進行敵意的攻擊，稱該書結果完全可由阿波羅尼奥斯 (Apollonius) 的方法得到，以此貶低德扎格的創見，再加上人們對綜合法處理幾何不重視，這本書只得到笛卡兒、帕斯卡等少數人的支持。隨著解析幾何和後來的微積分的迅猛發展，該書逐漸被遺忘了。直到 1845 年，法國幾何學家、數學史家 M. 夏斯萊 (Chasles) 才在巴黎的一個舊書店裡發現這本書的手抄本，此時射影幾何正處於復興時期，人們才認識到德扎格這本著作的價值。1950 年前後，在巴黎國立圖書館又找到它的原版

本， 歷經三百餘年的滄桑歲月， 它終於在諸多數學名著中有了一個適當的位置。

博格朗死後， 對德扎格的攻擊仍在繼續， 德扎格也不時地予以反擊。 同時， 他沒有放棄對 “普遍的” 或統一的方法的追求， 又陸續寫了幾篇文章， 介紹他的方法。 在 1640 年或 1641 年， 他寫了關於圓錐曲線的一篇論文， 指出圓的射影性質可一般地推廣到各種形式的圓錐曲線， 但這篇文章至今沒被發現。 另外的文章也都和圓錐曲線有關。

德扎格是一個爲了滿足實際需要而進行理論研究的數學家， 他所寫的書， 大多跟實際應用有關。 他曾寫過一些繪圖方面的書， 介紹運用透視原理的新方法。 於是那些偏愛舊方法的人們， 又向他非難。 激烈的爭論不僅影響了德扎格的工作， 也影響了他的自信心， 他讓雕刻家 A. 博斯 (Bosse) 去傳播他的數學方法， 而自己從 1645 年起就一心從事建築師的工作， 很少再關心數學的問題。1648 年博斯出版了《運用德扎格透視法的一般講解》(*Maniere universel le de Mr Desaugues pour pratiquer la perspective*)。 其中除了重印德扎格 1636 年的《透視法》之外， 還附加了德扎格的三個幾何定理， 其中之一便是著名的德扎格定理。

大約在 1649–1650 年間， 德扎格回到了他的故鄉里昂， 1657 年又回到巴黎。 這個期間， 他仍繼續他的建築師工作， 設計建造了一些精美的建築物。 1660 年， 德扎格重新出現於巴黎的學術圈內， 荷蘭科學家 C. 惠更斯 (Huygens) 曾在 1660 年 11 月 9 日的一次聚會上聽過德扎格的講話。 第二年， 德扎格就離開了人世。 關於他去世的確切日期和地點及去世原因都不清楚。 但從 1661 年 10 月 8 日在里昂宣讀他的遺囑一事， 人們推斷他死於 10 月的頭幾天。

在數學史上， 17 世紀是一個具有重大轉折的世紀。 幾何方面的突破主要表現在兩個不同的方向， 一個是利用代數方法來研究幾

何，這就是笛卡兒的解析幾何；另一個則是繼續採用綜合法，但卻在更一般的情形下研究幾何，這便是德扎格等人的工作。

德扎格在數學上的貢獻集中體現在他的上述兩書以及博斯書後附錄中的 3 個幾何定理，特別是他的代表作《草稿》，該書涉及到射影幾何的許多基本理論。可以說，德扎格是早期射影幾何的奠基者。他的主要貢獻如下：

1. 提出無窮遠點和無窮遠線的概念，從而使平行和相交完全統一

德扎格以前的幾何，今天被我們通稱爲歐氏幾何，它在處理直線間的平行和相交關係時是分別對待的。當由於繪畫和建築等實際問題需要而提出透視問題，要研究在透視對應下圖形的變化及其性質時，傳統的觀念就成爲束縛了。因爲在透視對應下，直線間的平行關係不再保持，例如，一個在地面上的大正方形 $ABCD$，被分割成許多小的正方形 (圖 1)。當用透視法將其畫

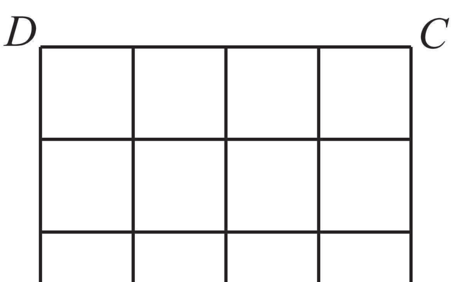

圖 1

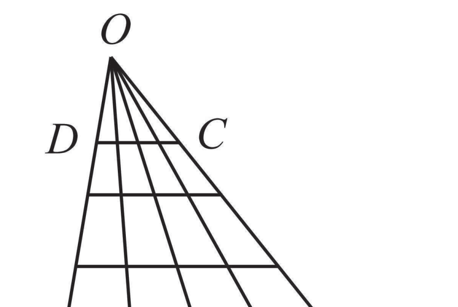

圖 2

在紙上時，平行直線 AD、BC 以及和它們平行的所有直線都相交於一點 O，而直線 AB、CD 以及與之平行的所有直線仍保持平行 (見圖 2)。當然在另外的情形下，直線 AB、CD 等的平行性也可能消失。關於這一點，德扎格在他 1636 年發表的關於透視

法的小册子中就有闡述。他詳細討論了在什麼情況下，經過透視後，平行直線變成相交直線；在什麼情況下，平行直線仍保持其平行性。這就是說，德扎格已經認識到，直線的平行關係在透視下是要改變的。

既然平行線束可以變換爲相交線束，那麼平行線束和相交線束就應視爲一致，但這在歐氏幾何中是無法解釋的。因爲按照歐氏幾何的觀點，相交線束交於同一點，而平行線束卻沒有交點。衝破原有的觀念，解決這一矛盾，或許就是德扎格引入無窮遠元素的初衷，這也是歐氏幾何與射影幾何的重大區別之一。德扎格在他的《草稿》一書中，一開始就引進了無窮遠點的概念。與歐幾里得有意避開無窮的做法形成對照的是，德扎格首先就允許直線向兩個方向無限延長，這無疑是一種認識上的進步。接著，德扎格在平行線束上引入無窮遠點，把它看成是這些平行線的交點，由此得出同一平面上任意兩條直線都相交的結論。這個結論在射影幾何中是至關重要的，是射影幾何理論體系賴以建立的基本觀點。値得注意的是，著名的德國天文學家、數學家 J. 刻卜勒 (Kepler) 在他的《對維泰洛的補充》給出天文學的光學部分、(*Ad Vitellionem paralipomena quibus astronomiae pars optica traditur*，1604) 一書中也提出了無窮遠點的思想。但是刻卜勒是否對德扎格具有影響，我們還沒有證據。此外，德扎格還在他的著作中，在平行平面上引入了公共的無窮遠直線，並且得出平行平面組都相交於同一直線的結論。這樣，在德扎格的思想中，平行被看作是相交的特殊情形，初步確立了不同於歐氏空間的射影空間的原始概念。這些思想爲德扎格研究各種射影性質帶來極大的方便，也表現了德扎格非凡的獨創精神。

2. 建立點列的對合定義，獲得一些重要結果

在《草稿》一書中，德扎格先討論了直線上的點列，然後進

行射影平面上有關內容的討論，最後是圓錐曲線的射影性質的討論。在這本書中，關於對合的內容佔了較大的篇幅。在德扎格創用的所有術語中，也只有對合 (involution) 這個詞沿用下來。德扎格的對合定義是這樣的：直線上三對點 B、H；D、F；C、G 是對合的，如果 $\dfrac{BD\cdot BF}{HD\cdot HF}=\dfrac{BC\cdot BG}{HC\cdot HG}$。若 D 和 F 重合，C 和 G 重合，則有 $\dfrac{BG}{HG}=\dfrac{BF}{HF}$，或等價地 $\dfrac{BF\cdot HG}{BG\cdot HF}=1$，這種情形被德扎格稱爲 B、H、G、F 是四點對合。四點 B、H、G、F 是對合的，也就意味著 B 和 H 調和分割線段 FG。德扎格還發現，當這四個點中的一個，比如說 H 是無窮遠點，就相當於 B 平分線段 FG 的特殊情形。

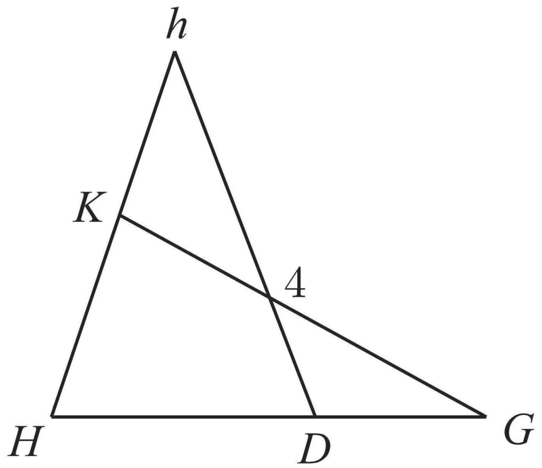

圖 3

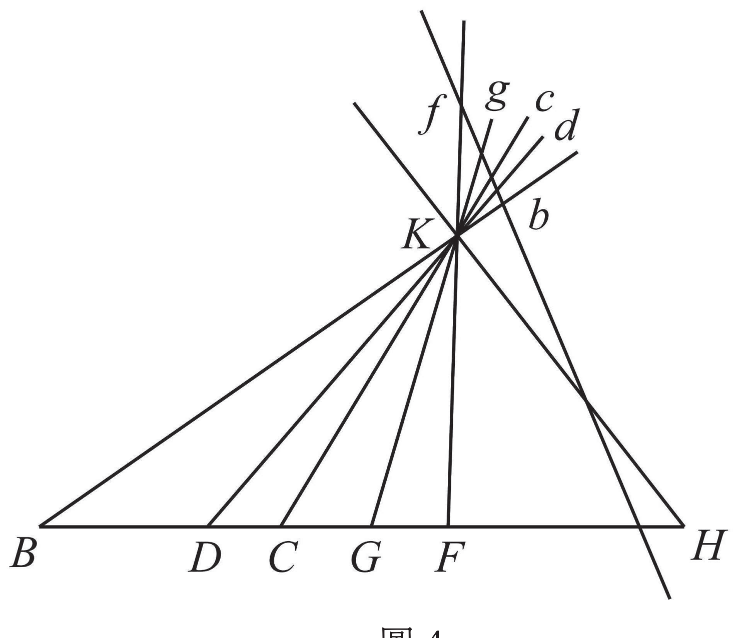

圖 4

活躍於公元 1 世紀的希臘數學家門納勞斯 (Menelaus) 曾提出一個有關球面三角形的定理，該定理的證明要依據平面三角形的相應定理 (即門納勞斯定理)。門納勞斯沒有證明後一個定理，而它在德扎格的許多證明中具有重要地位，因此在進行射影平面內某些性質討論前，德扎格首先證明了這個定理：如果 hKH，$H4D$ 和

$K4G$ 被 HDG 所截，則 $\frac{Dh}{D4} = \frac{Hh \cdot GK}{HK \cdot G4}$(圖 3。這裡採用了德扎格的提法及其所用的符號)。他過 K 作 HG 的平行線，然後利用三角形平行截線定理來證明。門納勞斯定理的逆也眞，就是若 $\frac{Hh}{HK} \cdot \frac{GK}{G4} \cdot \frac{D4}{Dh} = 1$，則 H、D、G 三點共線。

在證明了門納勞斯定理之後，德扎格立即用它證明了一個重要定理：如果 B、H；D、F；C、G 是在不通過 K 的一直線上的三對對合點，b、h、d、f、c、g 是 BK、HK 等直線和另一直線的交點，那麼，b、h；d、f；c、g 也是 3 對對合點 (見圖 4)。換句話說，一直線上對合的 6 個點，經一點射影變換到另一直線上的映像也是對合的。德扎格看到，當 k 是無窮遠點時，定理是顯然的，因爲那時 BK、HK 等互相平行。他還研究了另外的特殊情形。至於 4 點對合的類似定理，德扎格也是作爲特殊情況看待的，因此德扎格相當於給出了調和點列經射影變換後仍爲調和點列的結果。他還利用上一定理，給出了已知直線上的 3 個點，尋求第 4 調和點的簡單作法。

對合的定義，今天已經是射影幾何的一個重要概念了。德扎格關於對合的這些結果，是在前人研究的基礎上，採用射影的觀點進行一般化處理，因而具有較普遍的意義。

3. 提出圓柱和圓錐的統一思想，並且第一個採用射影的方法，統一研究圓錐曲線問題

圓錐曲線問題是德扎格研究的一個重要課題。古希臘數學家阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》(*Conics*) 對圓錐曲線問題作了完整的總結，使後人若無思想上的突破，便幾乎沒有插足之地。德扎格第一個認識到所有的非退化圓錐曲線 (橢圓、拋物線、雙曲線) 和

圓是射影等價的， 從而可以利用射影法統一處理圓錐曲線， 得出許多重要的新定理。

圓柱截面問題在阿波羅尼奧斯的著作中沒有討論。 公元 4 世紀的埃及數學家塞里納斯 (Serenus) 在他的著作《 圓柱截線 》(*On the section of a cylider*) 和《 圓錐截線 》(*On the section of a cone*) 中也只得到 “已知一個圓錐 (圓柱)， 可以找到一個圓柱 (圓錐)， 使同一平面能截出相等的橢圓” 這樣的結果。 德扎格遠遠超過前人， 他首先將圓柱視爲圓錐的特例。 由於引進了無窮遠點， 德扎格就可以同時考察圓錐和圓柱， 而且在他看來圓柱不過是頂點在無窮遠點的圓錐， 這樣就把圓柱和圓錐統一起來了。

按現代的觀點， 德扎格是把一個圓錐的兩個截面看作以圓錐頂點爲射影中心的射影對應下的兩圓錐曲線， 把一個圓柱的兩截面看作仿射對應下的兩橢圓， 而仿射變換乃是以無窮遠點爲射影中心的射影變換。 而且， 德扎格認爲拋物線、 雙曲線和橢圓一樣是閉合的， 只不過是在無窮遠點處閉合。 他進一步認爲所有的 (非退化) 圓錐曲線是 (射影) 等價於圓的， 就是說圓所具有的射影性質， 對其它各種類型的圓錐曲線全都適用。 雖然德扎格的這些思想並非十分明確， 但在他的《 草稿 》一書中都有不同程度的表現。

以德扎格的名字命名的德扎格對合定理的證明體現了德扎格運用射影思想處理問題的獨特方法。 設 B、 C、 D、 E 是四邊形的四個頂點， 對邊 BC 和 ED 交於 N， BE 和 CD 交於 F， BD 和 CE 交於 R， 則這些線與任意一條直線 l 的 6 個交點是對合的 (見圖 5)。 進一步， 任何通過 B、 C、 D、 E 的圓錐曲線和四邊形的任意兩對邊與直線 l 的 6 個交點也是對合的。 定理的前半部分是希臘數學家帕波斯 (Pappus) 的一個結果， 德扎格利用門納勞斯定理證明了這一部分。 定理的後半部分完全是德扎格的。 而且是體現德扎格射影方法的傑作。 證明時， 德扎格首先假設通過四邊形 $BCDE$ 的圓錐曲線是一個圓， 運用圓的割線定理和上半定理

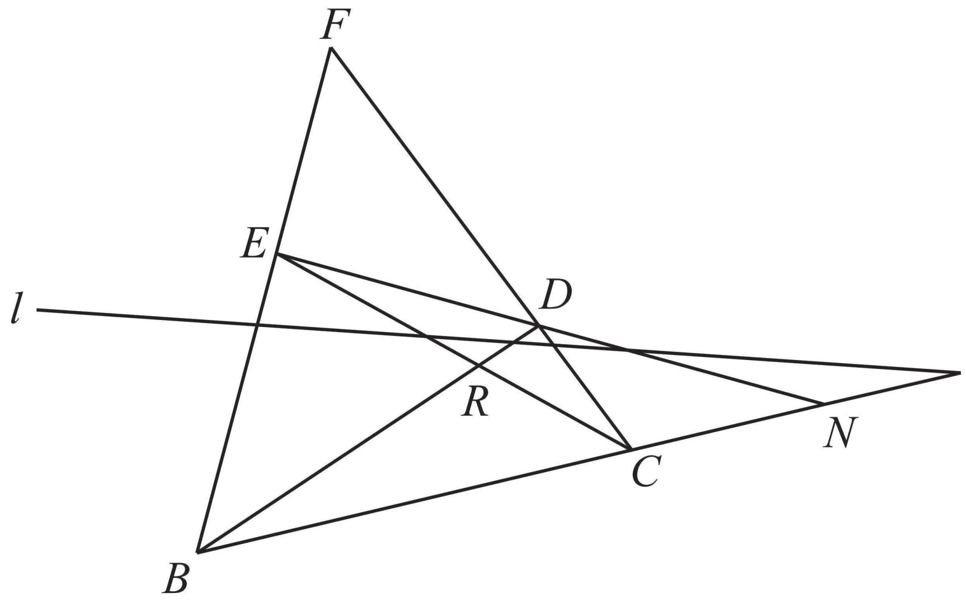

圖 5

證明中的一些結果， 證明了在圓的情形下定理成立。 然後， 假設過 $BCDE$ 的圓錐曲線是任意的， 由於這一圓錐曲線可視爲一圓錐的截面， 將其經圓錐頂點射影變換到另一截面是圓的平面上， 因爲對合是射影不變的， 所以定理仍眞。 這種利用射影變換思想進行證明的方法， 不僅避開了各種複雜情況， 簡化了證明過程， 而且把所有的圓錐曲線的射影性質統一起來。 作爲這個定理的推論， 德扎格還得到 BD 和 DE 平行時的結果。

在德扎格的其它定理中， 我們還應提到他關於圓錐曲線的極點和極線的幾個定理。 極點和極線問題在阿波羅尼奧斯的《圓錐曲線論》中作過討論。 但德扎格的定理更具一般性， 並有新的結果。 在證明中， 他總是先對圓的情形證明成立， 然後再通過射影不變性得出最後結論。 藉助這些定理， 德扎格還發現了尋找一點關於圓錐曲線的極線的作法以及圓錐曲線的切線作法， 這些方法都比阿波羅尼奧斯的作法簡單。

對圓錐曲線的研究， 顯示了德扎格射影方法的優越， 使得一些帶有普遍性的問題的證明變得極其簡潔。 這可能就是德扎格所要追求的統一的或普遍的方法。 這種爲德扎格首先使用的方法， 現已成爲射影幾何中的基本方法。

4. 提出並證明了德扎格定理

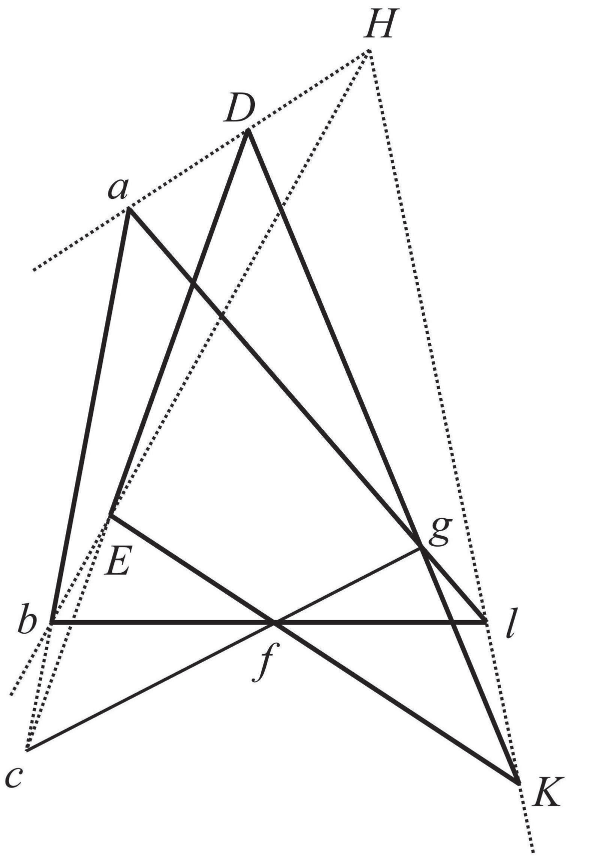

圖 6

在博斯書後附錄中的德扎格三個幾何定理的第一個便是著名的德扎格定理：如果兩個三角形 abl、DEK 對應頂點的連線 aD、bE、lK 共點 (H)，那麼它們的對應邊的交點 c、f、g 共線，其逆定理也成立 (圖 6。需要說明的是，圖形基本保持博斯書中的原狀，字母也相同，只是定理的敍述爲了簡明而採用現代方式)。德扎格在共面 (二維) 和不共面 (三維) 的情形下分別給出了正定理和逆定理的全部證明。有趣的是，三維情形要比二維情形的證明簡單。

歐氏幾何是一種度量幾何，它跟圖形的度量性質有關，比如線段的長度、角的大小等。射影幾何則是一種非度量幾何，它主要研究圖形的位置關係，比如相交、共線、共點等。而三角形又是射影幾何中的基本圖形，因此，德扎格定理在射影幾何中就具有重要意義。

德扎格在射影幾何學上的貢獻可以說是開創性的，他的無窮遠元素的思想及射影的證明方法是射影幾何學的基本內容。

德扎格的著作難以閱讀且難以見到，這是他之所以在後來的很長時期默默無聞，他的工作長達 150 餘年無人知曉的原因之一。德扎格在他的著作中採用了一些由植物學借用來的術語，比如不同情形的線或線段，他分別用 “樹幹” (tronc)、“枝條”(rameau) 等表示；不同情形的點，他又用 “結”(noeud)，“根株”(souche) 等表

示。 這些術語的使用， 原意可能是想使文章通俗易懂， 而且又和傳統的術語相區別。 但結果反而增加了閱讀的困難， 也降低了他的著作的影響力， 阻礙了他的方法的傳播。

雖然由於各種原因， 德扎格在當時和以後的影響遠低於他的成就， 但也有少數數學家接受了他的思想和方法， 繼續爲射影幾何做出貢獻。 B. 帕斯卡 (Pascal) 便是最突出的一位。 帕斯卡跟隨其父 E. 帕斯卡參加了梅森的數學團體， 從中受到德扎格的直接影響。 在德扎格的鼓勵下， 帕斯卡投入到射影幾何的研究， 天才地獲得了許多出色的成就。 稍後， P. 拉伊爾 (La Hire) 也開始運用德扎格的射影方法研究圓錐曲線。 拉伊爾的父親是德扎格的學生， 擁有德扎格《草稿》一書的印本。 拉伊爾將其手抄下來， 這一手抄本後來被沙勒發現， 才使德扎格的著作重見天日。 拉伊爾仔細閱讀了德扎格的著作， 因此深受影響， 他在此基礎上爲射影幾何做了相當多的工作， 取得一些較爲重要的結果。

在德扎格、 帕斯卡等人之後， 射影幾何早期研究便被洶湧而起的解析幾何、 微積分的浪潮所吞沒， 直到 19 世紀才重新興起並正式創立這一數學分支。 遺憾的是， 數學家們還不知道德扎格的工作而不得不重新做起。

作爲數學史上的一個重要人物 — 德扎格， 曾被歷史忘記， 可是一旦被人們重新認識， 他的數學功績就會永存！

文　　獻

原始文獻

[1] J.V. Field and J.J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, 1987。

研究文獻

[2] R. Taton, *Desargues*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 4, 1971, 46–51。

[3] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, 1972。

[4] J. Fauvel and J. Gray, *The history of mathematics London*, 1987

[5] C.B. Boyer, *A history of mathematics*, New Jersey, 1988。

[6] D.E. Smith, *History of mathematics*, Ginn and Company, 1923。

[7] 梁宗巨，數學歷史典故，遼寧教育出版社，1991；九章出版社，1998

[8] Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия, Учпедгиз, 1953(中譯本：Н. Ф. 切特維魯新，射影幾何學，高等教育出版社，1955)

[9] V. Sanford, *A short history of mathematics*, Houghton Mifflin Company, 1930。