費　馬

費馬， P. de (Fermat， Pierre de)， 1601 年 8 月 17 日生於法國南部圖盧茲附近的波蒙特－德－洛馬涅 (Beaumont-de-Lomagne)； 1665 年 1 月 12 日卒於法國卡斯特爾 (Castres)。 數學。

費馬之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Fermat.html

費　馬

李心燦　　王武保

(北京航空航天大學)

費馬， P. de (Fermat， Pierre de)， 1601 年 8 月 17 日生於法國南部圖盧茲附近的波蒙特－德－洛馬涅 (Beaumont-de-Lomagne)； 1665 年 1 月 12 日卒於法國卡斯特爾 (Castres)。 數學。

費馬出身於皮革商人家庭， 他的祖父、 父親、 叔父都從事商業， 他的父親多米尼克 (Dominique Fermat) 還是當地第二執政官， 經辦了一個生意興隆的皮革商行。 他的母親克拉麗・德・朗 (Glaire de Long) 曾在長袍貴族議會中任職。 費馬於 1631 年 6 月 1 日和他母親的堂妹路易絲・德・朗 (Louise de Long) 結婚， 生育了兩個兒子和三個女兒。

費馬的童年和少年時代是在波蒙特渡過的， 在家鄉上完中學後， 可能進入了圖盧茲大學。 十七世紀二十年代的後期他曾在波爾多 (Bordeaux) 度過了相當長的一段時間， 就在這一時期他對數學發生了興趣， 深入地研究過 F. 韋達 (Viète) 的著作。 費馬在 1631 年 5 月 1 日獲奧爾良 (Orleans) 大學民法學士學位。

費馬以律師爲職業， 曾任圖盧茲議會的議員， 並享有長袍貴族的特權。 他不但有豐富的法律知識， 而且是一個博覽群籍、 識多見廣的學者。 雖然數學只不過是他的業餘愛好， 但他精通法語、 意大利語、 西班牙語、 拉丁語、 希臘語， 從而使他不僅能精心研究韋達的著作， 而且能深入鑽研那些古典的數學著作。 例如， 阿基米德 (Archimedes)、 阿波羅尼奧斯 (Apollonius)、 丟番圖 (Diophantus)、 帕波斯 (Pappus) 等人的作品， 在下述幾個數學

分支中做出了極爲重要的貢獻： 他在研究幾何的過程中發現了解析幾何的原理； 他是微積分的先驅者； 他和 B. 帕斯卡 (Pascal) 共同開創了概率論的早期研究； 他是近代數論的開拓者。

他和笛卡兒分享創立解析幾何的殊榮

費馬對於曲線的探討， 是從研究古希臘的幾何學家， 特別是研究阿波羅尼奧斯的成果開始的。 他力圖把阿波羅尼奧斯關於軌跡的某些久已失傳的證明補充起來， 爲此他寫了篇幅不大的《平面和立體的軌跡引論》(*Ad locos planos et solidos*) 一書。 這本著作可能在 1629 年左右編成， 但直到 1679 年才出版問世。 他說他試圖開展關於軌跡的一般性研究， 這種研究是希臘人沒有做到的。

從費馬的《平面和立體的軌跡引論》和他在 1636 年與 G.P. 羅貝瓦爾 (Roberval) 等人的通信中， 可以看出他在笛卡兒發表《幾何學》(*La géometrie*， 1637) 之前， 就已發現了解析幾何的基本原理， 發現了用代數方程表示曲線的方法： 他取一條水平的直線作爲軸， 並在此直線上確定一個點作爲原點。 他考慮任意曲線和它上面的一般點 M (圖 1)。 點 M 的位置用兩個字母 A、 E 來確定， A 表示從原點 O 沿軸線到點 Z 的距離， E 表示從 Z 到 M 的

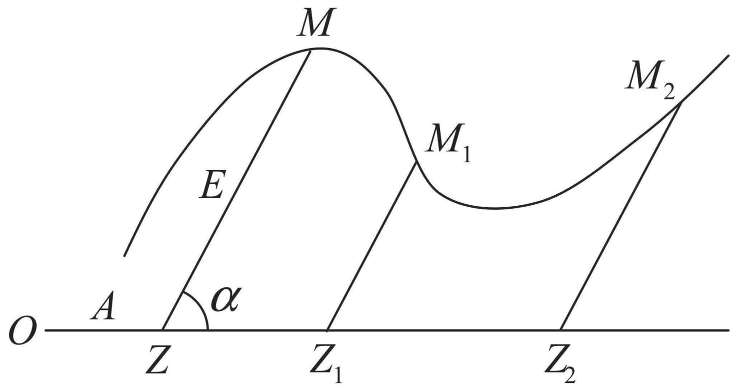

圖 1

距離 ($\overline{ZM}$ 與軸線成固定的角 α)。 費馬所用的坐標實際上是我們所說的傾斜坐標， 但是 y 軸沒有明顯地出現， 而且不用負數。 他的

A、E 就是我們的 x、y。費馬清楚地敍述了他的一般原理："只要在最後的方程裡出現了兩個未知量，我們就得到一條軌跡，這兩個量之一，其末端就繪出一條直線或曲線。"圖中對於不同位置的 E，其末端 M、M_1、M_2、$\cdots$ 就把這條"線"描繪出來。費馬的未知量 A 和 E 實際上是實數，或者可以說，聯繫 A 和 E 的方程是不確定的。在這裡，費馬採用韋達的辦法，讓一個字母代表一類的數，然後寫出聯繫 A 和 E 的各種方程，並指明它們所描繪的曲線。例如，他寫出"D in A aequetur B in E (用我們的記號就是 $Dx = By$)"，並指明這代表一條直線。他還給出了 (以下用我們今天的符號)：$d(a-x) = by$ 代表一條直線；$a^2 - x^2 = y^2$ 是圓的方程；$a^2 - x^2 = ky^2$ 是橢圓方程；$a^2 + x^2 = ky^2$ 是雙曲線方程；$xy = a$ 是雙曲線方程；$x^2 = ay$ 是拋物線方程。應該指出，因費馬不用負坐標，他的方程不能像他所說的代表整個曲線，但他確實領會到坐標軸可以平移或旋轉，因爲他給出一些較複雜的二次方程，並給出它們的簡化形式。例如，他曾指出 $d^2 + xy = bx + sy$ 是雙曲線。費馬既把圓錐曲線看成圓錐的平截線，也看成爲平面軌跡和二次方程的圖形。他在《求最大值和最小值的方法》(*Methodus ad disquirendam maximan et minimam*，1637) 中引進了曲線 $y = x^n$ 和 $y = x^{-n}$。他在 1643 年的一封信裡，還簡短地描述了他的三維解析幾何的思想。他第一個把三元方程應用於空間解析幾何。他還談到了柱面、橢圓拋物面、雙葉雙曲面和橢球面，並指出作爲平面曲線論的頂峰，應該研究曲面上的曲線。"這個理論，有可能用一個普遍的方法來處理。我有空閒時將說明這個方法。"儘管費馬對三維解析幾何未能給出一個幾何框架，但他卻爲它提供了一個代數基礎。在 1650 年的一篇文章"新型二階或高階方程分析中的指標問題" (*Novus secundarum et ulterioris ordinis radicum in analyticis usue*) 裡，他指出，一個自變量的方程決定點的作圖，二個自變量的方程決定

平面曲線的軌跡的作圖， 三個自變量的方程決定空間中曲面的軌跡的作圖。

當笛卡兒的《幾何學》出版之際， 費馬曾對書中所提出的曲線分類理論提出異議， 並指出書中不應該刪去極大值和極小值、 曲線的切線， 以及立體軌跡的作圖法。 他認爲這些內容是所有幾何學家值得重視的。 爲此， 他們曾進行過激烈的爭論。 但冷靜下來之後， 態度便逐漸緩和。 費馬在 1660 年的一篇文章裡， 既開誠佈公地指出笛卡兒《幾何學》中的一個錯誤， 又誠摯地說出， 他很佩服笛卡兒的天才。

費馬和笛卡兒研究解析幾何的方法是大相徑庭的， 表達形式也迥然不同： 費馬主要繼承了希臘人的思想。 儘管他的工作比較全面系統， 正確地敍述了解析幾何的基本原理， 但他的研究主要是完善了阿波羅尼奧斯的工作。 因此古典色彩很濃， 並且沿用了韋達以字母代表數類的思想， 因此需要讀者對韋達的代數知識了解甚多。 而笛卡兒則是從批判希臘的傳統出發， 斷然同這種傳統決裂， 走的是革新古代方法的道路。 他的方法更具一般性， 也適用於更廣泛的超越曲線。 費馬是從方程出發來研究它的軌跡， 而笛卡兒則從軌跡開始建立它的方程。 這正是解析幾何中一個問題的正反兩種提法。 但各有側重， 前者是從代數到幾何， 而後者是從幾何到代數。 從歷史的發展看， 後者更具有突破性。

他是微積分學的先驅者之一

關於微積分方法的創立， I. 牛頓 (Newton) 曾經說過：“我從費馬的切線作法中得到了這個方法的啓示， 我推廣了它， 把它直接地並且反過來應用於抽象的方程。”[1]

對光學的研究特別是透鏡的設計， 促使費馬探求曲線的切

[1]Turnbull， *Mathematical Discoveries of Newton*， 1945， p.5。

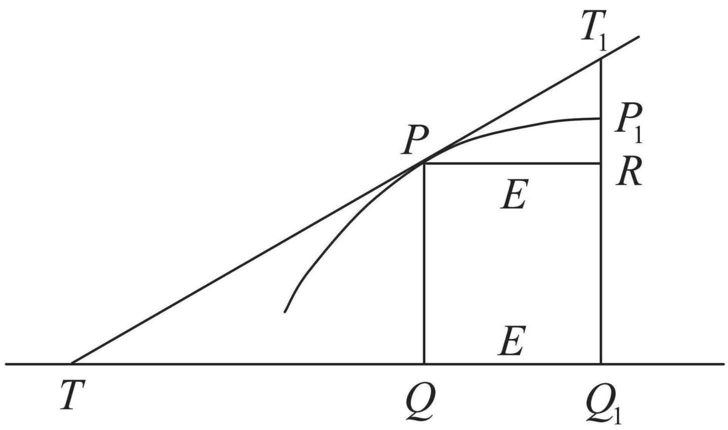

圖 2

線。 他在 1629 年就找到了求切線的一種方法， 但遲後八年發表在 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》中， 他的方法要點如下：

設 PT 是曲線在 P 處的切線 (圖 2)，TQ 的長叫次切線。 費馬的方案是求出 PQ 的長度， 從而知道 T 的位置， 最後就能作出 TP。

設 QQ_1 是 TQ 的增量， 長度爲 E。 因 $\triangle TQP \sim \triangle PRT_1$，所以

$$TQ:\ PQ = E:\ T_1R。$$

但是， 費馬說，T_1R 和 P_1R 的長度差不多；因此

$$TQ:\ PQ = E:\ (P_1Q_1 - QP)，$$

用現在的符號， 若令 PQ 爲 $f(x)$， 則有

$$TQ:\ f(x) = E:\ [f(x+E) - f(x)]。$$

因此，

$$TQ = \frac{E\cdot f(x)}{f(x+E)-f(x)}。$$

費馬對上式的處理是： 用 E 除右端分式的分子和分母， 然後令 $E=0$ (他說是去掉 E 項)， 就得到 TQ。 這就是費馬通過次切線 TQ 求表達式 $f(x)/f'(x)$ 的方法。

費馬把韋達的代數理論應用到帕波斯《數學論題》(*Mathematical collection*) 中的一個問題， 便得到了求最大值最小值方法。 他

在《求最大值和最小值的方法》中曾用如下的一個例子加以說明：已知一條直線 (段)，要求出它上面的一點，使被這點分成的兩部分線段組成的矩形最大。他把整個線段叫做 B，並設它的一部分爲 A。那麼矩形的面積就是 $AB - A^2$。然後他用 $A+E$ 代替 A，這時另外一部分就是 $B-(A+E)$，矩形的面積就成爲 $(A+E)(B-A-E)$。他把這兩個面積等同起來，因爲他認爲，當取最大值時，這兩個函數值 — 即兩個面積應該是相等的，所以

$$AB + EB - A^2 - 2AE - E^2 = AB - A^2。$$

兩邊消去相同的項並用 E 除，便得到

$$B = 2A + E。$$

然後令 $E = 0$ (他說去掉 E 項)，得到 $B = 2A$。因此這矩形是正方形。

費馬認爲這個方法有普遍的適用性。他說：如果 A 是自變量，並且如果 A 增加到 $A+E$，則當 E 變成無限小，且當函數經過一個極大值 (或極小值) 時，函數的前後兩個值將是相等的。把這兩個值等同起來；用 E 除方程，然後使 E 消失，就可以從所得的方程，確定使函數取最大值或最小值的 A 值。這個方法實質上是他用來求曲線切線的方法。但是求切線時是基於兩個三角形相似；而這裡是基於兩個函數值相等。

遺憾的是，費馬對於他的方法從來未從邏輯上作過淸楚和全面的解釋，因此對於他究竟是怎樣考慮這個問題的，一些數學史專家曾產生過爭論。費馬沒有認識到有必要去說明先引進非零 E，然後用 E 通除之後，令 $E=0$ 的合理性。

但從這裡我們可以看出，費馬這種求極值的方法已非常接近微分學的基本觀念了。如果用現代的記號他的規則可以表述如下：

欲求 $f(x)$ (費馬先取個別的整有理函數) 的極值。先把表達式 $[f(x+h)-f(x)]/h$ 按照 h 的乘冪展開，棄去含 h 的各項，命所得

到的結果等於零， 再求出方程的根， 便是可能使 $f(x)$ 具有極值的極值點。 他的方法給出了 (可微函數的) 極值點 x 所能滿足的必要條件 $f'(x)=0$。 費馬還有區分 x 爲極大値點和極小値點的準則， 即現在所謂的 “二階導數準則” ($f''(x)<0$ 有極大， $f''(x)>0$ 有極小)， 儘管他沒能系統地去研究拐點 ($f''(x)=0$)， 但也得到了求拐點的一種法則。

費馬還用類似的方法， 研究過求拋物體截段重心的問題。 他的方法要點如下： 設截段的重心 O 和頂點的距離爲 a 個單位。 將截段的高度 h 減小 E， 則重心的位置改變。 費馬由一系列的引理， 知道兩個截段的重心與頂點的距離與其高度成正比， 而兩截段體積與其高的平方成正比例， 通過對 O 取瞬， 他能用這些事實列出包含 a、 h 和 E 的 “虛擬等式”。 根據他的一般原理， 他令 E 爲零而得到結果 $a=2h/3$。 費馬這項工作在微積分史上的重要性， 在於它第一次採用相當於今天微分學中的方法， 而不是像積分學中求和的方法， 求出了重心。

費馬早在 1636 年之前在計算拋物線 $y=x^n$ (n 爲正整數) 的面積時， 以等距離的縱坐標把面積分成窄長條， 然後依據不等式

$$1^n+2^n+\cdots+m^n>\frac{m^{n+1}}{n+1}>1^n+2^n+\cdots+(m-1)^n$$

和實際上求得極限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+m^n}{m^n}=\frac{1}{n+1}\ ,$$

來進行求積。 大約在 1644 年， 他在橫坐標做成幾何級數的那些點上引出縱坐標， 而把他自己的結果推廣到 n 爲分數與負數的情形； 同時那些近似於 $y\mathrm{d}x$ 的長條的面積組成容易求和的幾何級數。 經過求極限即得到費馬的結果， 這些結果， 當 $n>0$ 時相當於積分 $\int_0^a x^n\mathrm{d}x$ 的計算， 而當 $n<-1$、 $a>0$ 時相當於今天的廣義積分 $\int_0^\infty x^n\mathrm{d}x$ 的計算； 費馬稱他自己的方法爲對數方法， 這樣就指出了它與對數性質的關係。

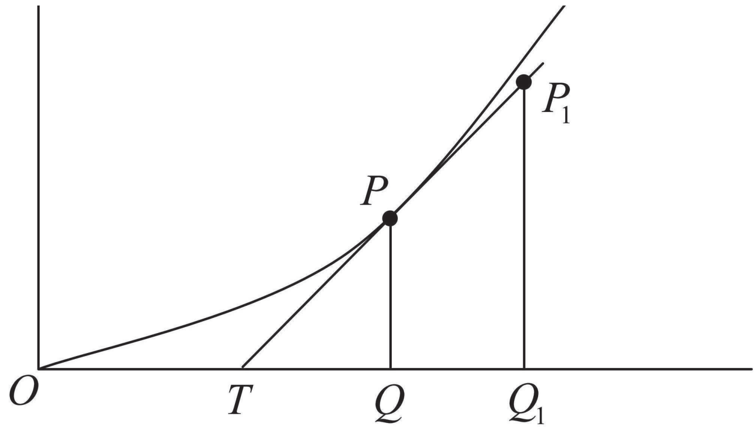

圖 3

費馬還得出了一個求半立方拋物線長度的方法。 這個方法也是他的一般方法的典型說明， 展示出在他各個方面工作中的內在聯繫， 對曲線上橫坐標 $OQ = a$， 縱坐標 $PQ = b$ 的任一點， 次切線 $TQ = c$ 可以用他的切線方法求得 $c = \dfrac{2a}{3}$ (圖 3)。 於是在離縱坐標 PQ 距離 E 處取切線的縱坐標 P_1Q_1， 則線段 PP_1 可用 a 和 E 來表達。 對於曲線 $ky^2 = x^3$ 來說， 有 $PP_1 = E\sqrt{\dfrac{9a}{4k} + 1}$。 當 E 很小時， P_1 可以看作不但在切線上， 而且也在曲線上， 所以曲線的長度可以視爲 PP_1 的線段的和。 而這些線段的和又可以作爲在拋物線

$$y^2 = \frac{9x}{4k} + 1$$

之下的面積。 由於這個面積已能求出， 曲線的長度就可以求得。

費馬還用自己的方法處理了許多幾何問題， 例如， 求球的內接圓錐的最大體積、 球的的內接圓柱的最大面積等等。

奇怪的是， 費馬在應用他的方法來確定切線、 求函數的極大值極小值以及求面積、 求曲線長度等問題時， 能在如此廣泛的各種問題上從幾何和分析的角度應用無窮小量， 而竟然沒有看到這兩類問題之間的基本聯繫。 其實， 只要費馬對他的拋物線和雙曲線求切線和求面積的結果再加仔細地考察和思考， 是有可能發現微積分的基本定理的。 也就是說費馬差一點就成爲微積分的眞正發明

者。 以致 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 說：“我們可以認爲費馬是這種新計算的第一個發明人。” P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 和 J. 傅里葉 (Fourier) 也有類似的評論。 但 S.D. 泊松 (Poisson) 持有異議， 認爲費馬還沒達到如此高的境界。 因爲費馬不但沒有認識到求積運算是求切線運算的逆運算， 並且費馬終究未曾指出微分學的基本概念 — 導數與微分； 也未曾建立起微分學的算法， 他之所以沒有作進一步的考慮， 可能是由於他以爲自己的工作只是求幾何問題的解， 而不是統一的很有意義的一種推理過程。 在他看來， 他的求最大值、 最小值方法、 切線方法以及求面積方法不過是解決這些具體問題的特有方法， 而不是新的分析學。 但是他的思想和方法對後來微積分學的建立奠定了重要的基礎。

他和帕斯卡共同對概率論進行了最早的科學探索

雖然十六世紀概率論已有了某些萌芽， 例如 H. 卡爾達諾 (Cardano) 曾經對機會對策中產生的一些問題感到過興趣， 但首先試圖把這些方法歸納和抽象成一種法則的， 還應歸功於費馬和帕斯卡。 而激勵他們倆人認眞對待這項研究的起因， 卻來自一個賭博者的請求。

1654 年法國騎士 C. 梅雷 (Méré) 向帕斯卡提出一個使他苦惱很久的問題：“兩個賭徒相約賭若干局， 誰先贏 s 局就算贏了， 現在一個人贏 a $(a < s)$ 局， 另一個人贏 b $(b < s)$ 局， 賭博中止， 問賭本應怎樣分法才算合理？” 這個問題後來稱爲 “賭點問題”。 當帕斯卡接到這個問題後， 立刻把它轉告了費馬， 他們倆人都對這個問題得出了正確的答案， 但所用的方法不同。 關於概率論的研究就是這樣開始的。 正如對概率論做出了卓越貢獻的法國數學家泊松後來所說：“由一位廣有交遊的人向一位嚴肅的冉森派教徒所提出的一個關於機會遊戲的問題乃是概率演算的起源。” 這個廣有交遊

的人就是梅雷， 那位嚴肅的冉森派教徒就是帕斯卡。

當 C. 惠更斯 (Huygens) 到巴黎的時候聽說費馬和帕斯卡在研究這個問題， 他進行了研究， 並寫成了《論賭博中的計算》(*De Ratiociniis in Ludo Aleoe*， 1657) 一書。 從此概率論的研究引起了更多數學家的關注， 特別是爲了研究在實踐中碰到的大量隨機現象的統計規律， 就進一步推動了這一數學分支的發展。

他開闢了近代數論

費馬對解析幾何、 微積分和概率論的開創都做出了重要的貢獻。 但最能顯示出他的才華且對後人影響最大的， 還是他在數論方面的工作。 在他生命的最後十五年裡， 他幾乎把全副精力放到了對數論的研究上。

在費馬以前， 希臘人也曾研究過數的性質， 我們可以從歐幾里得 (Euclid)、 尼科馬霍斯 (Nicomachus)、 賽翁 (Theon) 、 丟番圖等人的著作中找到一些關於數的性質的論述， 但是很不系統。 這門學科也曾強烈地吸引過印度人， 但是直到費馬仔細閱讀了丟番圖的譯本而把注意力轉移到這方面之前， 數論始終不曾有過重大的進展。 費馬認爲數論被忽視了。 他曾抱怨說幾乎沒有什麼人提出或懂得算術問題， 並說：“這是不是由於迄今爲止， 人們都用幾何觀點而不用算術觀點來處理算術的緣故？” 他認爲甚至連丟番圖也頗受幾何觀點的束縛。 他相信算術有它自己的特殊園地： 整數論。

費馬對數論的研究是從閱讀丟番圖的著作《算術》(*Arithmetica*) 一書開始的， 這本書曾被文藝復興時代的數學家譯成許多譯本， 他仔細閱讀了由 M. 巴歇 (Bachet) 1621 年校訂的法文譯本。 費馬對數論的大部分貢獻都批註在這本書頁的邊緣和空白處以及寫給朋友的一些信件中。 他主要研究了質數和整數的可除性問題並給出了從單個的基本解得到一般形式的解的一些論斷。

費馬在 1640 年 6 月致 M. 梅森 (Mersenne) 的一封信中提出了下述三個定理：

1. 若 n 是合成數， 則 2^n-1 是合成數。

2. 若 n 是質數， 則 2^n-2 可被 $2n$ 除盡。

3. 若 n 是質數， 則除了 $2kn+1$ 這種形式的數之外， 2^n-1 不能被其它質數除盡。

費馬宣稱， 這三個定理是他關於數的性質的研究基礎。

費馬對數論還提出了下列重要定理：

4. 費馬斷言沒有一個形如 $4n+3$ 的質數能表達爲兩個平方數之和。

5. 費馬在他的丟番圖書頁上的側記中以及在寫給梅森的一封信中， 推廣了著名的直角三角形的 3 、 4 、 5 關係， 指出了如下一些定理： 形如 $4n+1$ 的一個質數能夠而且只能作爲一個直角邊爲整數的直角三角形的斜邊； $(4n+1)$ 的平方是兩個而且只有兩個這種直角三角形的斜邊； 它的立方是三個而且只有三個這種直角三角形的斜邊； 它的四次方是四個而且只有四個這種直角三角形的斜邊， 如此等等， 乃至無窮。

他在給梅森的信中說， 形如 $4n+1$ 的質數和它的平方都只能以一種方式表達爲兩個平方數之和； 它的三次方都以兩種方式表達爲兩個平方數之和； 它的五次方和六次方都能以三種方式表達爲兩個平方數之和； 如此等等， 乃至無窮。 他在信中接著說： 若等於兩個平方數之和的一個質數乘以另一個也是這樣的質數， 則其乘積將能以兩種方式表達爲兩個平方數之和。 若第一個質數乘以第二個質數的平方， 則乘積將能以三種方式表達爲兩個平方數之和； 若乘以第二個質數的立方， 則乘積將能以四種方式表達爲兩個平方數之和； 如此等等， 乃至無窮。

6. 費馬給出了關於將質數表達爲 x^2+2y^2 、 x^2+3y^2 、 x^2+5y^2 、 x^2-2y^2 以及其它這種形式的許多定理， 它們都是

關於質數表達爲平方和的推廣， 並指出一個奇質數能且只能以一種方式表爲兩個平方數之差。

7. 費馬在 1640 年 10 月 18 日寫給 B. F. 德貝西 (de Bessy) 的一封信中給出了下述定理： 若 p 是個質數而 a 與 p 互質， 則 $a^p - a$ 能爲 p 整除。 (後人稱這個定理爲費馬小定理。)

8. 費馬也研究過多邊形數， 他在那本丟番圖的書的空白處寫下了這樣一個定理： 每個正整數或者本身是一個三角形數， 或者是兩個或三個三角形數之和； 每個正整數或者本身是個正方形數， 或者是 2 、 3 或 4 個正方形數之和； 每個正整數或者本身是個五邊形數， 或者是 2 、 3 、 4 或 5 個五邊形數之和： 以及對較高的多邊形數的類似關係。

9. 費馬在 1636 年重新發現了 Q. 塔比伊本庫拉 (Thãbit ibn Qurra) 第一個提出的法則，給出了第二對親和數 $17,926$ 及 $18,416$ (第一對親和數 220 及 284 是畢達哥拉斯 (Pythagoras) 給出的) 。

10. 費馬重新發現了求解 $x^2 - Ay^2 = 1$ 的問題， 其中 A 是整數但非平方數。 他在 1657 年 2 月寫給德貝西的一封信中提出一個定理： $x^2 - Ay^2 = 1$ 在 A 是正數而非完全平方時有無窮多個解。 費馬還指出： 對於給定的 A 和 B 、 $x^2 - Ay^2 = B$ 在什麼情況下可解， 並能把它解出來。

費馬對上述這些定理都沒有給出證明，有的也只是略述大意， 補充這些定理的證明曾強烈地吸引著十八世紀許多數學家。

費馬在數論中還提出過其它一些定理。 他提出的所有定理， 除了下述兩個定理以外， 都已被後來的人證明是正確的，這兩個定理是：

(i) 費馬 1640 年在一封信中說，形如 $2^{2^n} + 1 (n = 0$ 、 1 、 2 、 $\cdots)$ 的數都是質數。 他自己驗證了當 $n = 0$ 、 1 、 2 、 3 、 4 時，$2^{2^n} + 1$ 確實都是質數，但他承認他還不能給出普遍的證

明。 後來， L. 歐拉 (Euler) 證明了當 $n = 5$ 時， 即 $2^{2^5} + 1$ 不是質數， 而且， 直到今天再沒有發現其它 $2^{2^n} + 1$ 型的質數。 從而說明費馬這個猜想是錯誤的。

(ii) 費馬於 1637 年左右， 他在巴歇校訂的丟番圖的《算術》第二卷第八命題 — "將一個平方數分爲兩個平方數" 的旁邊寫道："相反， 要將一個立方數分爲兩個立方數， 一個四次冪分爲兩個四次冪， 一般地將一個高於二次的冪分爲兩個同次的冪， 都是不可能的。 對此， 我確信已發現一種美妙的證法， 可惜這裡空白的地方太小寫不下。" 這就是數學史上著名的費馬大定理或稱費馬最後定理。 這個定理可用現代的術語簡述如下：

不可能有滿足 $x^n + y^n = z^n$、 $xyz \neq 0$、 $n > 2$ 的整數 x、 y、 z、 n 存在。

費馬逝世後， 人們一直未找到他對這個定理的證明， 於是激起了許多數學家試圖證明這個定理。 例如： 歐拉 、 A.M. 勒讓德 (Legendre)、 C.F. 高斯 (Gauss)、 N.H. 阿貝爾 (Abel)、 P.G.L. 狄利克雷 (Dirichlet)、 G. 拉梅 (Lamé)、 A.L. 柯西 (Cauchy)、 E.E. 庫默爾 (Kummer) 等著名數學家都試證過， 並得到了部分結果， 但都沒有得到普遍的證明。 爲此， 布魯塞爾科學院 、 巴黎科學院曾設獎金懸賞徵集這個問題的證明， 也沒得到結果。 1908 年， 數學家 F. 華爾夫斯蓋爾 (Wolfskehl) 在格丁根皇家科學會懸賞十萬馬克，贈給最先證明這個定理的人。儘管許多跡象都說明費馬最後定理可能是成立的，但至今依然沒有得到完全的證明[2]。因此， 費馬是否眞對這一問題作出正確的證明， 也許將永遠是個謎， 不過從他提出的許多定理的絕大多數都被後來的人證明是正確的這一事實來看， 費馬確實具有一種直觀的天才和非凡的洞察力。

1879 年， 在萊頓圖書館惠更斯的手稿中發現一篇論文， 其

[2]費馬最後定理已在 1995 年由英國數學家安德魯・懷爾斯 (Andrew John Wiles) 及其學生理查・泰勒 (Richard Taylor) 證出， 其證明長達 168 頁。

中介紹了費馬首創和應用的 “無窮下推法” (*the method of infinite descent*)。 在 1659 年， 費馬曾將這個方法的梗概寫信告訴過他的朋友 P. 卡爾卡維 (Carcavi)。 爲了描述這個方法， 我們先來考察費馬在 1640 年 12 月 25 日給梅森的信中所提出的一個定理： 每一個形如 $4n+1$ 的質數， 能唯一的分解爲兩個平方數之和。 例如 $17 = 4^2+1$ 、 $29 = 5^2+2^2$。 應用這個方法時， 先假設形如 $4n+1$ 的質數並不具有所述性質， 我們要證明形如 $4n+1$ 的一個較小質數也不具有所述性質。 由於 n 是任意的， 所以還必需有一個更小的， 這樣通過 n 的整數值往下遞推， 就必定能推到 $n = 1$， 從而推到質數 $4 \times 1 + 1 = 5$ 也不該具有所述性質。 但質數 5 是能唯一分解爲兩個平方數的和的， 這就和假定相矛盾。 因而每一個形如 $4n+1$ 的質數都能唯一分解爲兩個平方之和。 費馬還說他用 “無窮下推法” 證明了下述定理： 邊長爲有理數的直角三角形的面積不可能是一個平方數。 這個概括的證明是他唯一詳細寫出的證明， 而且是作爲 $x^4 + y^4 = z^4$ 不可能有整數解的一個推論得出的。 他還聲稱他用 “無窮下推法” 證明了上述命題 8 和命題 10。

但後人一直未找到他是怎樣具體用 “無窮下推法” 證明的細節， 不過他提出的上述一些命題卻被歐拉、 拉格朗日、 柯西等用他首創的 “無窮下推法” 或其它方法證明確實是正確的。

費馬在數論中提出的命題， 都以極大的魅力吸引了許多後來的數學家去研究它們， 從而推動了十九世紀數論理論的發展和數論研究方法的產生。 例如， 庫默爾在企圖證明費馬最後定理時， 就創立了理想數論。 另外費馬的成果對現代代數數學基本概念的明確闡述也起到了推動作用。

他對光學做出了重要貢獻

費馬同他那個世紀的其他數學家一樣， 他研究過許多科學問

題， 特別對光學做出過重要貢獻。

費馬在 1637 年看到笛卡兒《折光》(*La dioptrique*) 中給出的折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}\,,$$

其中 v_1 是光線在第一介質中的速度， v_2 是光進入第二介質的速度 (圖 4)。 他對這個定律及其證明方法都持懷疑和反對的態度， 並曾引起他倆人之間長達十年之久的爭論。 但後來費馬發現反射時光線取需時最少的路徑， 而且相信自然確實是按簡單而又經濟的方式行動的， 在 1657 年和 1662 年的信件中[3]， 他確認了他的最小時間原理 — 光線永遠取花時間最少的路徑行進。 當他在 1661 年發現他能夠從他的原理導出光的折射定律時， 他不但解除了對笛卡兒的折射定律的懷疑， 而且更加確信自己的原理的正確性。

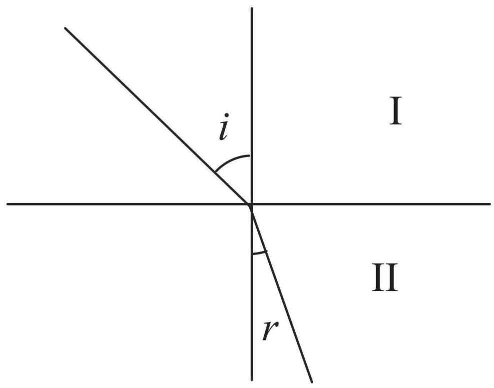

圖 4

費馬的原理現在數學上有幾種等價陳述形式。 按照折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2}\,,$$

常用 n 表示 v_1 對 v_2 之比， 叫做第二種介質相對於第一種介質的折射率； 如果第一種介質是眞空， 則 n 叫做非眞空介質的絕對折射率， 如果 c 表示光在眞空中的速度， 則絕對折射率 $n=c/v$， 其中 v 是光在介質中的速度。 如果介質的特點是逐點變化的， 則 n 和 v 都是 x、 y 和 z 的函數。 因此光線沿著曲線 $x(\sigma)$、 $y(\sigma)$、 $z(\sigma)$ 從點 P_1 行進到點 P_2 所需的時間爲

$$J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{\mathrm{d}s}{v}=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{n}{c}\mathrm{d}s=\frac{1}{c}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}n(x,\ y,\ z)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\mathrm{d}\sigma\,,$$

[3]Oeuvres， 2， p.354 − 359， p.457 − 463。

其中 σ_1 是 σ 在 P_1 的值而 σ_2 是 σ 在 P_2 的值。 因此費馬原理認爲： 光線從 P_1 行進到 P_2 所取的實際路徑是使 J 取極小的曲線。

費馬發現的這個最小時間原理及其與光的折射現象的關係， 是走向光學統一理論的最早一步。

費馬性情謙和， 好靜成癖。 他對數學的許多研究成果， 往往以沒有給出證明的斷言寫在閱讀過的書籍的邊緣或空白處， 或者寫在給朋友的一片信箋中， 也有一些是散放在舊紙堆裡的。 他從未想出版， 而且固執地拒絕編輯他的文章或以他的名字發表。 他曾多次阻止過別人把他的結果付印。 他對已完成的工作不再感興趣， 所以常常很隨便地將自己的文章送給朋友而不留底稿。 費馬在生前也發表過幾篇文章， 但都是在他要求匿名的條件下發表的， 並且要求勿須做詳細明瞭的解釋。 他的匿名以及拒絕發表不但使當時研究的成就無緣揚名於世， 並且使他暮年脫離了研究的主流。 直到他去世後， 後人 (其中包括他的大兒子 C. 塞繆爾 (Clément Samule)) 才把他的成果彙集成書， 共兩卷， 先後於 1670 年和 1679 年在圖盧茲出版。 第一卷有丟番圖的算術， 帶有校訂和註解； 第二卷包括拋物形求面積法、 極大極小及重心的論述和各類問題的解答。 還有球切面、 曲線求長的討論。 另外就是他和笛卡兒、 帕斯卡、 羅貝瓦爾、 梅森、 惠更斯等人的通信錄。 這本書後來罕見於世， 直到 1853 年 E. 布拉興 (Brassinne) 重新加以註釋， 才在巴黎出版。 十八世紀， 費馬還不太有名， 但進入十九世紀中葉， 由於對數論的重新研究， 數學家和數學史專家對費馬及其著作都產生了濃厚的興趣， 世人也爭先發表和研究費馬的著作， 其中尤以 C. 亨利 (Cherles Henry) 和 P. 坦納里 (Paul Tannery) 的四卷論文集最爲全面。 從這四卷文集中可以清晰而具體地看出費馬對數學和光學所做出的廣泛而重要的貢獻。

(本詞條承蒙蔣正新先生的認眞修飾和潤色， 並承蒙袁向東先生提出了不少寶貴意見， 特此一並致謝。)

文　　獻

原始文獻

[1] C. Henry and P. Tanney eds., *Oeuvres de Fermat*, 4 Vols., Paris, 1891－1912； Supplement, 1922。

[2] D.J. Struiks ed., *A Source book in mathematics*, 1200－1800, Cambridge, Mass, 1969。

研究文獻

[3] J. Itard, *Pierre Fermat, Kurze Mathematiker Biographien*, No. 10, Basel, 1950。

[4] J.E. Hofmann, *Pierre Fermat—ein Pionier der neuen Mathematik in Praxis der Mathematik*, 7(1965), 113－119, 171－180, 197－120。

[5] C.B. Boyer, *A history of analytic geometry, Scripta Mathematica*, New York, 1956, Ch. 5。

[6] C.B. Boyer, *The concepts of the calculus*, Hafner Pub. Com., 1949, 154－165 (中譯本： C.B. 波耶， 微積分概念史， 上海人民出版社， 1977， 第 163－174 頁)。

[7] J.E. Hofmann, *Über zahlentheoretische Methoden Fermats und Euler, ihre Zusammenhänge und ihre Bedeutung, in Archive for History of Exact Sciences*, I(1961), 112—-159。

[8] A.I. Sabra, *Theories of light from Descartes to Newton*, London, 1967, Chs. 3－5。

[9] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972 。