棣 莫 弗

棣莫弗， A. (De Moiver， Abraham) 1667 年 5 月 26 日生於法國維特里的弗朗索瓦 (Vitry-le-François)； 1754 年 11 月 27 日卒於英國倫敦。 數學。

棣莫弗之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/De_Moivre.html

棣 莫 弗

張 祖 貴

(中國科學院自然科學史研究所)

棣莫弗， A. (De Moiver， Abraham) 1667 年 5 月 26 日生於法國維特里的弗朗索瓦 (Vitry-le-François)； 1754 年 11 月 27 日卒於英國倫敦。 數學。

棣莫弗出生於法國的一個鄉村醫生之家， 其父一生勤儉， 以行醫所得勉強維持家人溫飽。 棣莫弗自幼接受父親教育， 稍大後進入當地一所天主教學校唸書， 這所學校宗教氣氛不濃， 學生們得以在一種輕鬆、 自由的環境中學習， 這對他的性格產生了重大影響。 隨後， 他離開農村， 進入色拉的一所清教徒學院繼續求學， 這裡卻戒律森嚴， 令人窒息， 學校要求學生宣誓效忠教會， 棣莫弗拒絕服從， 於是受到了嚴厲的制裁， 被罰背誦各種宗教教義。 那時， 學校不重視數學教育， 但棣莫弗常常偷偷地學習數學。 在早期所學的數學著作中， 他最感興趣的是 C. 惠更斯 (Huygens) 關於賭博的著作， 特別是惠更斯於 1657 年出版的《論賭博中的機會》(*De ratiociniis in ludo aleac*) 一書， 啓發了他的靈感。

1684 年， 棣莫弗來到巴黎， 幸運地遇見了法國傑出的數學教育家、 熱心傳播數學知識的 J. 奧扎拉姆 (Ozanam)。 在奧扎拉姆的鼓勵下， 棣莫弗學習了歐幾里得 (Enclid) 的《原本》(*Elements*) 及其他數學家的一些重要數學著作。

1685 年， 棣莫弗與許多信仰新教的教友一道， 參加了震驚歐洲的宗教騷亂， 在這場騷亂中， 他與許多人一起被監禁起來。 正是在這一年， 保護加爾文教徒的南茲敕令被撤銷。 隨後， 包括

棣莫弗在內的許多有才華的學者由法國移住英國。據教會的材料記載，棣莫弗一直被監禁至 1688 年才獲釋，並於當年移居倫敦。但據二十世紀六十年代發現的一份當時的材料，1686 年時棣莫弗已經到了英國。隨後，棣莫弗一直生活在英國，他對數學所有貢獻全是在英國做出的。

抵達倫敦後，棣莫弗立刻發現了許多優秀的科學著作，於是如飢似渴地學習。一個偶然的機會，他讀到 I. 牛頓 (Newton) 剛剛出版的《自然哲學的數學原理》(*Mathematical principles of natural philosophy*)，深深地被這部著作吸引了。後來，他曾回憶起自己是如何學習牛頓的這部巨著的：他靠做家庭教師糊口，必須給許多家庭的孩子上課，因此時間很緊，於是將這部巨著拆開，當他教完一家的孩子後去另一家的路上，趕緊閱讀幾頁，不久便把這部書學完了。這樣，棣莫弗很快就有了充實的學術基礎，並開始進行學術研究。

1692 年，棣莫弗拜會了英國皇家學會秘書 E. 哈雷 (Halley)，哈雷將棣莫弗的第一篇數學論文“論牛頓的流數原理” (*On Newton's doctrine of fluxions*) 在英國皇家學會上宣讀，引起了學術界的注意。1697 年，由於哈雷的努力，棣莫弗當選爲英國皇家學會會員。

棣莫弗的天才及成就逐漸受到了人們廣泛的關注和尊重。哈雷將棣莫弗的重要著作《機會的學說》(*The doctrine of chances*) 呈送牛頓，牛頓對棣莫弗十分欣賞。據說，後來遇到學生向牛頓請教概率方面的問題時，他就說：“這樣的問題應該去找棣莫弗，他對這些問題的研究比我深入得多”。1710 年，棣莫弗被委派參與英國皇家學會調查牛頓－萊布尼茨關於微積分優先權的委員會，可見他很受學術界的尊重。1735 年，棣莫弗被選爲柏林科學院院士。1754 年，又被法國的巴黎科學院接納爲會員。

棣莫弗終生未婚。儘管他在學術研究方面頗有成就，但卻貧

困潦倒。 自到英國倫敦直到晚年， 他一直做數學方面的家庭教師， 他不時撰寫文章， 還參與研究確定保險年金的實際問題， 但獲得的收入卻極其微薄， 只能勉強糊口。 他經常抱怨說， 週而復始從一家到另一家給孩子們講課， 單調乏味地奔波於雇主之間， 純粹是浪費時間。 爲此， 他曾做了許多努力， 試圖改變自己的處境， 但無濟於事。

棣莫佛在八十七歲時患上了嗜眠症， 每天睡覺長達二十小時。 當時有一個傳說， 棣莫弗的睡眠時間以每天 15 分鐘的速度遞增， 形成一等差級數。 當 24 小時高睡不起時， 他便在貧寒中離開了人世。

概率論肇始於十七世紀， G. 卡爾達諾 (Cardano)、 P. 費馬 (Fermat)、 B. 帕斯卡 (Pascal) 等人是概率論早期的研究者， 他們所研究的主要是關於相互獨立的隨機事件的概率 — 機會方面的問題， 討論如賭博、 有獎抽彩過程中的 "機會"。 逐漸地， 人們要求解決與大量事件集合有關的概率或期望值問題， 如獎券的總數很大， 已知每一張獎券中獎的機會都相等， 那麼抽取 1 000 張、 10 000 張獎券中獎的概率有多大呢? 人們希望了解， 如果要保證中獎的可能性達到 90%， 那麼至少應該購買多少張獎券。

考慮一系列隨機事件 (如隨機地抛擲硬幣)， 某一事件出現 (如抛擲硬幣時出現正面) 之概率爲 p， n 表示所有隨機事件的總數， m 是某一事件出現的數目， 那麼該事件出現的次數 (m) 與全體事件的次數 (n) 之比將會呈現什麼規律呢? 這是十七世紀概率論中一個十分重要的問題。

1713 年， 雅格布・伯努利 (Jacob Bernoulli) 的遺著《猜度術》(*Ars conjectandi*) 出版， 書中表明他經過多次反覆的試驗， 證明在一定範圍內存在著預期的概率。 如某一事件出現的概率爲 $\frac{30}{50}$， 結果計算出該事件出現次數與全部次數之比處於 $\frac{31}{50}$ 與 $\frac{29}{50}$ 之間， 其

試驗結果如下： 25 550 次試驗中， 上述次數之比位於 $\frac{31}{50}$ 與 $\frac{29}{50}$ 之間的概率爲 0.9999； 再增加試驗 5708 次 ， 即進行 31258 次試驗， 則上述概率爲 0.9999； 再增加 5708 次， 即進行 36 966 次試驗， 則上述概率爲 0.999 99； $\cdots$ 等等。 因此雅格布 • 伯努利指出：“無限地連續進行試驗， 我們終能正確地計算任何事物的概率， 並從偶然現象之中看到事物的秩序。” 但是， 他並未表述出這種偶然現象中的秩序。 這一工作是由棣莫弗完成的。

棣莫弗在雅格布 • 伯努利的《猜度術》出版之前， 就對概率論進行了廣泛深入的研究。 1711 年， 他在英國皇家學會的《哲學學報》(*Philosphical Transactions*) 上發表了 “論抽籤的原理” (*De mensure sortis*)， 該文於 1718 年用英文出版時翻譯成《機會的學說》(*The doctrine of chances*)， 並擴充成一本書。 他在書中並沒討論上述雅格布 • 伯努利討論的問題， 1738 年再版《機會的學說》時， 棣莫弗才對上述問題給出了重要的解決方法。

棣莫弗在《機會的學說》(1738 年版) 中稱， 在 1725 年左右， 他就考慮過多次反覆實驗中的預期概率問題。 他曾在註明日期爲 1733 年 11 月 13 日的一份拉丁文論文中指出：“坦白地說， 這是在關於機會的學問中所能提出的最困難的問題。” 他的解答是這樣的： 在 n 次實驗中， 獲得 m 次成功 (即某一特定事件出現) 的概率， 是通過 $(a+b)^n$ 的表達式中含有 m 次的那一項 (即第 $m+1$ 項) 表示出來的， 也就是說， n 次試驗中某一事件出現 m 次的概率爲

$$C_m^n \cdot a^m \cdot b^{n-m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \cdot a^m \cdot b^{n-m} pd$$

其中， a 是某一事件出現的概率， 而 $b = 1 - a$。 這樣， 棣莫弗

就得到二項分佈

ξ	0	1	$\cdots$	m	$\cdots$	n
$P(\xi=k)$	$(1-a)^n$	$C_1^n a(1-a)^{n-1}$	$\cdots$	$C_m^n a^m(1-a)^{n-m}$	$\cdots$	a^n

其中 ξ 爲隨機變數， 而 $P(\xi=K)$ 爲 ξ 的分佈列。

然後， 他又考慮一般的二項式公式 $(a+b)^n$， 發現二項式 $(1+1)^n$ 的中項與各項之和 (2^n) 之間的比例關係爲 (當 n 很大時)

$$\frac{2A\times(n-1)^{1/n}}{n^n\times\sqrt{n-1}}\text{，}$$

其中 A 爲雙曲對數 $\frac{1}{12}-\frac{1}{360}+\frac{1}{1260}-\frac{1}{1680}+\cdots$ 級數之值。 棣莫弗在 1730 年的《 分析雜論 》(*Miscellanea analytica*) 中給出了對很大的 n， 關於 $n!$ 的近似公式

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\text{。}$$

這是棣莫弗首先給出的， 但在數學史上卻被稱爲斯特靈公式或斯特靈逼近。 歷史事實是， 棣莫弗首先得到

$$n!\sim Cn^{n+(1/2)}e^{-n}\text{ 。}$$

他知道常數 C 僅僅是一個無窮級數之和的極限， 但卻沒有求出 C 的值。 後來， 他的朋友 J. 斯特靈 (Stirling) 利用他的發現作了進一步的探討， 求出了 $C=\sqrt{2\pi}$。 毫無疑問， 斯特靈公式的最重要的工作屬於棣莫弗。

利用 $n!\sim(\frac{n}{e})^n\cdot\sqrt{2\pi n}$ 這一逼近式， 棣莫弗開始考慮二項式 $(a+b)^n$ 從任意一項至中心項的總和。 於是， 他發現了二項式分佈 $C_m^n\cdot a^m\cdot(1-a)^{n-m}$ 的極限式將呈現一種新的形式。 他提出一個具有啓發性的例子， 並認爲這是 “機會” (概率論) 最難解決的問題： 事件的概率爲 $\frac{1}{2}$， 當進行 3600 次實驗時， 發現該事件出現

的次數既不多於 1830 次， 也不少於 1770 次， 也就是說， 已經得到平均誤差爲

$$\sqrt{3600 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 30 \text{。}$$

在此基礎上， 他對於事件概率爲 $\frac{1}{2}$ 的情況， 得到了 n 次試驗中出現 m 次事件的概率之期望值滿足的關係式

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{x_1 < \frac{m(n) - n/2}{\sqrt{n}/2} < x_2\right\} = \int_{x_1}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \text{。}$$

其中 $m(n)$ 是 n 次實驗中出現 m 次事件的概率。 也就是說， 棣莫弗首次發現二項分佈的極限形式爲一正態分佈。

後來， P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 對棣莫弗的結果進行推廣， 得到了今天的棣莫弗－拉普拉斯積分極限定理： 若隨機變數 ξ_n 服從二項分佈， 即

$$P(\xi_n = m) = C_m^n a^m \cdot (1-a)^{n-m} \text{，}$$

其中 $0 < a < 1$， $m = 0$、 1、 2、 $\cdots$ 、 n， 則有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(x_1 \leq \frac{\xi_n - na}{\sqrt{na(1-a)}} \leq x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx \text{。}$$

棣莫弗最先引入的正態分佈在概率、 統計發展中佔有相當重要的地位。 後來， 拉普拉斯、 C.F. 高斯 (Gauss) 等進行了推廣。 人們陸續發現， 許多隨機現象服從正態分佈。

設 ξ_n $(n = 1$、 2、 $\cdots)$ 爲相互獨立的隨機變數序列， 有有限的數學期望 $E(\xi_k) = a_k$ 和方差 $D(\xi_k) = \delta_k^2$，$(k = 1$、 2、 $\cdots)$， 令 $B_n^2 = \sum_{k=1}^n D(\xi_k)$， $\eta_n = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - a_k}{B_n}$， $(n = 1$、 2、 $\cdots)$。 若對於實數 x， 一致地有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\eta_n < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy \text{，}$$

則稱隨機序列 $\{\xi_n\}$ 服從中心極限定理。

不難證明，若設 ξ_n $(n=1、2、\cdots)$ 爲相互獨立且具有相同兩點分佈的隨機變數序列，且 $P\{\xi_m=1\}=a$，$P\{\xi_m=0\}=1-a$，$(m=1、2、\cdots)$，$0<a<1$，則 $\{\xi_n\}$ 服從中心極限定理。這一定理的雛型是棣莫弗最先提出的。

在對概率論的研究中，棣莫弗第一次引入了正態密度函數 (正態曲線) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$。可是，他的這一工作，尤其是關於二項分佈的極限式爲正態分佈的發現，在相當長的時間裡被人遺忘了。直到 1924 年 K. 皮爾遜 (Pearson) 著 "正態曲線史" (*A history of the normal curve*) 一文，重新提到棣莫弗的工作，人們才認識到他的貢獻。

利用棣莫弗的上述結論，可以解決在一定範圍內存在的期望的概率的問題。如隨機拋硬幣 100 次，設出現正面的概率爲 $\dfrac{1}{2}$，問 "正面出現次數小於 60 、大於 50" 的概率是多少? 設 $n=100$，$a=\dfrac{1}{2}$，則 $na=50$，$\sqrt{n\cdot a(1-a)}=\sqrt{25}=5$，故

$$\begin{aligned}
P(50<\xi_{100}<60) &= P\left(\frac{50-50}{5}<\frac{\xi_{100}-50}{5}<\frac{60-50}{5}\right)\\
&= P\left(0<\frac{\xi_{100}-50}{5}<2\right)\\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-x^2/2}dx=0.4772。
\end{aligned}$$

棣莫弗將他的成果大量地應用於諸如此類的問題。上述棣莫弗－拉普拉斯積分極限定理及中心極限定理還可用來解決反過來的統計問題：已知在一定範圍內存在的期望的概率，求某一事件出現的概率，或者求滿足一定概率條件所需要的試驗次數 $\cdots$ 等等。

棣莫弗的《機會的學說》在概率論發展中起著承前啓後的作用， 尤其是二項分佈、 正態分佈函數、 中心極限定理等方面的工作， 開闢了概率論發展的新方向。 對於他來說， 重要的是解決了這樣的哲學問題： 在人們以爲是純粹偶然的事件中， 可以尋找出其規律和必然。 正如他在該書英文第三版中所指出的那樣， 儘管機會具有不規則性， 由於機會無限多， 隨著時間的推移， 不規則性與秩序相比將顯得微不足道。 他認爲， 這種秩序自然是從 “固有設計中” 產生出來的。

在《機會的學說》中， 棣莫弗得到了泊松分佈的一種特殊情形， 並將母函數用於對正態分佈的討論； 在研究差分方程時， 他將循環級數方法應用於差分方程的求解； 此外， 他在這部著作中還對賭博中涉及的概率問題進行了深入探討。 他的許多方法尤其是母函數方法在概率論發展中佔有十分重要的地位。

棣莫弗是十八世紀力主將概率論應用於人文、 社會科學研究的重要人物之一， 他在這方面的工作與哈雷密切有關。 哈雷在 1693 年就制定了確定保險年金的理論， 在他的統計數據的基礎上， 棣莫弗於 1725 年出版了《年金論》(*Anuities upon lives*) 一書。

《年金論》不僅改進了以往衆所周知的關於人口統計的方法， 而且在假定死亡率所遵循的規律以及銀行利息不變的情況下， 推導出了計算年金的公式， 從而爲保險業提供了合理處理有關問題的依據， 這些內容被後人奉爲經典。 在這部書中， 棣莫弗提出了一個死亡假說， 即在每 86 個嬰兒出生後， 每年將死掉一個。 他的《年金論》在歐洲產生了廣泛影響， 先後出版了七次之多， 1725 年、 1743 年、 1750 年、 1752 年、 1756 年分別用英文出版， 1776 年出版了義大利文本， 1906 年出版了德文譯本。

另外， 棣莫弗還得到一些與複數有關的重要結果。 他運用複數理論， 證明了求解二項方程

$$x^n - 1 = 0$$

相當於把圓周分成 n 等分， 故二項方程又稱分圓方程。

在複數理論的發展中， 現在稱之爲棣莫弗定理的

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\text{，}\qquad i=\sqrt{-1}$$

顯得十分重要， 它是早期複數理論中最有意義的關鍵公式之一。 棣莫弗在 1707 年的一篇文章中隱約地得到了這一結果， 在 1722 年的一篇筆記中， 他利用 1707 年的結論， 推導出代表比爲 1：n 的角的正矢 ($\text{vers}\, a = 1-\cos a$) 中 x 與 t 之間的關係， 可以通過參數 z 表示：

$$\begin{cases} 1-2z^n+z^{2n} = -2z^n t\text{，} \\ 1-2z+z^2 = -2zx\text{，} \end{cases}$$

他認爲這一表示式在 n 是正整數時成立。 實際上， 他只得到了上述表達式。 如令 $x=1-\cos\theta$， $t=1-\cos n\theta$， 則可得到 $(\cos\theta \pm i\sin\theta)^n = \cos n\theta \pm i\sin n\theta$。 他從未寫出過最後明確的結論。 完整的棣莫弗公式是歐拉在 1748 年給出的， 歐拉還給出完整的證明。 値得提出的是， 棣莫弗間接地得到了下述公式：

$$\left(\sqrt{m^n}(\cos A + i\sin A)\right)^{1/n} = \sqrt{m}\left(\cos\frac{2k\pi \pm A}{n} + i\sin\frac{2k\pi \pm A}{n}\right)\text{，}$$

其中

$$k = 0\text{、}1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}\frac{n-1}{2}\text{，}n\text{ 爲奇數；}$$

$$k = 1\text{、}2\text{、}3\text{、}\cdots\text{、}\frac{n}{2}\text{，}n\text{ 爲偶數。}$$

文　　獻

原始文獻

[1] De Moiver, *The Doctrine of chances*, London, 1927。

[2] *De Moiver's formula, De Moiver on the law of normal probability*, 見 *A Source book in mathematics*, edited by D.E. Smith, Dover publications, Inc, 1959。

研究文獻

[3] I. Todhunter, *A history of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, New York, 1949。

[4] I. Hacking, *Moiver, Abraham De*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 9, 1974, 452－455。