

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

1 初級卷參考解答

1. 算式 $17 + 16 + 14 + 13$ 等於

- (A) 60 (B) 61 (C) 63 (D) 68 (E) 70

因為 $17 + 13 = 30$ 且 $16 + 14 = 30$ ，故知 $17 + 16 + 14 + 13 = 60$ 。

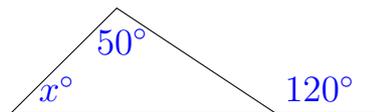
答: (A).

2. (同中級卷第 2 題)

在右圖中，請問 x 之值等於什麼？

- (A) 80 (B) 70 (C) 60

- (D) 50 (E) 40



解法 1

可知這個三角形的三個內角的角度分別為 x° 、 50° 及 60° 。由三角形的內角和為 180° 可得 $x + 110 = 180$ ，因此 $x = 70$ 。

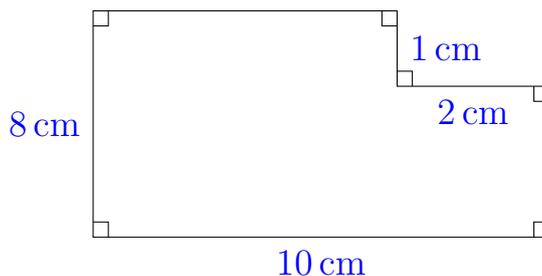
答: (B).

解法 2

由三角形的外角等於兩個遠內角之和可得知 $x + 50 = 120$ ，因此 $x = 70$ 。

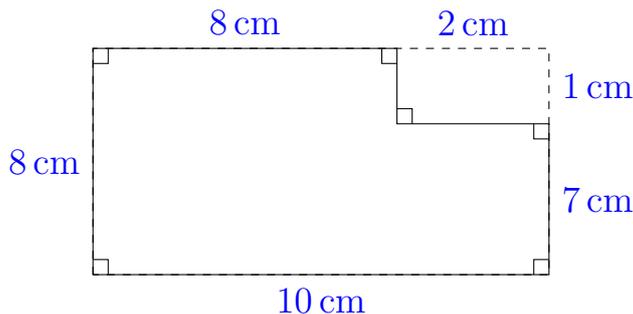
答: (B).

3. 請問下圖的周長為多少 cm？



- (A) 21 (B) 30 (C) 36 (D) 39 (E) 78

如圖所示，此時可判斷出除了最左邊的鉛垂邊以外，另二條鉛垂邊的長度之和為 8 cm，及除了最下面的水平邊以外，另二條水平邊的長度之和為 10 cm。故知整個圖形的周長為 $2 \times 10 + 2 \times 8 = 36$ cm。



答: (C).

4. (同小學高年級卷第 5 題)

本星期我的冷飲攤總共賣出 \$29 的檸檬汁, 但我花費 \$34 購買檸檬, 花費 \$14 購買糖。請問本星期我賠了多少錢?

- (A) \$1 (B) \$9 (C) \$19 (D) \$21 (E) \$29

可知我總共花費了 $\$34 + \$14 = \$48$, 故一共賠了 $\$48 - \$29 = \$19$ 。

答: (C).

5. (同高級卷第 2 題)

分數 $\frac{1}{0.04}$ 之值等於

- (A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 40 (E) 60

$$\frac{1}{0.04} = \frac{1 \times 100}{0.04 \times 100} = \frac{100}{4} = 25,$$

答: (C).

6. (同中級卷第 5 題)

若某數的 $\frac{5}{6}$ 等於 30, 請問這個數的 $\frac{3}{4}$ 等於什麼?

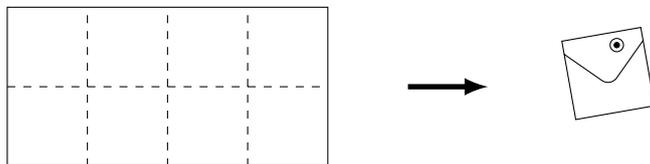
- (A) 22.5 (B) 24 (C) 25 (D) 27 (E) 40

可知這個數的 $\frac{1}{6}$ 是 6, 故這個數是 36。因此這個數的 $\frac{1}{4}$ 是 9, 所以這個數的 $\frac{3}{4}$ 是 27。

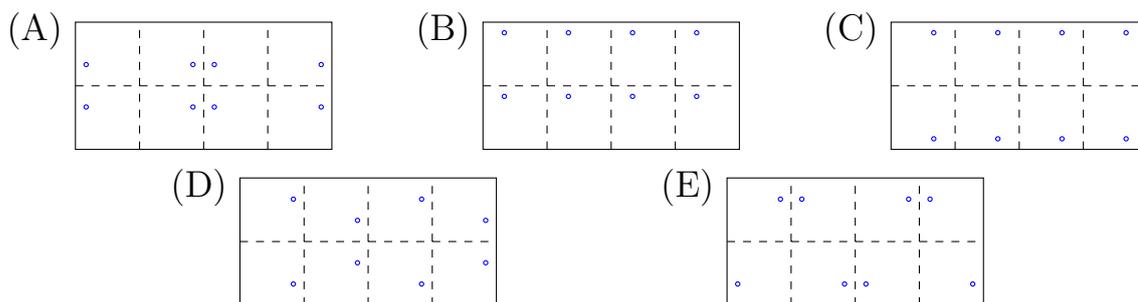
答: (D).

7. (同小學高年級卷第 14 題)

將一張寬 40 cm，高 20 cm 的地圖沿著虛線摺成一個 10 cm × 10 cm 的正方形，使得它正好可以放入一個信封內，接著將信封釘在佈告欄上。



請問下列哪一項可能是地圖上這些針孔的圖樣？

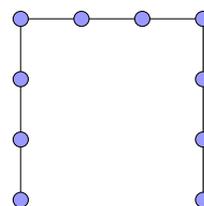


由地圖摺疊的方式可知，任兩個有共同邊的小正方形上的針孔位置一定會以這條邊為對稱軸互相對稱。

答: (A).

8. (同中級卷第 6 題)

將右圖稱之為 4 階無底正方形，因為它的三個邊都等長且每條邊都有四枚圖釘，圖釘之間的間隔都相等。請問一個 10 階無底正方形總共有幾枚圖釘？



- (A) 26 (B) 27 (C) 28
(D) 30 (E) 32

可知 10 階無底正方形的左側及右側各有 10 枚圖釘，且扣除重複的角落二枚圖釘後，第三邊上的圖釘有 8 枚是未數到的，因此共有 28 枚圖釘。

答: (C).

9. 一列火車表定的離站時間為上午 10:14，它行駛 2 小時 47 分鐘後可抵達目的地。現這列火車延遲 8 分鐘出發，請問它將在什麼時刻抵達目的地？

- (A) 上午 7:28 (B) 上午 7:35 (C) 下午 12:09 (D) 下午 1:01 (E) 下午 1:09

可知火車的離站時間為上午 10:22，並行駛 2 小時 47 分鐘後可抵達目的地。因 $22 + 47 = 69$ ，故可得知抵達的時間為 13:09，即下午 1:09。

答: (E).

評註

火車表定於上午 10:14 後的 2 小時 47 分鐘抵達目的地，即大約為 3 小時後抵達。故也可從下午 1:14 逆推回去得到抵達時間。

10. 將五個連續的正整數分別寫在五張卡片上。已知最小三個數之和為 60，請問最大的三個數之和是什麼？

(A) 62 (B) 63 (C) 64 (D) 65 (E) 66

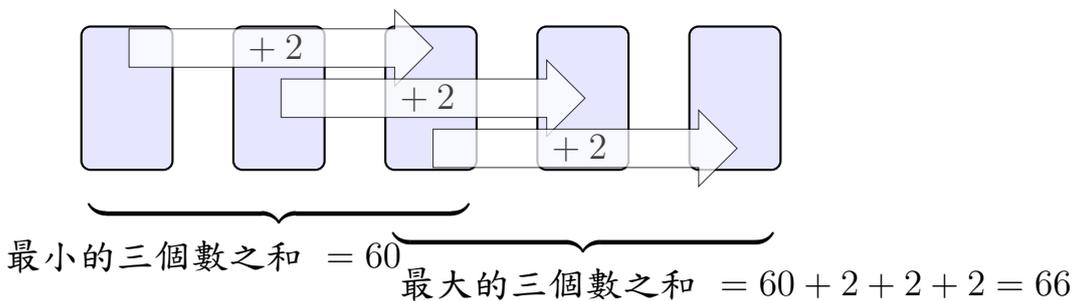
解法 1

可知最小的三個數的平均數為 20，因此可判斷出這最小的三個數依序為 19、20 與 21，所以最大的三個數為 21、22 與 23，其總和為 66。

答: (E).

解法 2

將最大的三個數與最小的三個數依大小順序比較：



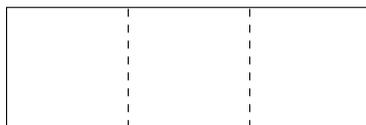
答: (E).

11. 某個矩形的寬是它的長之三分之一，已知它的面積等於 108 cm^2 ，請問它的周長為多少 cm？

(A) 54 (B) 48 (C) 42 (D) 36 (E) 24

解法 1

可將這個矩形分成三個相等的正方形，如圖所示：



故每一個正方形的面積為 $108 \div 3 = 36 \text{ cm}^2$ 。因此每一個正方形的邊長為 6 cm，即可推知矩形的長為 18 cm、寬為 6 cm，故其周長為

$$6 + 18 + 6 + 18 = 48 \text{ cm}。$$

答: (B).

解法 2

假設矩形的寬為 w cm，則其長為 $3w$ cm，且其面積為 $3w \times w = 3w^2 \text{ cm}^2$ 。因此有

$$3w^2 = 108$$

$$w^2 = 36$$

$$w = 6$$

故這個矩形的寬為 6 cm，而長為 18 cm。所以周長為 $2 \times (6 + 18) = 48 \text{ cm}$ 。

答: (B).

12. 六個人站成一排，第一個人的身高為 150 cm，第六個人的身高為 180 cm。若其他每個人的身高都等於與他相鄰兩人身高的平均，請問在這一排中第四個人的身高是什麼？

(A) 165 cm (B) 168 cm (C) 170 cm (D) 172 cm (E) 174 cm

令這六個人依序為 A、...、F。則 B 的身高恰在 A 與 C 身高的中間、C 的身高恰在 B 與 D 身高的中間，其餘兩人以此類推。所以可以得知，這六個人的身高恰是從 150 cm 到 180 cm 成等差數列升高。因其中有 5 個等差，故知相鄰兩人的身高差距為 6 cm，即這六個人的身高依序為 150、156、162、168、174 及 180 cm。

所以第四個人的身高為 168 cm。

答: (B).

13. 有一座奇特的塔，它是由一些正立方體構造成的，最底層有 1 個正立方體，第二層有 4 個，第三層有 9 個，第四層有 16 個，依此類推。已知建造這座塔共使用 91 個正立方體，請問這座塔共有多少層？

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

可知每一層的正立方體個數都是完全平方數，故逐項依序將完全平方數相加，計算可得

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

答: (B).

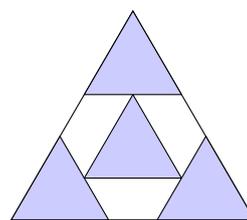
14. 我的學校欲將 76 名學生分為 6 班，使得任兩個班級學生人數之差不超過 1 名。請問共有多少個班級恰有 12 名學生？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

因 $76 \div 6 = 12 \dots 4$ ，故知這 6 班的人數不可能全部相同。而且可知人數最多的班級與人數最少的班級之間的人數之差為 1，故若先每班都分配 12 名學生後，剩下的 4 名學生應都分配到不同的班級中，因此可得知這 6 班的學生數應為 12、12、13、13、13、13。故知共有 2 個班級恰有 12 名學生。

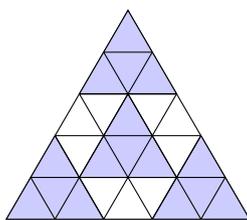
答: (A).

15. 將四個全等的小正三角形安排在一個大正三角形的內部，使得小正三角形的各邊與大正三角形各邊重合或平行，如右圖所示。請問小正三角形的總面積 (陰影部分) 佔大正三角形面積的幾分之幾？



(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{4}{9}$
(D) $\frac{4}{7}$ (E) $\frac{16}{25}$

由圖示可判斷出圖形中最短線段的長度恰為小正三角形邊長的一半。因此我們可利用此最短線段為單位長度來畫出如下圖所示的三角形網狀圖：



此時可知在 25 個大小相同的小正三角形中，陰影部分佔了 16 個小正三角形。故可得知陰影部分佔大正三角形面積的 $\frac{16}{25}$ 。

答: (E).

16. 經過 9 次拼字測驗後，小咪的平均分數為 5 分 (滿分為 10 分)。請問至少還要再參加幾次測驗才能使她的總平均提高至 7 分？

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

解法 1

可知經過 9 次拼字測驗後，小咪的總分為 $9 \times 5 = 45$ 。假設她在接下來的 n 次測驗中都獲得滿分使她的總平均提高至 7 分，則有

$$\frac{45 + 10n}{9 + n} = 7$$

$$45 + 10n = 63 + 7n$$

$$3n = 18$$

$$n = 6.$$

故知她至少還要再參加 6 次測驗才能使總平均提高至 7 分。

答: (C).

解法 2

已知小咪的目標是要讓總平均到達 7 分，則可知在這 9 次測驗中，她的總分共少得 18 分。而她在接下來的測驗中，每次最多可以得到 10 分，即每次最多都可比總平均多得 3 分，所以她要再參加 6 次測驗便可多得 18 分來彌補這 9 次測驗少得的分數。此時共有 15 次測驗，她合計共得 $9 \times 5 + 6 \times 10 = 105$ 分，此時總平均為 $105 \div 15 = 7$ 。

答: (C).

17. 小安將四個互相相異的數分別寫在四張卡片上，然後她將所有二張及二張以上卡片的總和分別列出。請問她最多可以列出多少個不同的總和？

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

令這四張卡片上的數分別為 a 、 b 、 c 及 d 。

則任取二張卡片上的數之總和為

$$a + b, \quad b + c, \quad c + d, \quad a + c, \quad b + d, \quad a + d.$$

任取三張卡片上的數之總和為

$$a + b + c, \quad a + b + d, \quad a + c + d, \quad b + c + d.$$

而四張卡片上的數之總和為

$$a + b + c + d$$

合計共有 11 種不同的方式，故經適當的選擇 a 、 b 、 c 、 d ，知最多可有 11 個不同的總和。例如，取 $a = 1$ 、 $b = 10$ 、 $c = 100$ 、 $d = 1000$ ，可得 11、101、110、1001、1010、1100、111、1011、1101、1110、1111

共 11 個不同的總和。

答: (E).

18. 在三、四、五月份，我家的草地每天長高 0.7 cm。當它的高度一達到 20 cm 時，我立即將它剪短至高度為 2.5 cm。假設我在 3 月 1 日剪了一次草，請問在這三個月月中我總共剪了幾次草？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

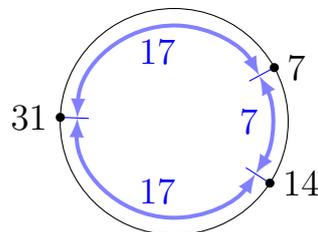
在兩次剪草之間，草的高度從 2.5 cm 長至 20 cm，共長高 17.5 cm。因草每天長高 0.7 cm，故知兩次剪草之間共間隔 $17.5 \div 0.7 = 25$ 天。而從 3 月 1 日算起三、四、五月份共有 92 天，故知我在第 1 天、第 26 天、第 51 天及第 76 天都有剪草，而再下一次剪草是第 101 天，這已不在三、四、五月份之內了。因此共剪了 4 次草。

答: (C).

19. 有 n 個人以相等的間隔圍成一個圓圈而坐。將這些人依順時針方向由 1 至 n 編號。編號 31 的人注意到他與編號 7、編號 14 的人都等距。請問共有多少個人圍坐在這個圓上？

(A) 42 (B) 41 (C) 40 (D) 39 (E) 38

可知從 7 到 14 共有 7 個間隔，且因從 14 到 31 共有 17 個間隔，故知從 31 到 7 共有 17 個間隔。
所以這個圓上共有 $7 + 17 + 17 = 41$ 個人。

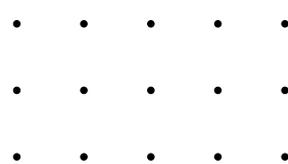


答: (B).

20. (同小學高年級卷第 26 題、中級卷第 16 題)

右圖所示是一個 3×5 的格子點。連接兩個格子點畫直線段，使得此線段恰通過另一個格子點，請問共可畫出多少條這樣的線段？

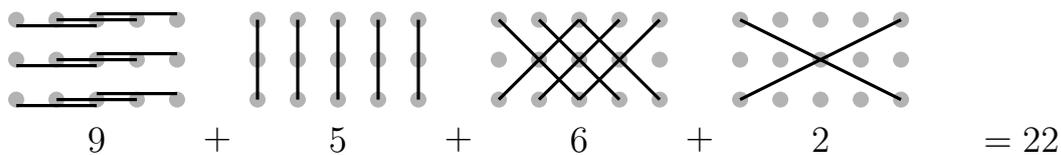
(A) 14 (B) 20 (C) 22
(D) 24 (E) 30



解法 1

如圖，畫出所有滿足題意的線段，其中有水平線段、鉛垂線段、與鉛

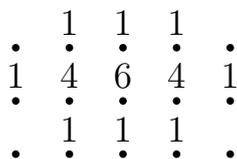
垂線夾 45° 角的線段及對角線段:



答: (C).

解法 2

因每條滿足題意的線段都只數一次，故可依中間點所在位置分類。若將中間點位在該點的線段數記在該點上，可得以下的圖，其中數目是成對稱的情況：



因此知共有 22 條線段。

答: (C).

21. 有十個連續的二位數，已知它的第一個數與最後一個數都是完全平方數。請問這十個數的總和是什麼？

- (A) 205 (B) 210 (C) 215 (D) 225 (E) 230

可知第一個數與最後一個數之間的差為 9，而二位數中，完全平方數由小至大依序為 16、25、36、48、64 及 81，其相鄰兩數之間的差依序為 9、11、13、15 與 17。因此知僅 16 與 25 滿足二個完全平方數之差為 9，所以這十個數為 16, 17, ..., 25，其總和為

$$16 + 17 + \cdots + 24 + 25 = \frac{10}{2}(16 + 25) = 205。$$

答: (A).

22. (同中級卷第 17 題)

一家旅館的每間房間至多可住進二人。配偶可同住一房間，否則男人只能與男人住同一房間，女人只能與女人住同一房間。現有 100 人的團體入住，請問至少需要多少間房間才能保證夠住？

- (A) 50 (B) 51 (C) 67 (D) 98 (E) 99

在最壞的情況下，51 間房間即可保證夠住。可知是配偶的總人數一定為偶數，故知若單身的男人總數是偶數時，則單身的女人總數也必是偶數，此時單身的男生與女生都可分別各自兩兩配對入住，即僅需 50 間房間；而若單身的男人總數是奇數時，則單身的女人總數也必定是

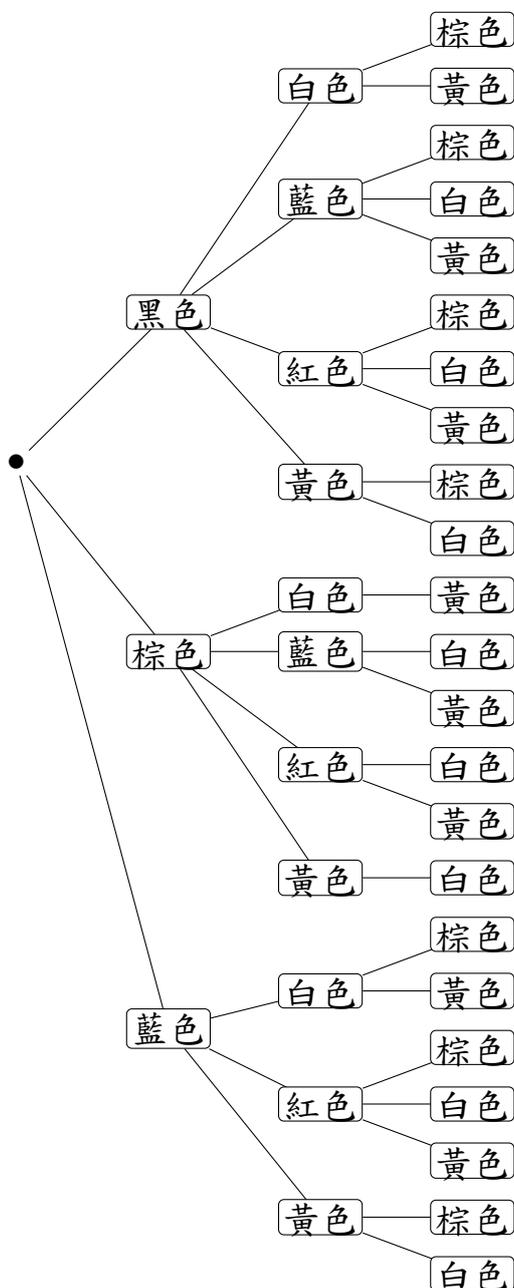
因此知 $a - b$ 共有 98 個數碼為 1。

答: (D).

25. 小杰有三件夾克：一件黑色、一件棕色、一件藍色。他也有四件襯衫：一件白色、一件藍色、一件紅色、一件黃色。他同時有三件長褲：一件棕色、一件白色、一件黃色。若要求任兩件衣物不可以為同色，請問他共有多少種不同搭配夾克、襯衫、長褲的方式？
- (A) 23 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 29

解法 1

以下樹狀圖表示了所有不同搭配夾克、襯衫、長褲的方式：



故知共 23 種不同搭配夾克、襯衫、長褲的方法。

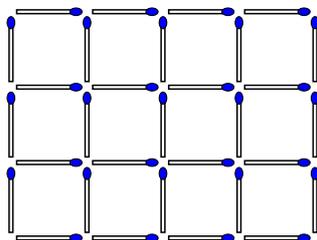
答: (A).

解法 2

在不考慮顏色的狀況下，共有 $3 \times 4 \times 3 = 36$ 種搭配的方法。而其中有 4 種為兩件衣物為棕色、3 種兩件衣物為藍色、3 種兩件衣物為白色及 3 種兩件衣物為黃色，且不會有三件衣物為同色的情況，因此知共有 $36 - 4 - 3 - 3 - 3 = 23$ 種不同搭配夾克、襯衫、長褲的方法。

答: (A).

26. 使用 31 根火柴棒可拼出一個 3×4 的方格表，如下圖所示。請問要拼出一個 13×33 的方格表，需要使用多少根火柴棒？

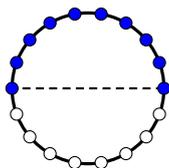


可知有 14 列，每列 33 根的火柴棒排成水平線，故共有 $14 \times 33 = 462$ 根火柴棒排成水平線；也可得知有 34 行，每行 13 根的火柴棒排成鉛垂線，故共有 $34 \times 13 = 442$ 根火柴棒排成鉛垂線，合計共需要 $462 + 442 = 904$ 根火柴棒。

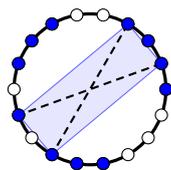
答: 904.

27. 在一個圓上有相等間隔的十八個點，從中隨機選出一些點。請問至少要選出多少個點才能保證其中存在有可構成一個矩形的四個頂點？

可知要構成矩形的四個頂點一定分別是兩條直徑上的端點。若選出的頂點數只有 10 個，則不一定會包含兩條直徑的端點，例如，依序選擇 10 個連續的頂點，如下圖中的塗上陰影的頂點：



而若選出 11 個以上的頂點，此時至多只會有 7 個頂點不會是同一條直徑的兩個端點，因此至少會有兩條直徑上的端點會被包含在所選出的點中而構成一個矩形。

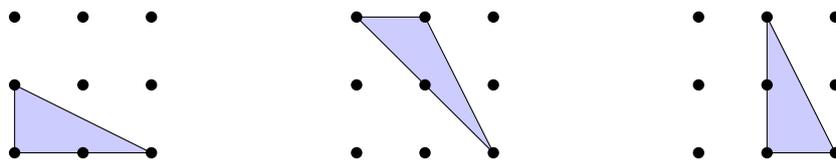


所以至少要選出 11 個頂點才能保證其中存在有四個頂點可構成一個矩形。

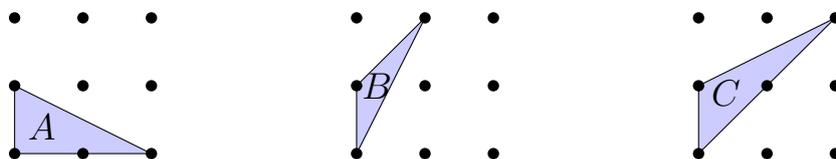
答: 11.

28. (同中級卷第 26 題)

在一個 3×3 的格子點上，可用其中 3 個點為頂點構成一些三角形，下圖為其中三個例子。請問在所有可能構成的三角形中，有多少個三角形它的三個邊長都互不相同？



在此 3×3 的格子點上，共有以下三種邊長都互不相同的三角形：



現驗證沒有其他種類邊長都互不相同的三角形。考慮這樣的三角形的最長邊。

- (i) 若最長邊的長度為 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 時，則這條邊一定是這一個 3×3 的格子點上的對角線，因此第三個頂點一定是在邊上但不在角落的點，此即為 C 的情況。
- (ii) 若最長邊的長度為 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 時，此時另兩邊的長度只能是 1、 $\sqrt{2}$ 或 2。如果是 1 與 $\sqrt{2}$ ，此為 B 的情況；如果是 1 與 2，此為 A 的情況；如果是 2 與 $\sqrt{2}$ ，此無法在 3×3 的格子點上發生。
- (iii) 若最長邊的長度為 2，則另兩邊的長度只能是 1 與 $\sqrt{2}$ ，此無法在 3×3 的格子點上發生。

接著觀察旋轉及對稱的情況後可得知，因三角形 A 此類型的三角形只會發生在 2×1 的格子點內，故可推知三角形 A 這一種類型的三角

形共有 16 個；而三角形 B 這一類型的三角形也是一樣，因此共有 16 個；最後因三角形 C 此類型的三角形只會發生在 2×2 的格子點內，故可推知三角形 C 這一類型的三角形共有 8 個。所以合計共 $16 + 8 + 16 = 40$ 個邊長都互不相同的三角形。

答: 40.

29. (同小學高年級卷第 30 題)

請問共有多少個三位數使得它的其中一個數碼等於其它兩個數碼之和？

可分成以下三種情況來討論：

- (i) 若只有一個最小的數碼且其值為 0 時，則可假設這三個數碼為 0、 a 與 a ，其中 $a = 1, \dots, 9$ ，例如 404 即為其中一數。而由這三個數碼組成的三位數有二個，例如 404 與 440。故可推知此情況共有 18 個三位數。
- (ii) 若最小的兩個數碼相等時，則可假設這三個數碼為 a 、 a 與 $2a$ ，其中 $a = 1, 2, 3, 4$ ，例如 633 即為其中一數。而由這三個數碼組成的三位數有三個，例如 336、363 與 633。故可推知此情況共有 12 個三位數。
- (iii) 若三個數碼都不相等時，則可假設最小的數碼為 a 、第二小的數碼為 b ，而最大的數碼即為 $a + b$ ，例如 385 即為其中一數。而由這三個數碼組成的三位數有六個，例如 358、385、538、583、835 與 853。此情況如下表所示。

為了算出情況 (iii) 所有的三位數，要算出 a 與 b 所有的可能值。可如表所示列出 a 與 b 的可能值，並得到可能的組合。

		b						
		2	3	4	5	6	7	8
a	1	123	134	145	156	167	178	189
	2		235	246	257	268	279	
	3			347	358	369		
	4				459			

對於這 $7 + 5 + 3 + 1 = 16$ 個組合，每一種組合都可以再對應出六個三位數，因此情況 (iii) 共有 $16 \times 6 = 96$ 個三位數。

因此合計有 $18 + 12 + 96 = 126$ 個滿足題意的三位數。

答: 126.

30. (同高級卷第 26 題)

有一個三位數，它等於個位數碼的立方、十位數碼的平方與百位數碼之總和。請問滿足此性質的最大三位數是什麼？

解法 1

令這一個三位數為 \overline{abc} 。則

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= a + b^2 + c^3 \\ 99a + 10b - b^2 &= c(c^2 - 1) \\ 99a + b(10 - b) &= (c - 1)c(c + 1) \end{aligned}$$

現考慮所有的可能，如表所示：

$99a$	$b(10 - b)$	$(c - 1)c(c + 1)$
$99 \times 1 = 99$	$1 \times 9 = 9$	$1 \times 2 \times 3 = 6$
$99 \times 2 = 198$	$2 \times 8 = 16$	$2 \times 3 \times 4 = 24$
$99 \times 3 = 297$	$3 \times 7 = 21$	$3 \times 4 \times 5 = 60$
$99 \times 4 = 396$	$4 \times 6 = 24$	$4 \times 5 \times 6 = 120$
$99 \times 5 = 495$	$5 \times 5 = 25$	$5 \times 6 \times 7 = 210$
$99 \times 6 = 594$	$6 \times 4 = 24$	$6 \times 7 \times 8 = 336$
$99 \times 7 = 693$	$7 \times 3 = 21$	$7 \times 8 \times 9 = 504$
$99 \times 8 = 792$	$8 \times 2 = 16$	$8 \times 9 \times 10 = 720$
$99 \times 9 = 891$	$9 \times 1 = 9$	

觀察 $99a + b(10 - b) = (c - 1)c(c + 1)$ 所有可能的情況，我們可得兩個滿足題意的情況：

$$99 + 21 = 120 \implies a = 1, b = 3 \text{ or } 7, c = 5 \implies n = 135 \text{ or } n = 175.$$

$$495 + 9 = 504 \implies a = 5, b = 1 \text{ or } 9, c = 8 \implies n = 518 \text{ or } n = 598.$$

故可得知共有四個三位數滿足題意，其中最大的數為 598。

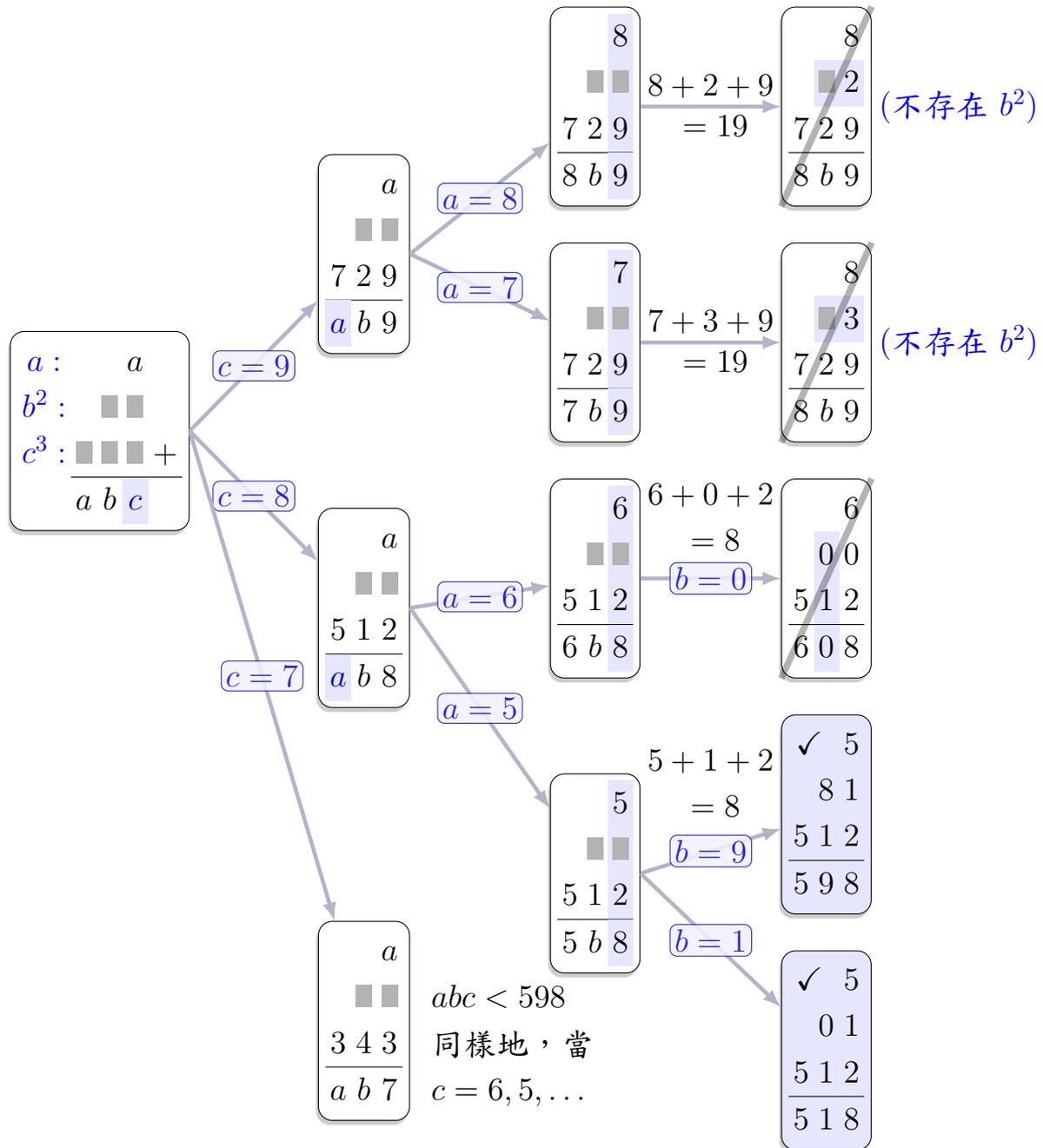
答：598.

解法 2

可知 \overline{abc} 等於 $a + b^2 + c^3$ ，而 b^2 與 c^3 的可能值為：

數碼	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
平方	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
立方	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729

接著我們將 c 值由大到小代入加式中逐一檢驗，並再代入 a 值與 b 值，可得以下樹狀圖：



此時可發現最大值為 598，而 $c = 7$ 、 $c = 6$ 、...、 $c = 1$ 時所得到的值皆小於此數。

答: 598.