勒　讓　德

勒讓德， A.-M. (Legendre， Adrien–Marie) 1752 年 9 月 18 日生於法國巴黎；1833 年 1 月 9 日卒於巴黎。數學。

勒讓德之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Legendre.html

勒 讓 德

侯 德 潤

(徐州師範學院)

勒讓德， A.-M. (Legendre， Adrien–Marie) 1752 年 9 月 18 日生於法國巴黎； 1833 年 1 月 9 日卒於巴黎。 數學。

生平和事蹟

勒讓德出身於一個富裕家庭， 就讀於巴黎的馬扎林 (Mazarin) 學院。 他受過科學教育， 特別是數學方面的高等教育。 他的數學老師 J.F.M. 阿貝 (Abbè) 是一個小有名氣並且在宮庭中受到尊敬的數學家。 1770 年勒讓德十八歲時， 就在阿貝的主持下通過了數學和物理方面的畢業論文答辯。 他的經濟條件足以使他全力以赴地從事科學研究工作。 但儘管如此， 他還是在 1775 年到 1780 年在巴黎的軍事學校教過數學。 他的研究工作受到科學界的注意， 並在 1782 年獲得柏林科學院的獎勵。 1783 年 3 月 30 日， 他取代 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 作爲一名力學副研究員被選進科學院， 1785 年被提升爲合作院士。

1787 年， 他被科學院指派擔任巴黎和格林尼治天文台聯合進行的大地測量工作， 並參加了皇家學會。 1790 年前後， 與一位十九歲的姑娘瑪格麗特・庫塞 (Marguerite Couhin) 結婚。 1791 年 4 月 13 日， 他被任命爲一個三人委員會的委員， 設置該委員會的目的是解決爲確立標準米而進行的天文運算和三角測量問題。 1793 年科學院查禁， 他一度被迫隱居， 由他的年輕妻子幫助他創造了一個安靜的環境繼續從事研究工作。 他們一直沒有子女。

1794 年， 巴黎行政區的公衆教育委員會任命勒讓德爲馬拉 (de Marat) 專科學校的純粹數學教授。 不久該校解散， 他又擔任公衆教育國家執行委員會第一辦公室主任， 領導處理度量衡、 發明創造以及對科學工作者的獎勵等事宜， 不久成爲該委員會的高級秘書。 1799 年， 他繼拉普拉斯之後在巴黎綜合工科學校擔任研究生答辯的數學主考人， 1815 年辭職， 得到一筆 3000 法郎的養老金。 1813 年 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 去世， 由勒讓德取代了他在經度局的位置， 並在那裡終其餘生。

勒讓德在數學方面的貢獻， 首先表現在橢圓函數論。 有許多理由足以說明他是橢圓函數論的奠基人。 在他之前， C. 麥克勞林 (Maclaurin) 和 J.R. 達朗貝爾 (d'Alembert) 曾研究過可以用橢圓或雙曲線的弧表示的積分。 G.C. 法尼亞諾 (Fagnano) 在 1716 年曾證明， 對任意給定的橢圓或雙曲線， 可以用無窮多種方法指定兩條弧， 使得其差等於一個代數量。 他還證明過， 伯努利雙紐線 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 的弧能夠像圓弧那樣被代數地加以乘、 除。 這是橢圓積分簡單應用的第一個說明。 這一積分被勒讓德記作 $F(x)$， 他認爲用它可以決定所有其它的積分。 從法尼亞諾的研究出發， L. 歐拉 (Euler) 著手處理更一般的橢圓積分， 並得出了現在稱爲第一類和第二類橢圓積分的加法定理。 1768 年， 拉格朗日把歐拉的發現納入通常的分析程序。 1775 年， J. 藍登 (Landen) 又證明了雙曲線的每一條弧能夠用一個橢圓的兩條弧來度量。 1786 年， 勒讓德出版了他的關於橢圓弧的積分的著作。 其中第一部分是在他知道藍登的發現之前就已寫出的。 他避免應用雙曲線的弧， 而採用作一個適當構造的橢圓弧的表的辦法來代替。 他給出藍登定理的一個新的解釋， 並且用同一方法證明了每一個給定的橢圓是一個無限多的橢圓序列的一部分。 求出兩個任意選定的橢圓的周長， 就可以求得所有其它橢圓的周長。 有了這條定理， 就有可能把一個給定橢圓的求長問題化成兩個其它的和圓相差任意小

的橢圓的求長問題。

不過，這一課題及一般形式的超橢圓函數理論，需要更系統的處理。這正是勒讓德在他的“關於橢圓超越性的論文”(*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*，1793) 一文中所提供的。他提出對這一類型的所有函數應進行比較，將其區別歸類，把每一個變成可能的最簡形式，並利用最容易、最快速的近似法對其求值，進而作爲一個整體從理論上建立一個算法系統。

勒讓德後來的研究，從幾個方面完成了這一理論。1809 年，他發表了“各種不同定義的積分的研究” (*Recherches sur diverses sortes d'inteégrales difinies*) 一文，繼續從事對歐拉積分 (這一術語是勒讓德給出的)，特別是對 Γ 函數的研究。1811 年，勒讓德在《積分練習》(*Exercices du calcul intégral*) 一書中，進一步給出了三角表示理論。令 $\Delta = \sqrt{1-c^2\sin^2\phi}$，其中 $0 \leq c \leq 1$，勒讓德稱 c 爲函數的模。積分限從 0 到 ϕ，ϕ 稱爲函數的幅角；$\sqrt{(1-c^2)} = b$ 是模的補。最簡單的超橢圓函數是第一類積分 $F(\phi) = \int \frac{d\phi}{\Delta}$。第二類積分由長軸 I 和離心率 c 的橢圓弧表出，形式爲 $E(\phi) = \int \Delta d\phi$。第三類積分爲

$$\Pi(\phi) = \int \frac{d\phi}{(1+\eta\sin^2\phi)\Delta}，$$

其中 η 爲參數。每一個橢圓積分可被表示爲這三種超越類型的一個組合。

設 ϕ 和 ψ 是由下面微分方程聯繫的兩個變量：

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}} + \frac{d\psi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\psi}} = 0。$$

方程的積分爲 $F(\phi) + F(\psi) = F(\mu)$，$\mu$ 是任意常數。歐拉定理指出：

$$\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi\sqrt{1-c^2\sin^2\psi} = \cos\mu。$$

因此，μ 可用代數方法求出，使得 $F(\phi)+F(\psi)=F(\mu)$，從而 $F(\mu)$ 可以被一個任意常數 (整數或有理數) 相乘。經過這樣的研究，勒讓德對三種類型的積分中的每一種都導出了許多結果。

勒讓德還進一步把第一類積分記爲 $F(c,\ \phi)$，其中 c 爲模、ϕ 爲幅角。根據蘭登定理，他建立了一種變換，後來稱之爲二次變換，即如果 $\sin(2\phi'-\phi)=c\sin\phi$，且 $c'=\dfrac{2\sqrt{c}}{1+c}$，那麼 $F(c',\ p')=\dfrac{1+c}{2}F(c,\ \psi)$。通過反覆使用這種變換，勒讓德建立了橢圓函數表，於 1817 年公開發表。

1826 年，勒讓德又出版了《橢圓函數論》(*Traité des fonctions elliptiques*)，在第二卷中列有九張這種表。最後一張表是函數 F 和 E 的一般化數表，其中幅角 ϕ 從 1° 到 60°，模 θ ($\sin\theta=c$) 的值在小於 45° 時取 10 位小數，在 45° 至 90° 之間時取 9 位小數。他曾寫信給 C.G.J. 雅可比 (Jacobi)，說他在無任何外力幫助的情況下致力於如此冗長而乏味的工作，但卻樂此不疲，並認爲這一工作的重要性完全可以和 H. 布里格斯 (Briggs) 的對數表媲美。

1827 年，雅可比也開始研究橢圓函數。他寫信把自己的和 N.H. 阿貝爾 (Abel) 的發現告訴給勒讓德。面對年輕對手的挑戰，勒讓德的態度是非常熱心和直率的。他在《橢圓函數論》第三卷的序言中讚揚了這位 “柯尼斯堡的年輕幾何學家” 以及阿貝爾。後來又發表了《橢圓函數論》的三個附錄。前兩個主要介紹了雅可比的工作，也提到阿貝爾，其中包括橢圓函數和勒讓德積分的反函數。勒讓德以其慣有的略嫌冗長的模式討論了將橢圓函數推廣到複數域和雙週期。附錄三主要討論阿貝爾的工作和他的大定理。1832 年 3 月 4 日，勒讓德總結他的工作說：“我們僅接觸到這一課題的表面。可以預言它將隨數學家的工作而日趨成熟，最

終將構成超越函數分析中的一個最漂亮的部分。”

數論是勒讓德特別關注的第二個重要領域。早在 1785 年，他所發表的 “不定分析的研究 “ (*Recherches d’analyse indéterminée*) 一文中即載有二次剩餘互反律及其若干應用的一個說明，把數分解成三個平方數的理論的概述，還陳述了一條以後變得很有名的定理：“每一個首項和公比互質的算術級數中都含有無限多個質數。” 1798 年，他又發表了他的《數論隨筆》(*Essai sur la theórie des nombres*) 一書的第一版。他在這本書裡，用更系統和更徹底的方法處理了 “不定分析的研究” 中的那些論題。該書是十八世紀數論學科的主要著作之一。第二版以《數論》(*Théorie des nombres*) 爲名於 1808 年出版。在這一版的引言中，勒讓德提到要高度注意嚴密性，這一點是值得讚揚的。在這一版中，他利用和 P. de 費馬 (Fermat) 的無窮遞減法有關的技巧證明了整數乘積的變換性。作爲歐拉和拉格朗日的一個直接追隨者，勒讓德和他們一樣，經常使用連分數的算法，用來解一階不定方程，並用來證明費馬方程 $x^2 - Ay^2 = 1$ 恆有一個整數解，以後他又給第二版增加了兩個附錄 (1816、1825)。第二個附錄中含有方程 $x^5 + y^5 = z^5$ 不可能有整數解的一個漂亮的證明。接著就是對這條定理的更複雜情形的考察。該書第三版分成兩卷，於 1830 年 5 月問世。第三版發展了第一版中的內容，並添上一些在很大程度上受到 C.F. 高斯 (Gauss) 影響的新思想。這一版特別有價值。它和高斯的《算術研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*，1801) 一起同爲這門學科中的標準著作。

勒讓德還追隨拉格朗日研究過二次型，在某些方面得到了完善的結果。例如，他證明了每一個非 $8k + 7$ 型的奇數是三個平方數的和。在這一結果的基礎上，A.L. 柯西 (Cauchy) 在 1812 年針對多項式數的情形證明了費馬定理。

勒讓德對數論的主要項獻是提出二次剩餘的互反律。這是十

八世紀數論中最富於首創精神的可能引出最多成果的發現。1785 年，他用一個冗長而不完善的說明提出這一定律。1801 年，高斯對勒讓德的陳述進行了批評，並宣稱他是第一個能夠嚴格敍述這一命題的人。1808 年，勒讓德採用了這位年輕的批評者所給出的證明。他發明了記號 $\left(\frac{p}{q}\right)$，令其等於 1 或 -1，以表示 p 是 q 的二次剩餘或二次非剩餘。在這種記號下，二次互反律說，如果 p 和 q 是不同的奇質數，那麼

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}\text{。}$$

1830 年，他又把他認爲是更好的雅可比的證明補充了進去。

作爲一個非常熟練的計算工作者，勒讓德提出了有價值的數表。他編列了二次型的二次和一次的因子以及費馬方程 $x^2-Ay^2=\pm 1$ 的最小解。後一張表出版於 1798 年，並在 1808 年用一種更簡略的刪節本形式重印。

勒讓德還是解析數論的先驅者。他在 1798 年提出了質數分佈定律的初步形式，1808 年又使其更加精確化，呈現爲如下形式：如果 y 是小於 x 的質數，則 $y=\dfrac{x}{\log x-1.08366}$。他宣稱並在 1830 年再次強調他是用歸納法發現這一定律的。1793 年，高斯由直覺看出了質數的漸近分佈定律。但是，第一個明確給出這一條非凡定律的，還是勒讓德。

另一方面，勒讓德早在 1785 年便說明了在每一個算術級數 $ax+b$ (此處 a、b 是互質的) 中，有無窮多個質數。他甚至詳細說明過，在把 $\phi(a)$ 個互質於 a 並小於 a 的值給予 b [$\phi(a)$ 是歐拉函數] 以後，這些質數幾乎相等地分佈在 $\phi(a)$ 個不同的級數當中。

對數論研究開闢了一個十分廣闊的園地之後，勒讓德在 1830 年又試圖闡述阿貝爾的關於方程代數解的概念。勒讓德認爲，他已

令人信服地證明了對於高於四次的方程來說，求得一般的解是不可能的。他還對研究方程的數值解法表示過興趣，特別是研究過根的分離和把它們展開成連分數。1808 年，他提出了關於代數基本定理的證明，與 J.R. 阿爾岡 (Argand) 在 1806 年給出的證明十分類似。

在他的《幾何學原理》(*Éléments de géométrie*，1794) 的附註 4 (發表於該書的第一版) 中，勒讓德利用連分數的算法建立藍伯特定理 (1761)：圓的周長和直徑的比是一個無理數。他改進了這一結果，證明了這個比的平方也是一個無理數，並補充說："很可能數 π 甚至不包含在代數無理數中，但是要嚴格說明這個命題似乎是非常困難的。"

在他整個一生中，勒讓德都對數論有著極大的興趣。他非常了解這個題目的困難。因此在他最後的幾年當中，經歷了一個對它不再抱希望的過程。例如，他在 1828 年寫信給雅可比說："我打算奉勸你不要花太多的時間去研究這類問題；它們是非常困難的，而且往往是毫無成效的。"

天體力學是勒讓德在他早年科學研究生涯中關心過的另一個領域。他年輕時曾從事關於星球的相互吸引問題和它們的平衡方式的研究。1783 年 1 月，他在科學院宣讀過一篇關於這一問題的論文，該文發表在《外國博學者文集》(*Recueil des savants étrangers*，1785) 一書中。他在這篇文章中證明了一條定理：如果旋轉體對位於軸的延長線上每一外點的引力爲已知，則它對每一外部點的引力也可求得。文章中出現了我們現在所謂的勒讓德多項式。對這一多項式的研究引起了以後一系列浩瀚的工作。

1784 年 7 月，勒讓德在科學院宣讀了"關於星形狀的研究"(*Recherches sur la figure des planètes*)。他在此文中推導出勒讓德多項式的一些性質，並將這些性質和其它性質運用到萬有引力的問題上。此後不久，他又發表了"關於地球形狀結果的三角運

算” (*Mémoire sur les opérations trigonomètriques dont les résultats dépendent de la figure de la terre*)。 在這篇文章中有一個關於球面三角的 “勒讓德定理”：

“當一個 (球面) 三角形的邊相對球半徑是很小的時候， 它非常近似於一個直線三角形。 如果從它的每一個角中減去這三個角之和與二直角 (之和) 之差的三分之一， 則按這一方式所得的角可以被看作是一個直線三角形的角， 這個三角形和已知三角形有相等的邊長。”

1790 年， 勒讓德發表了 “論重積分” (*Mémoire sur les intégrales doubles*) 一文。 他在這篇文章裡完成了他關於球體吸引的分析， 包括對非均勻球體情形的研究， 以及某些微分方程的特殊積分的探討。

十八世紀末， 由 R. de 普隆尼 (Prony) 領導的法國勘測局編制了三張數學用表， 即： 按一直角的每千分之十度計算角的餘弦， 精確到小數第 22 位； 按一直角的每千分之一百度計算正弦的對數， 精確到小數第 12 位； 以及從 1 到 200 000 各個數的對數， 也是精確到小數 12 位， 這項工作由以勒讓德爲首的分析學家們組成的一個小組進行準備， 勒讓德設計了一些新的公式用以確定正弦的相繼的差， 並根據一些恆等式對計算出來的結果相互驗證。 1802 年， 勒讓德寫道：“這三張表是用新方法計算出來的， 主要是基於差分演算的方法， 它們是樹立於科學事業中最出色的紀念碑之一。” 這些手抄表的抄本被收存在經度局中。 有一篇解釋性的文章發表在《專科學校論文集》(*Mémoires de 1’Institut*， 1801) 裡。

還有一個重要領域是勒讓德的著作中所涉及到的， 即初等幾何 — 特別是平行線理論。 他在這方面的著作《幾何學原理》多次再版並被翻譯成英文、 德文、 羅馬尼亞文， 支配了這門課程的初等教育幾乎達一個世紀。 附於書中的詳細註釋至今尚有一定的價值。 1793 年， 公衆教育委員會又委託他和拉格朗日合寫了一本題

爲《微分學和幾何學原理》(*Éléments de calcul et de géométrie*) 的教材。《幾何學原理》中的教義式的表述，標誌著法國在很大程度上對歐幾里得的迷信。在非歐幾何學家爲了使他們的概念被公衆接受所作的鬥爭中，這本書倍受責難。1832 年，勒讓德曾回憶起他在 1794 年至 1823 年爲證明歐幾里得平行公理所作的種種努力，他本人從未認識到這一切都是徒勞的。實際上，在他的一個似乎是無可挑剔的證明中，可以找到一個謬誤。正如 I. 牛頓 (Newton) 的衆多信徒一樣，勒讓德也篤信絕對空間和直線三角形邊的 "絕對的量"。遵循拉格朗日在《都靈雜錄》(*Mémoires de Turin*， 1761) 中所提出的倍受青睞的 "量的齊次性法則"，勒讓德在 1794 年建立了三角形的內角和定理。假若給定三角形的一條邊 a 和該邊的兩個鄰角 B、C，則此三角形可以唯一確定。第三個角 A 應爲已知各量函數：$A=\phi(B,\ C,\ a)$，但 A、B、C 是純粹數量，a 是長度。視 a 爲未知量，解方程 $A=\phi(B,\ C,\ a)$，所得的解爲 $a=f(A,\ B,\ C)$。勒讓德認爲："這一結果說明一條邊 a 可以等於一個沒有維數的純粹數量，這是荒謬的。" 量的齊次性法則必然使得這個長度在一開始就不能在公式中出現，因此有 $A=\phi(B,\ C)$。再考慮到直角三角形和它的頂垂線，便容易得到 $A+B+C=\pi$。

直到生命的結束，勒讓德從不懷疑這一推理的價值。失敗的原因是他在最後分析中總是依賴那些按歐幾里得的觀點看來是 "顯然" 的命題。例如：凹向相反的兩條凸周線必在有限遠處相交、在一個角的內部總可作出一條直線使其與角的兩邊相交、過不共線的三個點總可以作出一個圓。他在球面幾何和球面三角方面的鑑別力並沒有使他消除對絕對歐氏空間的盲目信任。他在 1832 年寫道："這條關於三角形的三個角的和的定理應該認爲是那些基本眞理之一。這些眞理是不容爭論的，它們是數學永恆眞理的不朽的例子。"

勒讓德的科學活動從大約 1770 年起到 1832 年止， 在十八和十九世紀各從事了三十年， 他是拉格朗日的一位傑出的門徒， 也超過了歐拉的所有弟子。 他和當時其他數學家一樣， 既處理抽象數學， 也研究數學在宇宙系統中的應用。 他的著作是過渡性的， 很快就陳舊了。 但儘管如此， 他仍是一位不平凡的計算工作者， 一位熟練的分析學家， 而且總的說來， 是一位優秀的數學家， 特別在橢圓函數論和數論方面做出了傑出的貢獻。

文　　獻

原始文獻

[1] A.M. Legendre, *Theses mathematicae ex analysi, geometria, mecanica exerptae, excollegio Mazarinaeo*, Paris, 1770。

[2] A.M. Legendre, *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants*, Berlin, 1782。

[3] A.M. Legendre, *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, Paris, 1793。

[4] A.M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris, 1798； 2nd ed., 1808； 3rd ed., 2 Vols., 1830。

[5] A.M. Legendre, *Éléments de géométrie, avec des notes*, Paris, 1794； 12th ed., 1823。

研究文獻

[6] Élie de Beaumont, *'Eloge historique d'Adrien–Marie Legendre, lu le* 25 *mars* 1861, Mémoires de l'Acdémie des Sciences, 32 (1864), 37－94。

[7] Jacob, *A.M. Legendre*, 見 Hoefer, ed., *Nouvelle biographie générable*, XXX, Paris, 1862, 385－388。

[8] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, New York, 1972。