羅　巴　切　夫　斯　基

羅巴切夫斯基， Н. И. (Лобачевский， Николай Иванович， 英文 Labachevsky， Nikolai Ivanovich) 1792 年 12 月 1 日 (俄曆 11 月 20 日) 生於俄國下諾夫哥羅德 (Novgorod， 今高爾基城 (Gorky))； 1856 年 2 月 24 日卒於俄國喀山 (Kazan)。 數學。

羅巴切夫斯基之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lobachevsky.html

羅　巴　切　夫　斯　基

杜　瑞　芝

(大連理工大學)

羅巴切夫斯基， Н. И. (Лобачевский， Николай Иванович， 英文 Labachevsky， Nikolai Ivanovich) 1792 年 12 月 1 日 (俄曆 11 月 20 日) 生於俄國下諾夫哥羅德 (Novgorod， 今高爾基城 (Gorky))； 1856 年 2 月 24 日卒於俄國喀山 (Kazan)。 數學。

尼古拉・伊萬諾維奇・羅巴切夫斯基出生在一個土地測量員的家庭， 他是伊萬・馬克西莫維奇・羅巴切夫斯基 (Лобачевский， Иван Максимович) 和普拉斯科維亞・亞歷山德羅娃・羅巴切夫斯卡婭 (Лобачевская， Прасковья Александрова) 的次子。 伊萬・馬克西莫維奇是一個天主教徒， 從外埠移居到下諾夫哥羅德， 在當地的奉獻節教堂供職。 他體弱多病， 早年去世。 普拉斯科維亞・亞歷山德羅娃是一位頑強而開明的婦女， 她竭盡全力維持家計， 並送三個兒子 (亞歷山大 (Александр)、 尼古拉和阿列克謝 (Алексей)) 到喀山中學寄讀。 從此以後， 羅巴切夫斯基一直在喀山學習和工作。

羅巴切夫斯基用四年時間讀完了中學課程。 在此期間， 他得到數學教師 Г. И. 卡爾塔舍夫斯基 (Карташевский) 的特別指導， 激發了他對數學的興趣。 1807 年春進入喀山大學。 在這裡他聽過許多著名教授的課， 特別是 C.F. 高斯 (Gauss) 的朋友、 數學教授 J.M. Ch. 巴特爾斯 (Bartels) 和天文學教授 И. А. 利特羅夫 (Литтров) 對羅巴切夫斯基有很大影響。 在大學期間， 他掌握了多種外語， 並系統地研讀了一些數學家的原著， 在數學方面表現出特殊的才

能。 年輕的羅巴切夫斯基富於幻想、 倔強並有些自命不凡。 這種性格使他經常違反學校紀律。 學校的行政領導曾指責他的行爲具有 “無神論的特徵”， 是 “令人憤怒的”。 但他的特殊才能和優異的學習成績一向爲教授們所欣賞， 在他們的庇護下， 羅巴切夫斯基順利地結束了學業， 於 1811 年獲得物理數學碩士學位， 並留校工作。 1814 年任教授助理， 1816 年升爲額外教授， 1822 年成爲常任教授。 從 1818 年起， 羅巴切夫斯基開始擔任行政職務， 最先被選進喀山大學校委員， 他很快成爲最積極工作的委員。 1822 年擔任新校舍工程委員會委員， 1825 年被推選爲該委員會的主席。 在這期間， 還曾兩度擔任物理數學系主任 (1820 – 1821， 1823 – 1825)。 由於羅巴切夫斯基的工作成績卓著， 在 1827 年， 大學校委員會決定選舉他但任喀山大學校長。 當時正是俄國反動勢力和宗教統治的囂張時期之後， 由於他的出色工作， 數年之後喀山大學成爲俄國的第一流學府。

羅巴切夫斯基擔任大學校長期間 (1827 – 1846)， 不僅顯示出他卓越的行政管理才能， 而且表現了他所獨具的教育家的天才。 他曾把喀山大學從火災和傳染病流行等混亂不堪的狀態中挽救出來。 在他的領導下， 建造了許多校舍 (教學樓、 圖書館、 天文台等)， 充實了圖書館的藏書， 他還親自擔任過圖書館館長[1] (1825 – 1835)。 作爲一位傑出的教育家， 羅巴切夫斯基認眞研究並寫出了許多有關教學法的著作。 他還對幾乎所有系的教學工作給予了極大的支持和影響。 所有這些， 使羅巴切夫斯基成爲喀山大學全體師生思想上的鼓舞者， 他的工作奠定了喀山大學興盛和發達的基礎。

在辭去大學校長的職務之後， 羅巴切夫斯基被任命爲喀山學區的督學助理。 在他的晚年， 由於眼睛視網膜病變， 導致雙目失明。

[1]現在的喀山大學圖書館仍以羅巴切夫斯基的名字命名。

羅巴切夫斯基在 1832 年與貴族小姐瓦爾瓦拉・阿列克謝耶夫娜・莫伊謝耶娃 (Варвара Алексеевна Моисеева) 結婚，他們共有 7 個子女。當羅巴切夫斯基的工作得到公認後，他被封爲世襲貴族，他爲自己的家族設計了族徽，其圖案象徵著智慧、勤勞、輕捷和歡樂。

羅巴切夫斯基的科學活動和創造與他的唯物主義的認識論有密切聯繫。他的青少年時代正是法國唯物主義哲學傳入俄國的時期，他的世界觀在西方進步哲學的影響下形成和發展。他堅定地相信 "眞理來源於客觀實踐而不是主觀認識，… 一切生活現象首先通過感覺被我們接受，而由感覺所得到的知識 (感性認識) 必須經過理性的抽象整理"[2]。他正確地提出了數學與現實的關係問題，駁斥了康德的先驗論的唯心主義見解。羅巴切夫斯基認爲，最初的數學抽象，包括幾何學的基礎概念在內，反映了最普遍和最簡單的現實關係及物質世界的特徵。想把數學從單純理智的體系中推導出來是全然無效的。他在自己的科學活動中始終如一地貫徹這種思想。

羅巴切夫斯基最重要的數學貢獻是創立了一種新的幾何體系，這是第一種非歐氏幾何學，現在通稱爲羅巴切夫斯基幾何學。自從歐幾里得《原本》問世以來，歷代數學家都爲其中的平行公設所困惑，許多學者都嘗試用歐幾里得其它公設來證明平行公設，結果都歸失敗。羅巴切夫斯基從 1816 年開始試作平行公設的證明，後來發現了其中的錯誤。1823 年他完成了自己第一部有關著作《幾何學》(Геометрии)。這是一本獨出心裁的教科書，反映了羅巴切夫斯基關於幾何學基礎的深刻思想。在這本書中，他把全部幾何命題按是否依賴於平行公設分爲兩部分。不靠平行公設得到證明的命題的總體，現在通常稱爲 "絕對幾何學"。在《幾何學》的前五章裡，羅巴切夫斯基闡述了絕對幾何學的命題，然後

[2]引自 1828 年在喀山大學的講演《關於最重要的教育科目》。

轉向不用平行公設無法證明的定理。這種原則上的劃分正是羅巴切夫斯基進一步研究的基礎。但是當《幾何學》送交科學院院士 Н. И. 富斯 (Фусс) 審定時，卻遭到了尖銳的批評，因而未能及時付印[3]。

在證明平行公設的嘗試屢遭失敗後，羅巴切夫斯基確立了平行公設不依賴於歐幾里得其它公設的信念。他提出了與歐幾里得平行公設對立的平行公設，並由此經過嚴密的推導得到一系列命題，構成了邏輯上無矛盾且與絕對幾何學不相衝突，但又和歐幾里得幾何不同的新幾何體系。他稱這種新的體系爲“虛幾何學” (Воображаемая геометрия)。

在 1826 年 2 月 11 日 (新曆 23 日) 物理數學系的學術會議上，羅巴切夫斯基做了題爲“附有平行線定理的一個嚴格證明的幾何學原理簡述” (Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных) 的報告，闡明了他所發明的“虛幾何學”原理。這一天被後人公認爲非歐幾何學誕生的日子。由於羅巴切夫斯基所提出的公設與通常的直覺不一致，他所建立的命題初看起來又近乎荒誕，因此他的報告沒有引起任何人的興趣，甚至連原稿也被遺失了。

1829−1830 年羅巴切夫斯基在喀山大學《喀山通訊》(Казанский вестник) 發表研究論文“論幾何學原理”(О началах геометрии)，其中前三分之一的內容是屬於 1826 年的論文的。這是最早的非歐幾何文獻。《喀山通訊》只是一種地區性的刊物，所以這篇論文仍未得到廣泛的注意。

但是羅巴切夫斯基沒有灰心，他不屈不撓地繼續進行研究。幾年之後，他在《喀山大學學報》(Ученые записки Казанского университета) 上發表數篇文章，系統論述非歐幾何學的原理及應用：“虛幾何學” (1835)、“虛幾何學在某些積分中的應用”

[3]《幾何學》直到羅巴切夫斯基死後於 1909 年才刊行於世。

(Прнменение воображаемой геометрии к некоторым интеглам, 1836)、“具有完善的平行線理論的新幾何學原理” (Новые начала геометрии с полной теорией параллельных, 1835－1838) 等。1837 年，他把修改後的 “虛幾何學” 譯成法文 ‘‘*Géométrie imaginaire*” 發表在《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 17 (1837), 295－320) 上。1840 年，他用德文出版了另一本書《平行線理論的幾何研究》(*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*)，向國外介紹自己的學說。高斯對這本書十分欣賞，並在 1842 年推薦羅巴切夫斯基成爲格丁根科學協會成員。1855 年，羅巴切夫斯基已雙目失明，但他仍不放棄發表自己的見解，口授完成了《泛幾何學》一書，分別用俄文 (Пангеометрия, 1855) 和法文 (*Pangéométrie*, 1856) 發表。

羅巴切夫斯基在其它數學領域也做出了許多貢獻。在分析領域中，他最先確立了函數的連續性和可微性的區別，在三角級數論和 Γ– 函數論中也得到一些重要結果；在代數學方面，他建立了高次代數方程的一種簡捷的近似解法。現稱之爲羅巴切夫斯基－格雷費 (Gräffe) 方法。他在這兩方面的主要論著有《代數學或有限運算》(Алгбра, или исчисление конечных, 1834)、《三角級數的消失》(Об исчезновении трнгонометрических строк, 1834)、《無窮級數的收斂性》(О сходимости Бесконечных рядов, 1841) 和《某些定積分的值》(О значении некоторых определенных интегралов, 1852) 等。

羅巴切夫斯基幾何學

羅巴切夫斯基發表的幾種非歐幾何的論著內容大體相似，只在某些細節上有所不同，我們將把它們綜合起來說明羅氏幾何 (即羅巴切夫斯基幾何，以下同) 的基本內容。

羅氏幾何與歐氏幾何 (即歐幾里得幾何，以下同) 的基本差異是關於平行線的公設 (簡稱平行公設或平行公理)。歐幾里得的平行公設是：如果一條直線與另外兩條直線相交，在前者同側的兩個內角之和小於兩直角，則後二者必在內角之和小於兩直角的一側相交。從這個公設容易得到與它等價的下列定理："通過直線 AB 外一點 C 在平面 ABC 上可作且僅可作一條直線與 AB 不相交"[4]。羅巴切夫斯基採用了與這個定理相反的假設作爲新幾何學的基礎："通過直線 AB 外一點 C 在平面 ABC 上至少可以作兩條直線與 AB 不相交。" 這個假設叫作羅氏公設，實施羅氏公設的平面叫羅氏平面。由羅氏公設出發可以直接得到下列結果：通過點 C 在平面 ABC 內可以作無窮多條直線與 AB 不相交。事實上，過點 C 的所有直線關於 AB 而言可分爲兩類：一類與 AB 相交，另一類不相交。羅巴切夫斯基斷言：存在兩條邊界直線，它們把過 C 的兩類直線分開，並且屬於與 AB 不相交的直線類 (圖 1)。羅巴切夫斯基稱這兩條邊界直線爲已知直線 AB 的平行線。這個定義是在他的《平行線理論的幾何研究》中給出的。

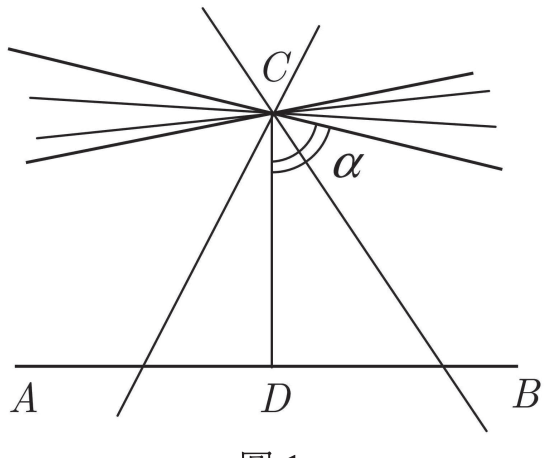

圖 1

事實上，如果從點 C 作直線 AB 的垂直線 CD，設 CD 長爲 δ，那麼存在一個與 δ 有關的角 $\pi(\delta)$，使得所有過 C 點的直線，當它與 CD 所成的角小於 $\pi(\delta)$ 時將與 AB 相交，否則不與 AB 相交。與 CD 成角 $\pi(\delta)$ 的兩條直線是 AB 的平行線，除此

[4]現在通行的中學幾何教科書中把這個定理作爲平行公理。

而外，過 C 而不與 AB 相交的直線稱爲 AB 的不相交直線 (也稱爲發散線或超平行線)。按照歐氏幾何涵義，不相交即平行，所以在這個意義上講，在羅氏平面中，過直線 AB 外一點可以有無窮多條直線與 AB 平行。角 $\pi(\delta)$ 稱爲線段 CD 的平行角，δ 稱爲平行距離。在歐氏幾何中，平行角顯然總等於 $\frac{\pi}{2}$，而在羅氏幾何中，平行角小於 $\frac{\pi}{2}$，且是 δ 的函數。羅巴切夫斯基證明，平行角 $\alpha=\pi(\delta)$ 與平行距離 δ 之間的函數關係是

$$\alpha=\pi(\delta)=2\arctan e^{-\frac{\delta}{k}}\text{，}\tag{1}$$

這裡 k 是依賴於單位長度的常數，$\alpha=\pi(\delta)$ 稱爲羅巴切夫斯基函數。由關係式 (1) 可以立即看出：當 $\delta=0$ 時 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，當 δ 從 0 增至無窮大時，α 從 $\frac{\pi}{2}$ 減少到 0。

在歐氏幾何中，平行線間的距離是個常數，但在羅氏幾何中情形卻大不相同。設 EF 是過直線 AB 外一點 C 與 AB 平行的直線，考察直線 EF 上一點 X 到直線 AB 的距離 (圖 2)，可以證明，當 X 沿 CE 方向 ($\angle DCE$ 爲平行角) 向右移動時，它到 AB 的距離 (即垂線段的長度) 不僅逐漸變小，而且當 X 趨向無限遠處時，還要趨向於零! 這就是說，平行直線 EF 與 AB 在 CF 方向逐漸地逼近。同樣可以證明，當 X 向相反方向移動時，X 與 AB 的距離不僅增大，而且趨向無窮。因此，在歐氏平面上描繪羅氏平行線時，通常把它們畫成漸近線。還應該指出，因爲過直線外一點可以作兩條直線與已知直線平行，所以應該區別平行線的方向，使兩條平行線逐漸接近的方向規定爲平行線的方向。

在羅氏幾何中，還有許多不同於歐氏幾何的定理，列舉幾個如下：

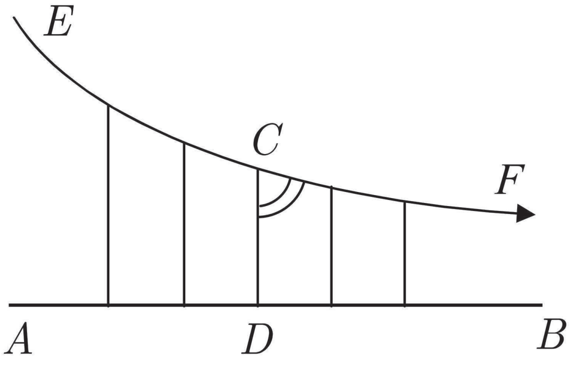

圖 2

1. 如果兩條直線與第三條直線相交，內錯角相等，那麼這兩條直線是發散的。

2. 兩條平行線與第三條直線相交，在平行方向上的同旁內角之和小於兩直角。

3. 三角形內角之和小於 π，並且當三角形面積無限增大時，其內角和趨向於零。設 S 爲三角形的面積，$K=-\dfrac{1}{k^2}$ (此處 k 即 (1) 式中的常數，以下同)，α、β、γ 爲三角形的三個角，則有

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+KS\text{，} \tag{2}$$

由此可見，三角形面積越小，其內角和越接近於 π 也就是說，在極小的三角形裡，羅氏幾何與歐氏幾何很相似。如果用 Δ 表示三角形的角欠 — π 與三角形各角和之差，那麼由 (2) 式可得

$$S=k^2\cdot\Delta\text{。}$$

4. 在羅氏幾何中，不存在不相等的相似三角形，即如果兩個三角形的三個角對應相等，那麼它們就全等。

5. 如果兩條直線 a、b 具有公垂線 d，那麼它們將在公垂線的兩側無限遠離；並且在其中任一條直線，例如 b 上，可以作兩條垂線 c、c'，使它們平行於直線 a (圖 3)。

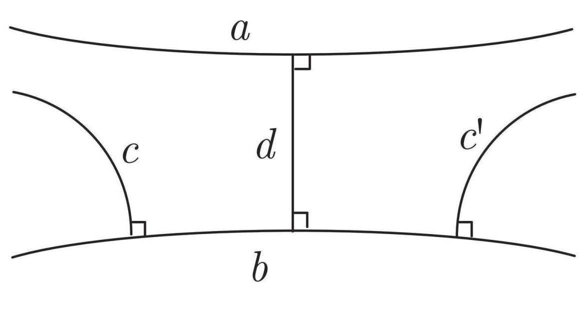

圖 3

6. 半徑無限增大的圓周的極限不是直線， 而是一種特殊曲線， 叫作極限圓。

7. 到一條直線等距離的點的軌跡不是直線， 而是一條特殊曲線， 叫作等距線。

8. 通過三點並不總能作一個圓， 而能夠作的或者是一個圓， 或者是一個極限圓， 或者一條等距線。

9. 半徑無限增大的球面不是平面而是一種特殊曲面， 叫作極限球面。 在極限球面的上的幾何恰好就是歐氏平面幾何， 這也是羅巴切夫斯基推導三角公式的基礎。

10. 圓周長 l 與半徑 r 不成正比， 而是更迅速地增長， 它們之間的關係是

$$l = \pi k(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}) \text{，} \tag{3}$$

利用 $e^{\frac{r}{k}}$ 和 $e^{-\frac{r}{k}}$ 的泰勒展開式， 由 (3) 式可得

$$l = 2\pi r \left(1 + \frac{1}{6}\frac{r^2}{k^2} + \cdots\right) \text{，} \tag{4}$$

(4) 式表明， 當半徑 r 很小或常數 k 足夠大時， 圓的周長就很接近 $2\pi r$。

羅氏幾何的一個重要性質在於： 在充分小的區域內， 它與歐氏幾何差異很小。 這是因爲， 區域的縮小形式上等價於單位長度的增大， 這也相當於常數 k 變大。 那麼在極限情形， 當 $k \to \infty$ 時， 由 (1) 式可知對任意的平行距離 δ， 都有 $\alpha = \pi(\delta) \to \frac{\pi}{2}$， 即平行角的極限總是直角； 由 (2) 式可知 $\alpha + \beta + \gamma \to \pi$， 即三角形內角之和的極限是 π； 由 (4) 式可知 $l \to 2\pi r$， 即圓周長與直徑之比的極限爲 π。 這就是說， 當 k 無限變大時， 羅氏幾何就變成了歐氏幾何， 或者說歐氏幾何正好是羅氏幾何的極限情形。 因而， 如果在羅氏幾何中添加上這個極限情形， 則它也就包括了歐氏幾何。 在這個意義下， 羅氏幾何就顯得是更普遍的幾何學。 正

因爲這個緣故，羅巴切夫斯基把自己的幾何體系命名爲“泛幾何學”，即普遍的幾何學。

在羅氏幾何中還有與歐氏幾何完全不同的刻劃三角形邊角關係的正弦定理和餘弦定理。這些公式羅巴切夫斯基是在《論幾何學基礎》中給出的。他在這篇文章中指出：“這些等式可以從球面三角學中的等式轉換而來，只要以 $a\sqrt{-1}$、$b\sqrt{-1}$、$c\sqrt{-1}$ 來代替相應等式中的三邊 a、b、c。而在通常的幾何學和球面三角學中到處都有相同的線段比，因此，通常的幾何學、三角學和新幾何學將永遠是彼此一致的。”

這就是說，如果我們對半徑是 r 的球寫出正弦定理、餘弦定理和餘弦對偶定理如下：

$$\begin{aligned}
\cos\frac{a}{r} &= \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A\text{，}\\
\frac{\sin A}{\sin(a/r)} &= \frac{\sin B}{\sin(b/r)}=\frac{\sin C}{\sin(c/r)}\text{，}\\
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos(\frac{a}{r})\text{，}
\end{aligned}$$

則羅氏平面中的三角公式可以如此得到：把三角形的三邊 a、b、c 分別換成乘積 ai、bi、ci，因爲邊長 a、b、c 乘以 i 相當於球的半徑乘以 i，所以若設 $r=ki$，並利用關係式

$$\cos(ix)=\cosh x\text{、}\ \sin(ix)=i\sinh x\text{，}$$

那麼，羅氏平面中的相應公式可寫爲：

$$\begin{aligned}
\cosh\frac{a}{k} &= \cosh\frac{b}{k}\cdot\cosh\frac{c}{k}-\sinh\frac{b}{k}\cdot\sinh\frac{c}{k}\cdot\cos A\text{，}\\
\frac{\sin A}{\sinh(a/k)} &= \frac{\sin B}{\sinh(b/k)}=\frac{\sin C}{\sinh(c/k)}\text{，}\\
\cos A &= -\cos B\cos C+\sin B\sin C\cosh(\frac{a}{k})\text{。}
\end{aligned}$$

羅巴切夫斯基在他的文章中並沒有使用雙曲函數 $\cosh x$ 和 $\sinh x$，

而使用他所引進的函數 $\pi(x)$ 和三角函數的組合。類似於 $\frac{1}{r^2}$ 表示球面的曲率，我們把 $-\frac{1}{k^2}$ 叫作羅氏平面的曲率。以上的推導也可以說，羅巴切夫斯基爲什麼又把自己的新幾何學叫“虛幾何學”，它的引入正像數系中虛數的引進一樣。

羅巴切夫斯基從以上事實中看到他所發現的幾何學的無矛盾性。事實上，如果採用下列方法，可以使這種思想變得極其嚴格：在歐氏空間中引進虛點，產生所謂複歐氏空間，在這種空間中規定純虛半徑的球面，並在這種球面討論具有實直角坐標 x 和 y 以及純虛坐標 z 的點集[5]。這種空間裡的虛半徑的球面顯然是雙葉雙曲面，它的每一葉都是羅氏平面的模型，這模型的結構證明它本身是無矛盾的[6]。

羅巴切夫斯基否定了歐幾里得平行公設，但是並沒有發生任何矛盾，因此他得出“歐氏幾何不是唯一可想像的幾何學”的結論。但是，他始終認爲“不應該信賴天賦的感覺所產生的概念”，因此提出通過實驗來確定哪一種幾何學在現實中成立。於是，他決定在非常大的三角形中測量各角，考慮由地球在它的軌跡上兩個對徑點和天狼星所組成的三角形，他根據當時最新的天文曆法計算，確定這個三角形的一個角是直角，另一個角則是平行角。測量結果發現，該三角形的內角和不等於 π，它與 π 有一個小的偏差，但是這個偏差小於當時所允許的觀察誤差。所以他認爲現實世界可能是歐氏幾何的。這就解釋了他爲什麼在 1826 年的報告中附有“平行線定理的一個嚴格證明”。儘管如此，他認爲可以規定上述偏差的大小，然後在此基礎上建立新的平行線理論。羅巴切夫斯基在他後來的《具有完善的平行線理論的新幾何學

[5]複歐氏空間的這種點集最早由 H. 閔科夫斯基 (Minkowski) 在 1908 年結合愛因斯坦相對論而討論的，現在稱之爲僞歐氏空間。

[6]這就是 1887 年 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 提出的模型。

原理》中預言， 他的幾何學會在 “分子引力的密接球面上” 得到應用。

幾乎與羅巴切夫斯基同時， 匈牙利數學家 J. 波爾約 (János Bolyai) 也發現了平行公設的不可證明性和非歐幾何的原理， 並在 1832 年， 把他的發現作爲附錄發表在他父親 F. 波爾約 (Farkas Bolyai) 的幾何著作中。 F. 波爾約把這個附錄寄給高斯評閱， 高斯認爲這個青年 “有極高的天才”， 但是他不能稱讚這項工作， 因爲那相當於稱讚他自己， J. 波爾約的發現與他自己四十年來 (1792 年以來) 思考所得的結果不約而同。 高斯的態度對 J. 波爾約無疑是一個沉重的打擊， 從此他再沒有做進一步的研究。 至於高斯本人， 雖然比較早地得到了非歐幾何的要領， 但他過於小心謹慎， 怕引起 “蠢人的叫喊”， 而生前沒有公開發表過有關論著。

因此， 雖然現在一般認爲非歐幾何是由這三位學者彼此獨立地發現的， 但就發表的時間之早， 論證的完整和內容的豐富， 以及對新幾何學始終不渝的捍衛來說， 要首推羅巴切夫斯基。

羅巴切夫斯基幾何的確認

羅巴切夫斯基的發現在他生前沒有得到社會的公認。 前面已經提到， 他在 1826 年的報告沒有引起任何人的興趣， 當他的報告送交評委會審閱時， 沒有人能作出結論。 1832 年， 他把 “論幾何學原理” 一文送交聖彼得堡科學院， 由數學家 M. B. 奧斯特羅格拉茨基 (Остроградский) 審查， 可是這位著名的學者對羅巴切夫斯基的發現很不理解， 他在 1832 年 11 月 7 日對這篇論文給科學院一個很不公正的答復， 其結論是：“羅巴切夫斯基先生的論著不值得科學院去注意。” 奧斯特羅格拉茨基還在 1834 年出版了一本嘲笑羅巴切夫斯基論文的小册子。 高斯雖然十分欣賞羅巴切夫斯基 1840 年用德文寫的非歐幾何著作， 還專門學俄文來讀他的原著， 但他生前沒有公開發表過對非歐幾何的支持意見。

高斯去世不久，1860－1865 年，他的通信錄發表，他在給天文學家 H.K. 舒馬赫爾 (Schumacher) 的信中對羅巴切夫斯基的《平行線理論的幾何研究》推崇備至，從此羅巴切夫斯基的發現才逐漸引起數學界的重視。1866 年在波爾多和巴黎出版了由 G.J. 烏埃爾 (Hoüel) 翻譯《平行線理論的幾何研究》的法文譯本，附有高斯與舒馬赫爾通信的摘錄。不久，此書被譯成俄文在莫斯科的一家雜誌上發表。評論羅巴切夫斯基的生活和貢獻的文章也開始出現。

但是，羅氏幾何的眞正確認是在 1868 年。這一年，義大利幾何學家 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 發表了著名的論文 "非歐幾何解釋的嘗試"(*Saggio di interpretarione della geometria non euclidea*，*Giornale di Matem.*，Vol. 6，284－312，1868)。在此篇文章中，貝爾特拉米從波蘭 (－俄國) 數學家 F. 明金 (Minding) 的工作出發，給出了羅氏幾何的直觀解釋。明金在 1839 年的文章中證明：如果兩個曲面有相等的常曲率，那麼可以把其中一個等距映射到另一個上。他雖然研究了負常數曲率的曲面，但沒考慮到它和羅氏平面的關係。貝爾特拉米通過計算，發現羅氏平面的高斯曲率處處相等，都等於 $-\dfrac{1}{k^2}$ (此處 k 即前文中出現的常數，也稱羅氏幾何的參數)。這表明羅氏平面可以看作是負常數曲率的曲面，因此羅氏幾何應該與負常數曲率的曲面的幾何相符合。爲此，他效仿明金，考慮由一條曳物線繞其漸近線旋轉而生成的僞球面 (圖 4)，這是一個負常數曲率的曲面。在某些約定下，貝爾特拉米建立了該僞球面與局部羅氏平面間的等距關係。也就是說，對於羅氏平面的部分區域來說，羅氏幾何的每一種論斷，都有僞球面內蘊幾何的直接事實。羅氏幾何

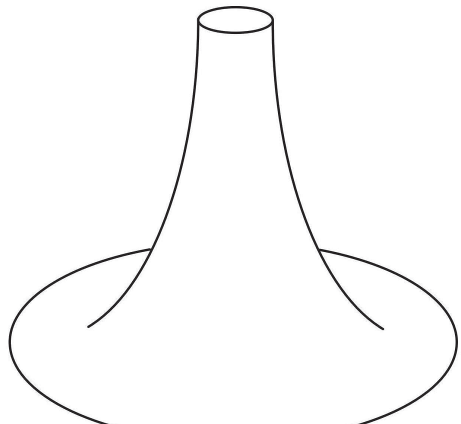

圖 4

正是僞球面上抽象地敍述的歐氏幾何學。

貝爾特拉米還證明，整個羅氏平面的幾何以在歐氏平面上一個圓的內部實現。在僞歐氏空間中，把一個虛半徑的半球面從其中心投影到與這球相切的歐氏平面上，就可以導出他的這種解釋。但是貝爾特拉米沒有建立任意兩點間的距離公式，也沒有搞淸如何表示羅氏平面的運動。

整個羅氏平面的幾何模型是由德國數學家 Ch. F. 克萊因 (Klein) 建立的。1871 年，這位年輕的學者在研究報告 "論所謂非歐幾何"(*Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*) 中，拓廣了英國數學家 A. 凱萊 (Cayley) 在 1859 年提出的射影度量的概念[7]，建立了射影度量與非歐氏幾何的關係。他指出，歐氏幾何與非歐氏幾何都可以用純射影的方法構造出來，並提供了羅氏幾何的所謂射影模型。按照克萊因的方法，羅氏平面可看作射影平面上一個圓錐曲線的內部，當這圓錐曲線是圓時，羅氏平面在射影平面上的表示與貝爾特拉米的解釋相同。根據這種表示，羅氏平面上的點是圓內的點，直線是圓的弦，平行線由相交於圓周上的弦來表示，發散直線由不相交的弦表示 ··· 等等。克萊因給出了兩點間的距離和角的大小的射影定義，使圓內部的點、弦以及其它圖形滿足羅氏幾何的公理。這樣一來，所有羅氏幾何中的論斷都是歐氏幾何中的定理。因而，羅氏幾何的相容性歸結爲歐氏幾何的相容性，對高維羅氏空間也有同樣的解釋。

1882 年，法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 聯繫自守函數的研究，給出了另一種模型，也證明了羅氏幾何的相容性。他仍取圓的內部作爲羅氏平面，但卻把垂直於已知圓周的圓弧看作直線，運動是把圓變成自身的反演。1887 年龐加萊提出了羅氏幾何的第二種解釋，羅氏平面用雙葉雙曲面表示，就是前文提到的虛半徑的半球面。

[7]他的 "關於代數形式的第六篇論文"(*Sixth memoir upon quantics*) 爲射影度量理論奠定了基礎。

C.F.B. 黎曼 (Riemann) 對羅氏幾何的發展也做出了重要貢獻。他在 1854 年的就職演說 “論作爲幾何學基礎的假設” (*Über die Hypothesen*， *welche der Geometrie zu Grunde liegen*) 中， 發揚了高斯關於曲面的微分幾何的研究， 建立了黎曼空間的概念， 並把歐氏幾何和羅氏幾何包羅在他的體系之中。 正常數曲率的黎曼空間 (即黎曼橢球空間)， 可由某個球面上的幾何表示， 羅氏平面顯然是負常數曲率的黎曼空間。 克萊因在 1871 年的論文[8]中， 發揮了上述思想， 對所有的幾何學進行綜合表述， 稱負常數曲率的曲面上的羅氏幾何爲雙曲幾何， 正常數曲率的曲面上的黎曼幾何爲橢圓幾何， 歐氏幾何爲拋物幾何。 在 1872 年克萊因的《新幾何研究的比較分析》(*Vergleichende Betrachtungen Über neuere geometrische Forschungen*， 即著名的《埃朗根綱領》) 中， 他又從變換群的觀點出發， 對各種幾何進行分類。 每種幾何都由變換群所刻劃， 可以看做是某種變換群的不變量理論。

以上這些工作不僅使羅氏幾何最終獲得普遍承認， 而且使人們認識到這項最富革命性的創造的歷史意義。 羅氏幾何的創立， 打破了兩千多年來歐氏幾何的一統天下， 從根本上革新和拓廣了人們對幾何學觀念的認識， 爲幾何學乃至整個數學及其應用開闢了嶄新的途徑。 羅氏幾何的創立， 還導致幾何學基礎的深入研究。 1899 年 D. 希爾伯特 (Hilbert) 建立了歐氏幾何的公理體系， 這種研究方法很快擴展到許多數學分支， 形成了現代數學的公理化運動。 羅氏幾何的創立對本世紀初物理學中所發生的時空觀念的改革也起了重大作用。 羅氏幾何首先提出了彎曲的空間， 它爲更廣泛的黎曼幾何的產生創造了前提， 而黎曼幾何後來成爲愛因斯坦廣義相對論的數學工具。 人們在廣義相對論的基礎上研究宇宙結構， 發現宇宙結構更接近於羅氏幾何， 所以許多人採用羅氏幾何作爲宇宙的幾何模型。

---

[8]即 “論所謂非歐幾何”。

文　　獻

原始文獻

[1] Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, М. -Л., Изд. АН СССР, 1946－1951, т. 1－5。

[2] Материалы для Биографии Н. И. Лобачевского, Собрал и редактировал Л. Б. Модзалевский, Изд, АН СССР, М. -Л., 1948。

研究文獻

[3] B. A. Rosenfeld, *N. Lobachevsky*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 428－435。

[4] Б. А. Лаптев, Н. И. Лобачевский, БСЭ, Издание второе, 1950－1958, т. 25, стр. 314－317。

[5] Б. А. Розенфельд, Интерпретации геометрии Лобачевского, Историко-математические исследования, вып. IX, стр. 169－208, Москва, 1956。

[6] В. Каган, Великий руский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке, изд. 2, М. -Л.,1948。

[7] А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Математика XIX века, Изд. Наука, Москва, 1981。