劉　維　爾

劉維爾，J. (Liouville，Joseph) 1809 年 3 月 24 日生於法國加來海峽省聖奧梅爾 (Saint-Omer)；1882 年 9 月 8 日卒於巴黎。數學。

劉維爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Liouville.html

劉　維　爾

李　旭　輝
(華東師範大學)

邵　明　胡
(遼寧師範大學)

劉維爾，J. (Liouville，Joseph) 1809 年 3 月 24 日生於法國加來海峽省聖奧梅爾 (Saint-Omer)；1882 年 9 月 8 日卒於巴黎。數學。

劉維爾的父親克勞德－約瑟夫・劉維爾 (Claud-Joseph Liouville) 是陸軍上尉，母親名叫泰雷茲・巴朗 (Thérése Balland)。劉維爾是他們的次子，幼時先後就學於科梅西和土爾。1825 年他來到巴黎綜合工科學校學習，A.M. 安培 (Ampère) 擔任分析與力學課的老師，兩人曾共同探討電動力學問題。他於 1827 年 11 月轉入橋樑與公路學校，1831 年獲學士學位。

畢業後不久，他辭去了在伊澤爾省的工程師職務，期望得到一份教職，以便專心從事學術工作。1831 年 11 月，他被綜合工科學校教育委員會選爲 L. 馬蒂厄 (Mathieu) 的分析與力學課助教，由此開始了自己近五十年的科學研究生涯。

1833－1838 年間，劉維爾曾在成立不久的中央高等工藝製造學校講授數學和力學，但內容均爲初級的。爲了使自己的教學工作能夠保持在大學水準上，他在 1836 年攻取了博士學位，論文題爲 “關於函數或其一部分的正弦與餘弦級數展開式” (*Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus*)，探討了傅里葉級數及其在各種力學、物理學問題中的應用，於同年在巴黎成書出版。

爲了適應法國數學研究的需要，劉維爾在 1836 年 1 月創辦了《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de mathématiques pures et appliquées*)，並親自主持了前 39 卷的編輯出版工作 (第 1 輯，1－20

卷，1836－1855；第 2 輯，1－19 卷，1856－1874 年)。該雜誌刊登純粹、應用數學領域所有分支的論文，記錄了十九世紀中期的四十年裡數學活動的一部分重要內容，被後人稱爲《劉維爾雜誌》(*Liouville's Journal*)。

劉維爾不僅與當時一些重要的數學家保持著密切聯繫並定期發表他們的成果，而且熱心地對年輕學者進行指導，爲他們發表著作提供機會。最值得一提的當屬他編輯發表 E. 伽羅瓦 (Galois) 的文章。1832 年 5 月，伽羅瓦在決鬥中被殺，劉維爾整理了他的部分遺稿並刊登在 1846 年的《純粹與應用數學雜誌》上，他在代數方面的獨創性工作才得以爲世人所知。

1838 年，劉維爾接替馬蒂厄成爲綜合工科學校的分析與力學課教席，一直工作到 1851 年他轉入法蘭西學院任數學教席爲止。1839 年 6 月和 1840 年，他又先後被推舉爲巴黎科學院天文學部委員會和標準計量局成員，定期參與這兩方面的活動。

劉維爾的學術活動在法國革命期間稍有中斷。1848 年 4 月 23 日，他入選立憲會議，是默爾特行政區的代表之一，次年 5 月競選議員失敗，他的政治活動遂告結束。

1851 年來到法蘭西學院後，劉維爾的教學工作相當自由，有更多的時間展開自己的研究工作，廣泛與他人探討。他在此職位上一直工作到 1879 年。不過從 1874 年他退出《純粹與應用數學雜誌》的編輯工作後，但不再發表著作，也很少參與法國學術界的活動了。

劉維爾一生勤於學術工作，生活淡泊寧靜，每年都要回到家鄉土爾的舊居休假。他在 1830 年與表親馬里耶－路易絲•巴朗 (Marie-Louise Balland) 結婚，生有三女一子。

劉維爾的主要學術成就如下：

1. 函數論

劉維爾認真研究了 G.W. 萊布尼茨 (Leibniz)、約翰•伯努利

(Johann Bernoulli) 和 L. 歐拉 (Euler) 的著作。 他在早期工作中儘可能地擴展微分和積分的概念， 尤其是建立任意階導數的理論。 他給出如下公式：

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu} e^{mx} = m^\mu e^{mx} \text{，}$$

這裡 μ 爲複數時亦成立。 在證明了任意函數 $f(x)$ 均可展爲指數級數

$$f(x) = \sum_i A_i e^{m_i x}$$

之後， 他定義 f 的 μ 階導數如下：

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu} f(x) = \sum_i A_i m_i^\mu e^{m_i x} \text{。}$$

應用這個定義， 劉維爾處理了初等函數的指數級數展開式及其任意階導數。 例如， 他給出

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{n-1} d\alpha \quad (n > 0) \text{，}$$

其導數爲

$$\begin{aligned} \frac{d^\mu}{dx^\mu} \left(\frac{1}{x^n} \right) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty (-1)^\mu \alpha^{\mu+n-1} e^{-\alpha x} d\alpha \\ &= (-1)^\mu \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} \frac{1}{x^{n+\mu}} \quad (n + \mu > 0) \end{aligned}$$

儘管這些定義與方法並不具普遍的適用性， 函數的展開式也未必總是收斂， 但這是走向泛函分析的早期努力之一， 表明了劉維爾處理當時分析學的精湛技巧。

1832 年 12 月 7 日和 1833 年 2 月 4 日， 劉維爾先後向巴黎科學院提交兩篇論文， 對代數函數和超越函數進行了分類， 以此整理 N.H. 阿貝爾 (Abel)、 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 等人關於橢圓積

分的表示和有理函數的理論。 在此基礎上， 他於 1834 年給出了初等函數的分類：

有限個複變量的代數函數爲第 0 類初等函數； e^z 和 $\log z$ 爲第 1 類初等函數； 二者合稱爲最多第 1 類初等函數。 若已定義最多第 $n-1$ 類初等函數， 則它與最多第 1 類初等函數的複合稱最多第 n 類初等函數。 是最多第 n 類而非最多第 $n-1$ 類的初等函數稱第 n 類初等函數。

初等函數的積分在何條件下仍爲初等函數， 也是他著重討論的問題。

劉維爾涉足科學領域之際， 由阿貝爾和 C. 雅可比 (Jacobi) 所建立的橢圓函數理論正處於蓬勃發展時期。 1844 年 12 月， 劉維爾在給巴黎科學院的一封信中說明了如何從雅可比的定理 (單變量單值亞純函數的週期個數不多於 2， 週期之比爲非實數) 出發， 建立雙週期橢圓函數的一套完整理論體系。 這是對橢圓函數論的一個較大貢獻。 圍繞雙周期性， 劉維爾展示了橢圓函數的實質性質， 提出如下定理：

劉維爾第一定理　在一個週期平行四邊形內沒有極點的橢圓函數是常數；

劉維爾第二定理　橢圓函數在任一週期平行四邊形內的極點處殘數之和爲 0；

劉維爾第三定理　n 階橢圓函數在一個週期平行四邊形內取任一値 n 次；

劉維爾第四定理　在一週期平行四邊形內零點之和與極點之和的差等於一個週期。

後來， 到巴黎訪問的兩位德國數學家 C.W. 博查特 (Borchardt) 和 F. 約赫姆塔爾 (Joachimsthal) 向劉維爾詳細請教了他的工作情況， 而 1850 − 1851 年劉維爾在法蘭西學院講授的雙週期函數課程， 也在C.A. 布里奧 (Briot) 與 J.-C. 布凱 (Bouquet) 所著《 雙週期

函數論》(*Théorie des fonctions doublement péiodiques*， 1859) 一書中得到系統介紹。 因此， 儘管劉維爾的有關結論很少發表， 仍能在法國內外迅速傳播並產生影響。

雙週期函數的講義後來發表在 1880 年第 88 卷的德國《純粹與應用數學雜誌》(*Journal für de reine und angewandte Mathematik*) 上。

2. 微分方程與積分方程

十九世紀， 隨著各種曲線坐標系的引入和新的函數類如巴塞耳 (Bessel) 函數、 勒讓德 (Legendre) 多項式等作爲常微分方程的特徵函數而興起， 確定帶邊界條件的常微分方程的特徵值與特徵函數， 便成爲日益突出的重要問題。 劉維爾和他的朋友、 力學教授 C. 斯圖姆 (Sturm) 在三十年代鑽研了這類問題。

他們考慮由變密度棒的熱傳導過程引出的二階常微分方程：

$$\begin{aligned}(k(x)V'(x))' + (g(x)r - l(x))V(x) &= 0\text{，} \ x \in (a,b)\\ k(a)V'(a) - hV(a) &= 0\text{，}\\ k(b)V'(b) + HV(b) &= 0\text{，}\end{aligned}$$

其中 $k(x)$、 $g(x)$、 $l(x)$ 是正值函數， h 與 H 爲非負常數， r 爲參數。

劉維爾採用逐次逼近法表達其解：

$$\begin{aligned}P_0(x) &= A\left(1 + hk(a)\int_0^x \frac{dt}{k(t)}\right)\text{，}\\ &\cdots\cdots\\ P_{n+1}(x) &= \int_a^x \frac{dt}{k(x)}\int_a^x (l(s) - g(s)r)P_n(s)ds\text{，}\end{aligned}$$

並用兩種不同的方法證明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(x)$ 收斂到原方程的解 $V(x)$。 這樣， 就得到了關於微分方程解的存在性的第一條定理， 它發表在

1838 年 3 卷 1 期的《純粹與應用數學雜誌》上。 逐次逼近法成爲求解常微分方程的一種典型方法， 上述邊值問題則被稱爲斯圖姆－劉維爾問題。

隨後， 兩人著眼於更一般的二階微分方程

$$Ly'' + My'' + \lambda Ny = 0，$$

其中 L、 M 、 N 是 x 的連續函數， λ 是參數。 它可以改寫成

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + \lambda\rho(x)y = 0，\ p(x) > 0，\ \rho(x) > 0$$

他們證明了下列基本結果：

(1) 僅當 λ 取遞增到 $+\infty$ 的正數序列 $\{\lambda_n\}$ 的任一值時， 原問題才有解；

(2) 對每一 λ_n，解是一函數 V_n 的倍數，而 V_n 可用條件 $\int_a^b \rho V_n^2 dx = 1$ 加以規範化；

(3) $\{V_n\}$ 在 $a \le x \le b$ 上組成具有權函數 $\rho(x)$ 的一個正交函數系 $\int_a^b \rho V_m V_n dx = 0$， $m \neq n$。

後來， 在法蘭西學院的教學中， 劉維爾又引入了伴隨邊值條件 (adjoint boundary values) 的概念， 將斯圖姆－劉維爾理論尤其是斯圖姆關於特徵函數的有關結論推廣到非自伴隨高階方程上。

劉維爾在擴展導數定義時，除了將被導函數先展開爲指數級數， 還利用過拉普拉斯積分展開式的方法：

$$f(x) = \int g(t)e^{-xt}dt 。$$

在證明了

$$\int^{\mu} F(x)dx^{\mu} = \frac{d^{-\mu}}{dx^{-\mu}}F(x) = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} F(x-\alpha)\alpha^{\mu-1}d\alpha$$

等幾個重要公式後， 劉維爾展示了如何用其解決幾何 、 力學問題中產生的積分方程： 把積分方程變成求導問題， 最後得到的微

分方程是可解的。 在這裡， 劉維爾所處理的主要是形如 $F(x) = \int_a^\infty k(x,\ t)\phi(t)dt$ 的積分方程， 被 D. 希爾伯特 (Hilbert) 稱爲第一類積分方程。

在斯圖姆 − 劉維爾理論中涉及的則是另一種不同類型的方程， 即希爾伯特第二類積分方程。 它有如下形式：

$$F(x) = \phi(x) + \int_0^x k(x,t)\phi(t)dt \text{。}$$

通過解積分方程得到微分方程的解， 這是斯圖姆 − 劉維爾理論最有意義的一點。 而微分方程與積分方程之間的內在聯繫通過劉維爾的上述努力也愈加清晰了。

1845 年底， 劉維爾在《純粹與應用數學雜誌》上發表短篇註記 “一類函數的一種一般性質” (*Sur une propriété génerale d'une classe de fonctions*)， 研究了特徵值方程

$$\int_D l(x)T(x,x')\lambda(x')dx' = m\lambda(x) \text{，}$$

其中 l 爲定義於 R^n 子集 D 上的實值函數，T 爲 $D \times D$ 上的對稱多項式。 註記中證明了兩條定理：

(1) λ_1 、 λ_2 是對應於互異特徵值 m_1 、 m_2 的特徵函數 (即原方程的解)， 則成立正交關係：

$$\int_D l(x)\lambda_1(x)\lambda_2(x)dx = 0 \text{。}$$

(2) 若 l 恆正， 則所有特徵值均爲實數。

進一步， 劉維爾還指出了利用正交關係將任意函數展成傅里葉級數的可能性。 雖然這些結論不如後來希爾伯特、 E. 施密特 (Schmidt) 等人的結果那樣深刻， 卻表明了劉維爾最早意識到這類積分方程的重要性， 並在積分方程理論研究工作由特殊走向一般的過程中邁出了第一步。

3. 數論

劉維爾對數論問題產生興趣是由費馬大定理開始的。1840 年，他將費馬問題作了轉化，證明方程 $u^n + v^n = w^n$ 的不可解性意味著 $z^{2n} - y^{2n} = 2x^n$ 的不可解性。

在劉維爾之前，代數數與超越數的區別已經非常清楚了，但超越數的存在性問題遲遲沒有結果，e、e^2、π 及 π^2 等無理數究竟是否爲超越數也一直吸引著數學家們的注意力。1840 年，劉維爾證明了 e 不是任何二次或四次多項式方程的根，接著又試圖採取 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 的方法，用連分數逼近多項式的根，來證明 e 的超越性。這一嘗試未能奏效，然而他從中意識到，若不可約有理數 $\dfrac{p}{q}$ 是 n 次代數無理數 x 的近似值，則存在正數 C，使得

$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{C}{q^n}\text{。}$$

這表明，若 x 爲一 n 次代數無理數，則必存在正數 C，使 $|x - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{C}{q^k}$ 在 $k \le n$ 時無整數解 p、q。因此，對固定的 C，若上述不等式對每一正整數 K 均有解 $\dfrac{p}{q}$，則 x 是超越數。劉維爾於 1844 年證明了形如 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$ 的任何一個無理數均爲超越數。這類超越數被稱爲 "劉維爾數"。至此，超越數的存在性問題得到了解決。

從 1856 年開始，劉維爾放棄了在其它方面幾乎所有的數學研究，而把精力投入到數論領域。十年前，他在《純粹與應用數學雜誌》上發表了十八篇系列註記和近二百篇短篇註記，前者未加證明地給出了許多一般公式，爲解析數論的形成奠定了基礎，後者由個別地討論了質數性質和整數表示爲二次型的方法等特殊問題。

4. 其它

1836 年， 劉維爾與斯圖姆共同給出了關於代數方程虛根數目的柯西定理的證明； 次年， 他又用不同於阿貝爾的方法， 解決了二元代數方程組的消元問題。 這些都被 J.A. 塞瑞特 (Serret) 收入了他編寫的《 高等代數教程 》(*Cours d'Algèbre superieure*) 第四版 (1877)， 得以在法國的學校中廣泛傳播。

爲了發表伽羅瓦的著作， 劉維爾從 1843 到 1846 年對其手稿進行了徹底的研究。 在他爲伽羅瓦的著作發表所寫的導言中， 對伽羅瓦的工作給予了高度評價。 他還邀請包括塞瑞特在內的一些朋友， 參加關於伽羅瓦工作的系列演講。 因此可以說， 劉維爾間接地推動了近世代數學和群論的發展。

在幾何學方面， 劉維爾於 1841 年和 1844 年用消去理論證明並推廣了 M. 夏斯萊 (Chasles) 建立的曲線和曲面的度量性質， 還發現一種新方法， 以確定任意橢圓曲面的測地線， 這是雅可比在研究雙曲超越數時引出的問題。 1850 年他負責出版了 G. 蒙日 (Monge) 的著作《 分析在幾何中的應用 》(*Application de l'analyse à la géométrie*) 第五版， 在書末附上了 C.F. 高斯的名著 "關於曲面的一般研究" (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*) 和他本人寫的七篇註記。 這些註記涉及曲線及其相對曲率和測地曲率、 測地線方程、 總曲率概念等。

劉維爾還有少量文章涉及熱理論、 電學、 天體力學和理論力學等問題。

文　　獻

原始文獻

[1] *The Royal Society, Catalogue of Scientific*, IV (1870), VIII (1879), X (1894), 收錄了劉維爾的大部分論文, 共約四百多篇。

[2] *Bibliothèque de l'Institut de France, Liouville's Nachlass (Ms.* 3615 − 3640*)*, 包括劉維爾未發表過的 340 本註記和一些論文。

[3] J. Liouville, *Résumé des leçons de trigonométrie*, 見 *Notes pour le cours de statique*, Paris。

[4] J. Liouville, *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, Jour. Ec. Polyt., 13 (1832), 71－162。

[5] J. Liouville, *Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires, et sur le développement des fonctions en séries*, Jour. Math. Pures Appl., 3 (1838), 561－614。

[6] J. Liouville, *Sur les classes très-étendues de nombres dont la valeur n'est ni algébrique, ni nême réductible à les irrationnelles algébriques*, Jour. Math. Pures Appl., 16 (1851), 133－142。

研究文獻

[7] G. Chrystal, *Joseph Liouville*, Proc. Edinbragh Roy. Soc., 14 (1888), 83－91。

[8] G. Loria, *Le mathêmaticien J. Liouville et ses oeuvres*, Archeion, 18 (1936), 117－139 (英譯文： *J. Liouville and his work*, Scripta mathematica, 4 (1936), 147－154, 257－263, 301－306)

[9] C.C. Gillespie, *Joseph Liouville*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. 8, 1973, 381－387。

[10] J. Lützen, *Joseph Liouville (*1809－1882*), Master of pure and applied mathematics*, Springer–Verlag, 1990。