魏 爾 斯 特 拉 斯

魏爾斯特拉斯，K.W.T. (Weierstrass，Karl Theodor Wilhelm) 1815 年 10 月 31 日生於德國威斯特伐利亞 (Westphalia) 地區的奧斯登費爾特 (Ostenfelde)；1897 年 2 月 19 日卒於柏林。數學。

魏爾斯特拉斯之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weierstrass.html

魏 爾 斯 特 拉 斯

沈 永 歡

(北京工業大學)

魏爾斯特拉斯， K.W.T. (Weierstrass， Karl Theodor Wilhelm) 1815 年 10 月 31 日生於德國威斯特伐利亞 (Westphalia) 地區的奧斯登費爾特 (Ostenfelde)； 1897 年 2 月 19 日卒於柏林。 數學。

魏爾斯特拉斯的父親威廉 (Wilhelm) 是一名政府官員， 受到高等教育， 頗具才智， 但對子女相當專橫。 魏爾斯特拉斯十一歲時喪母， 翌年其父再婚。 他有一弟二妹； 兩位妹妹終身未嫁， 後來一直在生活上照料終身未娶的魏爾斯特拉斯。

由於其父多次遷居， 魏爾斯特拉斯上過幾所小學。 1829 年， 他考入帕德博恩的天主教文科中學。 該校創建於公元 820 年， 歷史悠久。 他成績優異， 年年得獎， 在拉丁文、 希臘文、 德文和數學四科中， 表現尤其出色。 1834 年夏畢業時， 他是獲得甲等畢業文憑的三人之一。

威廉要孩子長大後進入普魯士高等文官階層， 因而於 1834 年 8 月把魏爾斯特拉斯送往波恩大學攻讀財務與管理， 使其學到充分的法律、 經濟和管理知識， 爲謀得政府高級職位創造條件。

魏爾斯特拉斯不喜歡父親所選專業， 於是把很多時間花在大學生自由自在的放縱生活上， 例如擊劍、 宴飲、 夜遊。 他在這些方面也是首屈一指的。 他的專業興趣在於數學。 當時 J. 普呂克 (Plücker) 在波恩執教， 但他忙於各種事務， 不可能抽暇進行個別教學， 所以魏爾斯特拉斯從他那裡獲益不多。

在校期間， 魏爾斯特拉斯研讀過 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的

《天體力學》(*Mecanique céleste*) 以及 C.G.J. 雅可比 (Jacobi) 的《橢圓函數新理論基礎》(*Fundamenta nova theorie functionum ellipticarum*)。 前者奠定了他終生對於力學和微分方程論感興趣的基礎; 後者對他當時的數學水準稍難了些。 他還鑽研過 J. 施泰納 (Steiner) 的一些論文。 事實上, 後來他成爲施泰納數學論著的編纂者。 不過, 這段時間中 N.H. 阿貝爾 (Abel) 是他最大的鼓舞泉源。 他在晚年致 S. 李 (Lie) 的信中曾說, 在 1830 年的《克列爾雜誌》(*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*) 上讀到阿貝爾致 A.M. 勒讓德 (Legendre) 的信,"在大學生涯中對我無比重要。 從確定 $\lambda(x)$ (這是阿貝爾引進的函數) 滿足的微分方程來直接導出該函數的表示形式, 這是我爲自己確立的第一個數學課題; 我有幸得到了這個問題的解, 這促使我下定決心獻身數學。 我是在第七學期作出這個決定的。" 這就是說, 約在 1837 年底, 他立志終生研究數學。 1838 年秋, 他令人驚訝地放棄成爲法學博士候選人, 因此在離開波恩大學時, 他沒有取得學位。

四年大學, 耗費巨大, 未得學位而歸, 自然使父親極度不滿。 幸虧父親的一位愛好數學的朋友出來調解, 建議把魏爾斯特拉斯送到明斯特附近的神學哲學院, 然後參加中學敎師任職資格國家考試。 魏爾斯特拉斯遂於 1839 年 5 月 22 日在該院註册。 他在該院遇見了使他終身銘記的 C. 古德曼 (Gudermann)。 古德曼熱衷於研究橢圓函數, 其基本思想是把函數展開爲冪級數, 這正是魏爾斯特拉斯的解析函數論的基石。 1839 − 1840 學年上學期, 聽古德曼第一堂課的有十三人, 可是第二堂起只剩下魏爾斯特拉斯一人, 師生促膝談心, 相處融洽。 古德曼還爲這位唯一的學生講授解析球面幾何學。

1840 年 2 月 29 日, 魏爾斯特拉斯報名參加國家考試, 考試分筆試、口試兩部分。 他有半年時間就主考指定的三個論題寫作論文。 古德曼應魏爾斯特拉斯的請求爲筆試出一個很難的數學

問題： 求橢圓函數的冪級數展開式。 他對自己學生所寫的論文給予高度評價， 說所提問題對 “一位年輕的分析學者來說是很難的”， 但論文表明作者 “足以列入戴以榮譽桂冠的發現者隊伍之中”，“爲作者本人， 也爲科學進展著想， 我希望他不會當一名中學教師， 而能獲得更爲有利的條件， …… 以使他得以進入他確定有權躋身其中的著名科學發現者隊伍之中。” 可惜學院負責人十分保守， 對這一評價未予重視。

1841 年 4 月， 魏爾斯特拉斯通過口試；1841 年秋至 1842 年秋在明斯特文科中學見習一年。 1840 年至 1842 年間， 他寫了四篇直到他的全集刊印時才問世的論文 “關於模函數的展開”、“單複變量 (其絕對值介於給定的兩個界限之間) 解析函數的表示”、“冪級數論” 和 “藉助代數微分方程定義單變量解析函數”。 這些早期論文已顯示了他建立函數論的基本思想和結構， 其中有用冪級數定義複函數， 橢圓函數的展開， 圓環內解析函數的展開 [早於 P.A. 洛朗 (Laurent) 兩年]， 冪級數係數的估計 [獨立於 A.L. 柯西 (Cauchy)]， 均勻收斂概念以及解析開拓原理。

1842 年秋， 魏爾斯特拉斯轉至西普魯士克隆的初級文科中學。除數學、 物理外， 他還教德文、 歷史、 地理、 書法、 植物， 1845 年還教體育! 繁重的教學工作使他只能在晚上鑽研數學。科研條件極差： 鄉村中學沒有像樣的圖書館； 校內沒有可以與之討論的同事； 經濟拮据， 無力訂閱期刊， 甚至付不出郵資。 或許這對他這樣自強不息的人也有好處， 可以潛心錘煉自己獨特的觀念和方法。 他曾在學校刊物上發表 “關於解析因子的註記”(文獻 [1]， 卷 1)。 此文表明以前研究同一問題的數學家未能洞察問題癥結何在。 但這種刊物上的文章當然不會引起世人注意。

1848 年秋， 魏爾斯特拉斯轉至東普魯士布倫斯堡的皇家天主教文科中學。 該校擁有較好的圖書館， 校長也很友善。 魏爾斯特拉斯在該校年鑒 (1848/49) 上發表了 “關於阿貝爾積分論”(文獻 1， 卷

1)， 這是一篇劃時代的論文， 可惜仍然無人覺察。

1853 年夏， 魏爾斯特拉斯在父親家中渡假， 研究阿貝爾和雅可比留下的難題， 精心寫作關於阿貝爾函數的論文。 這就是 1854 年發表於《克列爾雜誌》上的 “阿貝爾函數論”。 這篇出自一個名不見經傳的中學教師的傑作， 引起數學界矚目。 A.L. 克列爾 (Crelle) 說它表明作者已可列入阿貝爾和雅可比的最出色的後繼者行列之中。 J. 劉維爾 (Liouville) 稱它爲 “科學中劃時代工作之一”， 並立即把它譯爲法文刊載於他創辦的《純粹與應用數學雜誌》(*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*) 上。 雅可比的繼任者、 柯尼斯堡大學數學教授 F. 里歇羅特 (Richelot) 說服校方授予魏爾斯特拉斯名譽博士學位， 並親赴布倫斯堡頒發證書。 當時任《克列爾雜誌》主編的 C.W. 博查特 (Borchardt) 趕赴布倫斯堡向魏爾斯特拉斯致賀， 從此開始了兩人長達二十多年的友誼， 直至博查特謝世。

1855 年秋， 魏爾斯特拉斯被提升爲高級教師並享受一年研究假期。 1856 年 6 月 14 日， 柏林皇家綜合工科學校任命他爲數學教授； 在 E.E. 庫默爾 (Kummer) 的推薦下， 柏林大學聘任他爲副教授， 他接受了聘書。 11 月 19 日， 他當選爲柏林科學院院士。 1864 年成爲柏林大學教授。

在柏林大學就任以後， 魏爾斯特拉斯即著手系統建立數學分析 (包括複分析) 基礎， 並進一步研究橢圓函數論與阿貝爾函數論。 這些工作主要是通過他在該校講授的大量課程完成的。 幾年後他就名聞遐邇， 成爲德國以至全歐洲知名度最高的數學教授。 G. 米達格－萊弗勒 (Mittag–Leffler) 於 1873 年從瑞典去巴黎， 想在 C. 埃爾米特 (Hermite) 指導下研究分析。 可是埃爾米特對他說： “先生， 你錯了! 你應當到柏林去聽魏爾斯特拉斯講課。 他比我們都強。” 果然， 米達格－萊弗勒抵柏林後不久就作出了關於亞純函數的重要發現。

魏爾斯特拉斯於 1873 年出任柏林大學校長，從此成爲大忙人。除教學外，公務幾乎佔去了他全部時間，使他疲乏不堪。緊張的工作影響了他的健康，但其智力未見衰退。他的七十華誕慶典規模頗大，遍佈全歐各地學生趕來向他致敬。十年後八十大壽慶典更加隆重，在某種程度上他簡直被看作德意志的民族英雄。

魏爾斯特拉斯與 C. B. 科瓦列夫斯卡婭 (Ковалевская) 的友誼，是他後期生活中的一件大事。科瓦列夫斯卡婭於 1869 年秋在海德堡大學師事 L. 柯尼斯伯格 (Königsberger)。後者是魏爾斯特拉斯早期弟子之一，又善於宣揚其師的講授，這促使科瓦列夫斯卡婭大膽決定直接求助魏爾斯特拉斯，1870 年秋，年方二十、聰慧美麗的科瓦列夫斯卡婭見到了五十五歲的魏爾斯特拉斯。後者發現了她的優異天賦，試圖說服柏林大學評議會同意她聽課，但遭拒絕。於是他就抽出業餘時間爲她免費授課，每週兩次，一直持續到 1874 年秋。這期間他待她親如子女，並幫助她以關於偏微分方程的著名論文在格丁根取得學位。1888 年，科瓦列夫斯卡婭以剛體繞定點運動的研究獲得巴黎科學院大獎，對他是極大慰藉。兩年後她的去世則是對他的一個沉重打擊，以致他燒燬了她寫給他的全部信件以及他收到的不少其它書信。

1897 年初，魏爾斯特拉斯染上流行性感冒，後轉爲肺炎，終至不治，於 2 月 19 日溘然長逝，享年八十二歲。

除柏林科學院外，魏爾斯特拉斯還是格丁根皇家科學學會會員 (1856)、巴黎科學院院士 (1868)、英國皇家學會會員 (1881)。

魏爾斯特拉斯生前便決定在其學生協助下出版他本人的論著。1894 和 1895 年分別出版了他的全集的第 1、2 兩卷。按照他的遺願，1902 年首先出版了關於阿貝爾函數論的第 4 卷，1903 年出了第 3 卷。第 5 卷是《橢圓函數論講義》，第 6 卷是《橢圓函數論在幾何與力學中的應用》，出版於 1915 年。1927 年出版了

第 7 卷《變分法講義》。原定第 8－10 卷是他關於超橢圓函數的工作、《橢圓函數論講義》第二版和函數論，但迄今仍未問世。全集前三卷共收論文 (其中有一部分講演) 六十篇。他致 P. 杜布瓦－雷蒙 (Du Bois–Reymond)、L. 富克斯 (Fuchs) 和柯尼斯伯格的一些信件，發表於《數學學報》(*Acta Math*，1923)。

數學分析算術化的完成者

魏爾斯特拉斯在數學分析領域中的最大貢獻，是柯西、阿貝爾等開創的數學分析嚴格化潮流中，以 $\epsilon-\delta$ 語言，系統建立了實和複分析的嚴謹基礎，基本上完成了分析的算術化。然而，由於他是通過課堂講授完成這一任務的，沒有發表有關論著，所以對研究他在這一領域的工作帶來了困難。

實數論

魏爾斯特拉斯很早就認識到，爲使分析具備牢靠的基礎 (例如無懈可擊地證明連續函數的性質)，必須建立嚴格的實數論。他於 1857 年開始講授的解析函數論等課程，總要在第一階段花很多時間闡明他關於實數的理論 (文獻 [15] 中有他的學生聽課筆記的摘錄)。

爲從正整數定義正有理數，他引進正整數的 “恰當部分” 的概念。例如，1 的恰當部分是滿足 $n\cdot e_n=1$ 的元素 e_n。數 a 是數 b 的一個 “恰當部分”，如果 b 是由等於 a 的一些元素構成的集合。正有理數定義爲單位的恰當部分的有限整線性組合，或有限集。通過定義 “容許變換”，他使同一有理數的不同表示式得以化歸爲相同的分母，然後他引進由無窮多個元素構成的集合，通過引進 “部分” 概念定義這類集合之間的相等。這就是他的無理數概念的基點。由此他定義實數的四則運算與次序關係，證明它們所滿足的規律以及實數的十進小數表示式。

稍後， H.C.R. 梅雷 (Méray) 、 G. 康托爾 (Cantor) 、 R. 戴德金以及 E. 海涅 (Heine) 分別於 1869 、 1871 、 1872 、 1872 年各自獨立地給出了無理數定義， 建立了嚴格的實數論。

$\epsilon-\delta$ **語言**

H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 、G. 黑特納 (Hettner) 和 G. 蒂姆 (Thieme) 分別整理的魏爾斯特拉斯於 1861 年講授的《微分學》、 1874 年講授的《解析函數論導引》和 1886 年講授的《函數論選題》的筆記 (文獻 [15]， 摘錄)， 呈現了他用 $\epsilon-\delta$ 語言定義分析基本概念與論證分析基本定理的輪廓。

魏爾斯特拉斯說， 對於函數 $f(x)$，“如果能確定一個界限 δ，使對其絕對值小於 δ 的所有 h 值， $f(x+h)-f(x)$ 小於可以小到人們意願的任何程度的一個量 ϵ， 則稱所給函數對應於變量的無窮小改變具有無窮小改變。” 他由此給出函數連續的定義， 證明閉區間上連續函數的介值性質和有界性質。 在定義微分學基本概念時， 他還以

$$f(x+h)=f(x)+h\cdot f'(x)+h(h)$$

給出導數的另一個定義， 他嚴格證明了帶餘項的泰勒公式， 稱它爲“整個分析中名副其實的基本定理”。 對於函數項級數， 他引進了極其重要的均勻收斂概念： 稱 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上均勻收斂， 如果對給定的任何正數 ϵ， 當 n 充分大時有

$$|r_n(x)|=\left|\sum_{k=n}^{\infty}u_k(x)\right|<\epsilon\ (a\leq x\leq b)。$$

他由此闡述並證明了關於連續函數項級數的和函數的連續性以及函數項級數逐項微分與逐項積分的定理， 幾乎與現在分析教科書中所寫內容全一致。 他還給出了廣泛使用的判別均勻收斂性的 M 判別法： 如果 $|u_n(x)|\leq c_n\ (a\leq x\leq b)$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收斂， 則 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

在 $[a,\ b]$ 上均勻收斂。

在建立分析基礎過程中，魏爾斯特拉斯引進了 R 與 R^n 中一系列度量和拓撲概念，如有界集、無界集，點的鄰域，集的內點、外點、過界點，集和序列的極限點，連通性等。證明了有界無限集必有極限點 (現稱爲波爾查諾－魏爾斯特拉斯定理)，並通過極限點證明了有界數集上、下確界的存在性與數列上、下極限的存在性。

在 1886 年的授課中，他還指出 G.F.B. 黎曼 (Riemann) 關於定積分的定義限制過多，並把積分概念推廣到在一個可數集上不連續的有界函數。這是走向具有完全可加性的現代積分概念的一個正確嘗試。

魏爾斯特拉斯的嚴格性

引進均勻收斂概念，是魏爾斯特拉斯的嚴格性的一個例證。海涅於 1869 年說，在此以前，人們 (包括柯西在內) 對收斂函數項級數可以逐項積分都深信不疑，“是魏爾斯特拉斯先生首次注意到，這條定理的證明 $\cdots\cdots$ 還基於均勻收斂性”。G.H. 哈代 (Hardy) 在分析了 G.G. 斯托克斯 (Stokes)、P.L. 賽德爾 (Seidel) 與魏爾斯特拉斯的均勻收斂概念後說：“只有魏爾斯特拉斯清楚地、自覺地看出了均勻收斂作爲分析基本概念的極端重要性。”

對於狄利克雷原理的批評，是其嚴格性的又一例證。該原理斷定：設 D 是平面區域，則在 D 的邊界上等於預先給定的連續函數的所有 $\overline{D}$ 上連續函數中，存在使得狄利克雷積分

$$\mathcal{D}[u]=\iint\limits_{D}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dxdy$$

達到最小值的函數 $u_0(x,\ y)$，而 u_0 必在 D 內調和，從而是狄利克雷問題的解。1870 年，魏爾斯特拉斯在柏林科學院發表題爲“關於所謂狄利克雷原理”的講演，一針見血地指出 $\mathcal{D}[u]$ 構成的集具有

下確界並不蘊涵在所考慮的函數集中存在 u_0 使 $\mathcal{D}[u_0]$ 等於這個下確界。 他還舉出了一個令人信服的簡單例子。

給出處處連續但處處不可導函數的例子， 也是其嚴格性的一個突出例證。 魏爾斯特拉斯於 1872 年在柏林科學院的一次演講 (文獻 [1]， 卷 2， 第 71 − 74 頁) 中提出了函數

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n x)\text{，}$$

其中 a 是奇整數、 $0 < b < 1$ 且 $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$。 他於 1874 年的一封信中把這個例子告訴了杜布瓦 − 雷蒙， 後者於次年在《克列爾雜誌》上發表了這個例子， 從而引出了以後一系列關於函數具有 “反常” 性態的發現。

魏爾斯特拉斯在分析中的另一重大工作是證明閉區間上的連續函數可以用多項式均勻逼近和週期爲 2π 的連續函數可以用三角多項式均勻逼近 (文獻 [1]， 卷 3， 第 1 − 37 頁)。 這兩條定理後來有許多推廣。

毫無疑義， 魏爾斯特拉斯的嚴格性最突出的表現是通過 $\epsilon - \delta$ 建立整個分析體系。 隨著他的講授和他的學生的工作， 他的觀點和方法傳遍歐洲， 他的講稿成爲數學嚴格化的典範。 F. 克萊因 (Klein) 在 1895 年魏爾斯特拉斯八十大壽慶典上談到那些年分析的進展時說，“我想把所有這些進展概括爲一個詞： 數學的算術化”。 而在這方面 “魏爾斯特拉斯作出了高於一切的貢獻”。 D. 希爾伯特 (Hilbert) 認爲：“魏爾斯特拉斯以其酷愛批判的精神和深邃的洞察力， 爲數學分析建立了堅實的基礎。 通過澄清極小、 函數、 導數等概念， 他排除了微積分中仍在湧現的各種異議， 掃清了關於無窮大和無窮小的各種混亂觀念， 決定性地克服了起源於無窮大和無窮小的困難。 ⋯⋯ 今天 ⋯⋯ 分析達到這樣和諧、 可靠和完美的程度， ⋯⋯ 本質上應歸功於魏爾斯特拉斯的科學活

動。”

魏爾斯特拉斯的嚴格化也遭到一些人反對， 最突出的是 L. 克羅內克 (Kronecker)。 他對算術化進化了激烈的、 刻薄的抨擊， 甚到否認像處處連續處處不可導函數這樣的例子有任何意義。

解析函數論的奠基人

魏爾斯特拉斯以其富有獨創性的方法， 首次以不依賴於幾何直觀的嚴格方式闡述和論證了複變函數論， 使這個十九世紀中成就最輝煌的數學分支進入了深入發展的階段。 他在這方面的工作不僅見諸論文， 而且更多體現在他講授的課程中。

解析性、 解析開拓與完全解析函數

魏爾斯特拉斯研究解析函數的出發點是解析性概念。 如果定義於複平面的區域 D 中的複值函數 f 在 D 的每個點的一個鄰域內可展開爲冪級數，則稱 f 在 D 內解析。 這樣的函數在複意義下可導。 他得到不恆等於零的解析函數 f 在其零點 a 處的分解式

$$f(z)=(z-a)^n g(z)，$$

其中 g 在 a 的鄰域內解析且 $g(a)\neq 0$。 由此得到零點的孤立性和解析函數的唯一性定理。

他指出， 給定以 a 爲中心、 收斂半徑爲 $r(>0)$ 的冪級數 f， 對圓盤 $|z-a|<r$ 中的每點 b， f 可展開爲以 b 爲中心、 收斂半徑 $r(b)\geq r-|b-a|$ 的冪級數。 由此可按 $r(b)>r-|b-a|$ 或 $r(b)=r-|b-a|$ 把收斂圓盤過界上的點分爲正則點和奇點兩類。 前一情形可對 f 進行解析開拓， 後一情形則不能。 他證明 $\rho=\inf\{r(b)：|b-a|<r\}=0$， 從而得到冪級數收斂圓盤邊界上必有奇點。 他還以例子 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}(0<b<1$， a 是不小於 2 的整數且滿足 $ab\geq 10)$ 表明此邊界可能只含有奇點， 他稱之爲“自然邊界”； 此時 f 不可能解析開拓到收斂圓外。

這樣的開拓可能導致回到同一點時得到不同的函數値。在 1884 – 1885 學年的講授中，魏爾斯特拉斯引進了 "解析函數元素" 概念。如果 S 是以 a 爲中心的具有正收斂半徑的冪級數，則稱 $(a,\ S)$ 爲一個解析函數元素，簡稱元素。給定兩元素 $(a,\ S)$、$(b,\ T)$，若 S 與 T 的收斂圓盤之交非空且 S 與 T 在此交上相等，則稱這兩個元素互爲直接解析開拓。設 $(a_0,\ S_0)$、$(a_1,\ S_1)$、$\cdots$、$(a_n,\ S_n)$ 是一個元素鏈，如果鏈中任何兩個相鄰元素互爲直接解析開拓，則稱 $(a_0,\ S_0)$ 與 $(a_n,\ S_n)$ 互爲解析開拓。從一個元素出發進行一切可能的解析開拓所得到的元素的全體，就是一個整體解析函數，它一般是多値的。這種函數被稱爲完全解析函數。

整函數與亞純函數

魏爾斯特拉斯把只在無窮遠點處有一個奇點的解析函數稱爲整函數，並得到了被 R. 奈望林納 (Nevanlinna) 稱爲 "現代分析中最奇妙的結果之一" 的整函數分解爲質因子的定理：對於給定的複數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$)，存在正整數列 $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得

$$g_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left(\frac{z}{a_k}+\cdots+\frac{1}{q_k}\left(\frac{z}{a_k}\right)^k\right)$$

在任一 $|z|\le R$ 上均勻收斂，於是整函數

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left(\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right)$$

以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其零點集。反之，每個以 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲其零點集的整函數 f 必可表示爲

$$f(z)=e^{g(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\exp\left(\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{1}{q_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^n\right),$$

其中 g 是整函數。

對於解析函數的孤立奇點， 魏爾斯特拉斯區別了極點和本性奇點。 在 1874 年 12 月 16 日致科瓦夫斯卡婭的信中， 他表述了下述命題： 如果 a 是 $f(z)$ 的本性奇點， 則對任何複數 c (可爲 ∞)， 存在 $z_n \to a$， 使得 $f(z_n) \to c$。 根據 F. 卡索拉蒂 (Casorati) 1864 年在柏林遊學時所作的筆記， 在當時他與魏爾斯特拉斯等人的多次討論中， 已談到這一定理。 卡索拉蒂和 Ю. В. 索霍茨基 (Сохоцкий) 於 1868 年分別發表了類似結果。 這一定理以及 E. 皮卡 (Picard) 於 1879 年發表的著名定理， 成爲現代亞純函數值分佈論的起點。 魏爾斯特拉斯還得到了具有有限個本性奇點和任意多個 (可爲無窮個) 極點的解析函數的一般表示式。

多複變函數論

在魏爾斯特拉斯的早期論文中， 已引進多複變量冪級數

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1\cdots k_n}(z_1-z_1^0)^{k_1}\cdots(z_n-z_n^0)^{k_n}$$

與複 n 維空間中的一些拓撲概念， 定義了多複變量冪級數的收斂多圓柱。 他還通過係數估計得到由冪級數表示的函數

$$g_\mu(z_1,\ \cdots,\ z_n)=0\ (\mu=1,\ \cdots,\text{；}\ m<n)$$

所確定的隱函數 $z_\nu = h_\nu(z_{m+1},\ \cdots,\ z_n)$ $(\nu = 1,\ \cdots,\ m)$ 可展開爲冪級數的定理。

魏爾斯特拉斯對多複變函數論的最大貢獻， 是他於 1860 年講課中提出並於 1879 年發表的 “預備定理”： 如果 $F(z_1,\ \cdots,\ z_n)$ 是原點鄰域內的解析函數， $F(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)=0$， $F(0,\ \cdots,\ 0,\ z_n)\neq 0$， 則在原點鄰域中 F 可表示爲

$$\begin{aligned}F(z_1,\ \cdots,\ z_n) \;=\;& (z_n^k + a_1(z_1,\ \cdots,\ z_{n-1})z_n^{k-1}+\cdots\\ &+a_k(z_1,\ \cdots,\ z_{n-1}))g(z_1,\ \cdots,\ z_n)\text{，}\end{aligned}$$

其中 k 是不小於 1 的整數， $a_\nu(z_1,\ \cdots,\ z_{n-1})$ $(\nu = 1、\ \cdots、\ k)$ 在原點鄰域內解析且在原點處取零值， g 在原點鄰域內解析且不等

於零。 這是多複變函數論中最早的一條深刻定理， 它使得現代解析集的局部研究中應用代數方法成爲可能， 對解析集研究具有重要意義。

魏爾斯特拉斯的函數論

魏爾斯特拉斯與柯西、 黎曼同爲複變函數論的奠基人， 但在方法與途徑上並不相同。 他建立解析函數論的原意是作爲他關於阿貝爾積分與阿貝爾函數一般理論的導引。 現在看來， 他的主要目標反倒退居次要地位， 而他的嚴格的、 批判的、 犀利的觀念， 以及他所提供的一般性理論和方法， 則成爲他對這一領域的主要貢獻。 在這方面， 他與黎曼明顯不同。 黎曼以狄利克雷原理爲基礎建立他的著名的映射定理， 而魏爾斯特拉斯對狄利克雷原理的批評使這個原理和黎曼強有力的方法幾乎一蹶不振。 直到 1899 年， 希爾伯特的工作才使它們得以 “復活”。 在談到黎曼面時， 魏爾斯特拉斯說他 “不能接受這是函數論眞正基礎” 的提法， 雖然他也承認這種方法 “具有數學想像力”。 在一般方法論上， 他說： “我越是思考函數論 − 這是我不斷研究的領域 − 的各種原理， 就越確信它必須建立在簡單的代數眞理的基礎上； 誰如果不是把它建立於簡單而基本的代數命題， 而是藉助於 ‘直覺’(我用這個詞來概括描述)， 誰就走上了歧路， 不管乍一看它多麼有吸引力， 例如黎曼那樣， 他通過這種方法發現了代數函數那麼多重要的性質。” 不過他也強調在研究時可以採用多種渠道， 他講的 “只是關於應當怎樣建立系統的理論基礎問題”(文獻 [1]， 卷 24， 第 235 頁)。

克萊因在比較這兩位數學家時說過： “黎曼具有非凡的直觀能力， 他的理解天才勝過所有同代數學家。 ······ 魏爾斯特拉斯主要是一位邏輯學者， 他緩慢地、 系統地逐步前進。 在他工作的分支中， 他力圖達到確定的形式。” H. 龐加萊 (Poincaré) 寫道， 魏爾斯特拉斯使 “整個解析函數論成爲冪級數理論的一系列推論， 因

而它就被建立在牢靠的算術基礎上”，“黎曼的方法首先是一種發現的方法， 而魏爾斯特拉斯的則首先是一種證明的方法”。

到十九世紀末， 德文 “Funktionenlehre” 幾乎已成爲按照魏爾斯特拉斯的觀念建立的複變函數論的同義詞， 但也有人持有異議。 S. 李 (Lie) 批評德國沒有像樣的幾何學家， 他把這種狀況歸咎於魏爾斯特拉斯學派佔據統治地位。 克萊因在肯定算術化同時也強調數學決不會由邏輯推導完成， 直觀總是具有特殊重要性。 康托爾甚至提出人們應當區別魏爾斯特拉斯實際所做的工作與圍繞著他樹立起來的神話。

在數學其它領域中的貢獻

橢圓函數論與阿貝爾函數論

魏爾斯特拉斯於文獻 [2] 中引進函數 $\mathrm{Al}(u)_k$ ($k=1$、2、3) 與 $\mathrm{Al}(u)$， 他採用這些記號顯然是爲了紀念阿貝爾。 他通過這些函數解決了把 $\mathrm{sn}u$、 $\mathrm{cn}u$、 $\mathrm{dn}u$ 表示爲冪級數之商的問題。 後來， 他引進了在其橢圓函數論中起核心作用的函數 $\mathcal{P}$ (文獻 [1]， 卷 5， 第 23 − 31 頁)， 它是第一類橢圓積分的反演， 滿足微分方程

$$\left(\frac{d\mathcal{P}(u)}{du}\right)^2 = 4(\mathcal{P}(u))^3 - g_2\mathcal{P}(u) - g_3,$$

並以 $u=0$ 爲極點。 他得到了 $\mathcal{P}(u)$ 的加法定理， 從而把它解析開拓爲全平面上的亞純函數， 並得到展開式

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(u) &= \frac{1}{u^2} + \sum_{w\neq 0}\left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2}\right), \\
g_2 &= 60\sum_{w\neq 0}\frac{1}{w^2}, \\
g_3 &= 140\sum_{w\neq 0}\frac{1}{w^6}。
\end{aligned}$$

他在 “關於阿貝爾積分論” 和 1856 年發表的另一論文 (文獻 [1]， 卷 1， 第 297 − 355 頁) 中研究了超橢圓積分的反演問題： 由方程組

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{a_{2j-1}}^{x_j}\frac{F_k(x)}{\sqrt{R(x)}}dx=u_k \quad (k=1、2、\cdots、n)$$

確定 x_1、 $\cdots$、 x_n 作爲 $(u_1, \cdots, u_n)\in \mathbf{C}^n$ 的函數， 其中

$$\begin{aligned} R(x) &= \prod_{j=1}^{2n}(x-a_j)， \\ F_k(x) &= \tfrac{1}{2}\textstyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_{2j-1})，\ j=1、\cdots、n。\end{aligned}$$

通過引進第一類與第二類完全積分與函數 Al、 Al_j、 $\mathrm{al}_j=\mathrm{Al}_j/\mathrm{Al}$ $(j=0、1、\cdots、2n)$， 他得到了問題的解， 導出了這些函數所滿足的偏微分方程組與作爲冪級數之商的表示式， 建立了 al_j 之間的一些代數關係式。

魏爾斯特拉斯於 1869 年完成了關於阿貝爾積分的一般理論， 並在其後的一系列課程中加以闡述 (文獻 [1]， 卷 4)。 在他的理論中， 由一個不可約代數方程定義的黎曼面被代之以解析元素 (φ, ψ) 的一個集合， 其中 $x=\varphi(t)$， $y=\psi(t)$ 是收斂冪級數； 他稱這樣的集合爲 “代數層”。 他由此出發定義虧格 (他稱之爲 “級”)， 證明虧格在雙有理變換下不變。 他還定義有理微分形式 $F(x, y)dx$ 關於元素 (φ, ψ) 的殘數， 證明一個給定形式關於一個代數層的所有元素的殘數之和爲零， 由此得到 $F(x, y)$ 的分解式。 通過研究只有一個極點的有理函數， 他得到虧格的新的代數刻畫。 他證明用有限個解析元素即可表示一個代數層， 這相當於證明代數函數黎曼面的緊性。 他證明了阿貝爾函數論中的一條基本定理： 具有相同週期 $2p$ 的 $p+1$ 個 p 元阿貝爾函數之間存在一個代數關係。

變分法

魏爾斯特拉斯關於變分法的研究最早通過 A. 奈瑟 (Kneser) 的《變分法教程》(*Lehrbuch der Variationsrechung*, 1900) 得到傳播，該書對變分法研究有深遠影響。他關於變分法的講義 (文獻 [1]，卷 7) 是由許多學生筆錄的。在該講義中，他考察平面變分法問題的參數形式即積分

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\ y,\ x',\ y')dt，x'=\frac{dx}{dt}，y'=\frac{dy}{dt}，$$

假定 F 在某個區域中正則並具有正齊性。第 11 章中證明了著名的 “角條件”：給定的極小化曲線在 $(t_0,\ t_1)$ 中有限個點處間斷地改變切線方向並不破壞 $\dfrac{\partial F}{\partial x'}$、$\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ 的連續性。他重新定義雅可比引進的共軛點，給出雅可比關於共軛點命題的嚴格證明 (第 16 章)。他清晰地表述了曲線 C 爲極值曲線的三個必要條件：(1) 沿此曲線 x、y 作爲 t 的函數滿足

$$G=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x'}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}-F_1\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)=0，$$

其中 F_1 由

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=F_1y'^2、\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=-F_1x'y'、\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=F_1x'^2$$

確定。(2) 如果 C 爲極小 (大) 化曲線，則 F_1 沿 C 取正 (負) 值。(3) 從起始點開始，積分區間至多能達到起始點的共軛點。他首次敍述並證明了曲線 C 給出 I 的極大 (小) 值的一個充分條件：設上述條件 (1)、(2) 和 (3) 滿足，F_1 在 $[t_0,\ t_1]$ 上不爲零也不爲無窮，該區間中沒有共軛點對，如果把曲線的變分限於比較曲線與所給曲線相應點之間距離爲任意小且切線方向的改變也爲任意小的情形 (即現稱的弱變分情形)，則當 F_1 爲正 (負) 時 C 給出極小 (大) 值 (第 18 章)。

魏爾斯特拉斯認爲，也應考慮比較曲線與給定曲線相應點處切線方向不一定相近即現稱的強變分情形。此時他引進函數

$$E(x,\ y\ ;\ p,\ q\ ;\ \overline{p},\ \overline{q}) \ = \ F(x,\ y,\ \overline{p},\ \overline{q}) - \frac{\partial F}{\partial x'}(x,\ y,\ p,\ q)\overline{p}$$

$$-\frac{\partial F}{\partial y'}(x,\ y,\ p,\ q)\overline{q}\ ,$$

其中 p、q、$\overline{p}$、$\overline{q}$ 爲方向餘弦。他敍述並證明了著名的必要條件 (4)：如果 C 給出 I 的極小 (大) 值，則當 x、y、p、q 沿 C 而 $\overline{q}$、$\overline{q}$ 任意時，E 必爲非負 (非正)(第 22 章)。爲研究充分性，他引進現稱的 “場” 概念，敍述並證明：如果 E 在位於場內且連接參數爲 t_0、t_1 的點的任一曲線 C 上爲負 (正)，則 I 沿滿足微分方程 $G=0$ 的曲線 C_0 的值大 (小) 於沿 C 的值 (第 23 章)。像他的其它工作一樣，他的變分法研究嚴謹透徹，明顯區別於在此以前的有關研究。

代數

魏爾斯特拉斯對同時化兩個二次型爲平方和給出了一般方法 (文獻 [1]，卷 1，第 233－246)。他建立了矩陣的初等因子理論，實際上比 C. 喬丹 (Jordan) 早兩年給出了現稱的喬丹標準形；他完成了二次型理論並把它推廣到雙線性型 (文獻 [1]，卷 2，第 19－44 頁)。他於 1861 年得到了關於線性結合代數的一個基本結果 (發表於 1884 年，見文獻 [1]，卷 2，第 311－332 頁)：具有有限個原始單元的實或複線性結合代數，如果滿足乘積定律和乘法交換律，就必是實數構成的代數或複數構成的代數 (戴德金約於 1870 年得到同樣結果，並於 1885 年發表)。

卓越的大學數學教師

刻苦鑽研、嚴謹治學

如前所述，在當中學教師的十五年中，儘管教學任務繁重，工作條件很差，魏爾斯特拉斯仍堅韌不拔、孜孜不倦地鑽研數學，經常達到廢寢忘食的程度。例如一天早上，他該去上課的教室中起了騷動，校長走去一看，原來是教師未到。校長趕快去魏爾斯特拉斯的寢室，發現他還在燭光下苦苦思索，根本不知道天色早已大明。1850 年起，他患了眩暈症，常持續一小時以上，直到一陣摧人心肺的嘔吐後才見消退。這種腦痙攣症折磨了他十餘年，但他頑強地堅持教學和研究。實際上，在當中學教師年代，他是以犧牲健康爲代價從事數學研究的。

他在柏林大學仍承擔巨大的教學工作負荷。1860 年 3 月，在一次講課中他突然暈了過去。1861 年底他完全病倒，在近兩年中一直未能回到科學工作上來。他患有支氣管炎和靜脈炎，經常發作。但只要有可能，他就堅持上課，常常只能坐著講授，讓優秀學生書寫黑板。

他總是推遲發表自己的工作，倒不是因爲厭惡發表，而是力求以嶄新的途徑，使結論建立在牢固的基礎上。他反覆推敲自己的觀念、理論和方法，直到他認爲已達到它們理應具有的自然完美的方式爲止，所以他正式發表的論文數量並不多。

魏爾斯特拉斯富有詩才。他曾說過，如果一個數學家不是某種程度上的詩人，他就永遠不會成爲一個完整的數學家。但有點奇怪的是，不像很多數學家喜歡音樂一樣，他討厭音樂。他是天主教徒，但在宗教觀點上不走極端。

無與倫比的大學數學教師

魏爾斯特拉斯是古往今來最出色的大學數學教師之一。從 1856 年至 1890 年的 68 個學期中，他每學期都有課，其中約有 1/4 的學期每週授課二門 8 學時；約有一半學期講授二門課程。他講授的課程計有：橢圓函數論、橢圓函數論在幾何和力學中的應

用、阿貝爾函數論、解析函數論、變分法、幾何學、函數論選題、用冪級數表示解析函數、分析引論、積分學、行列式及其應用、雙線性型和二次型、齊次函數論、解析幾何學、數學物理、分析力學、分析光學。

從 1861 年 5 月起，他還與庫默爾一起創辦了柏林大學第一個數學討論班，此後持續不斷，討論他們開創的新觀念和新理論。

當然，重要的不在於上了多少課，而在於培養的學生的狀況。大學教學的目的是培養善於思考、富於創造力的人才。在這方面，魏爾斯特拉斯的成功可以說是無與倫比的。他善於用一種不可言傳只能意會的精神激發學生的興趣和創造慾。他講課時不誇大其辭、譁衆取寵。他關心學生，循循善誘，慷慨地指給學生論文課題，甚至把自己尚未發表也未留紀要的手稿借給學生，而有的學生拿去後竟不再歸還。

魏爾斯特拉斯的受到學生高度推崇的講授並非一蹴可及而是長期磨煉形成的。開始時，他講的課比較混亂，有時令人費解。後來，他的課越講越好，新的思想樸實無華自然而然地湧現，使他講授新理論的名聲傳遍全歐，聽課人數激增。1869 年講阿貝爾函數，註册時爲 107 人，但後來聽衆竟達 250 人，不少人只得席地而坐。在他的學生 (包括參加討論班的人) 中，後來有近 100 位成爲大學正教授。考慮到當德國大學正教授的難度，這實在是一個驚人數字。他的學生中有一大批後來成爲知名數學家，其中有 P. 巴赫曼 (Bachmann)、O. 博爾查 (Bolza)、F. 恩格爾 (Engel)、G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius)、K. 亨澤爾 (Hensel)、O. 赫爾德 (Hölder)、A. 胡爾維茨 (Hurwitz)、克萊因、W. 基靈 (Killing)、奈塞、柯尼斯伯格、科瓦列夫斯卡婭、M. 萊爾赫 (Lerch)、李、F. 默滕斯 (Mertens)、H. 閔柯夫斯基 (Minkowski)、米達格－萊弗勒、E. 內托 (Netto)、A. 普林斯海姆 (Pringsheim)、C. 龍格 (Runge)、F. 朔特基 (Schottky)、施瓦

茲 、 O. 斯托爾茨 (Stolz) 等 。

也有少數人批評說， 在魏爾斯特拉斯討論班上， 絕大多數參加者把他的理論奉爲圭臬， 很難發表不同意見。 克萊因就說過他與李在討論班上常不得不爲捍衛自己觀點而戰鬥 。

龍格說， 魏爾斯特拉斯在其連續性課程中 “自下而上地構築了完美的數學大廈， 其中任何想當然的 、 未經證明的東西沒有立足之地”。 這是對魏爾斯特拉斯講授的一個很好的概括 。

文　　獻

原始文獻

[1] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, Berlin, Mayer und Müller, Bd. 1 − 7, 1894 − 1927 。

[2] K. Weierstrass, *Über die Entwicklung der Modular–Function*, [1], 1, S. 1 − 49 。

[3] K. Weierstrass, *Darstellung einer analytischen Funnction einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen gegebenen Grenzen liegt*, [1], 1, S. 51 − 66 。

[4] K. Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen*, [1], 1, S. 67 − 74

[5] K. Weierstrass, *Definition analytischer Functionen einer Veränderlichungen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen*, [1], 1, S. 75 − 84 。

[6] K. Weierstrass, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen*, [1], 1, S. 133 − 152 。

[7] K. Weierstrass, *Über das sogenannte Dirichlet'sches Princip*, [1], 2, 49 − 54 。

[8] K. Weierstrass, *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*, [1], 2, S. 77 − 124 。

[9] K. Weierstrass, *Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze*, [1], 2, S. 135 − 188 。

[10] K. Weierstrass, *Zur Functionenlehre*, [1], 2, S. 201 − 223 。

[11] 沈永歡， 十九世紀函數論發展中的幾個關鍵時刻， 北京工業大學學報， 11 (1985)， 3， 第 125 − 136 頁。

[12] H. Behnke, K. Kopfermann (ed.), *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass,* 1815 − 1965*, Westdeutscher Verlag. Köln und Opladen*, 1966。

[13] K.– R. Biermann, *Karl Weierstrass*：*Ansgewählte Aspekte seiner Biographie*, Journ. reine. ang. Math., 233 (1966), S. 191 − 220。

[14] K.–R. Biermann, *Weierstrass, Karl Theodor Wilhelm*, 見 *Dictionary of sceintific biography*, 13 − 14 (1976), 219 − 224。

[15] P. Dungac, *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass*, Arch. Hist. Exact Sci., 10 (1973), 41 − 176。

[16] F. Klein, *Über Arithmetisierung der Mathematik*, Ges. math. Abh., Vol. 2, Springer, 1921 − 1923, S. 232 − 240。

[17] F. Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19 *Jahrhundret*, Springer, 1923。

[18] K.R. Manning, *The emergence of the Weierstrassian approach to complex analysis*, Arch. Hist. Exact Sci., 14 (1975), 297 − 383。

[19] G.G. Mittag– Leffler, *Zur Biographie von Weierstrass*, Acta Math., 35 (1912), S. 29 − 65。

[20] G.G. Mittag–Leffler, *Die ersten* 40 *Jahre des lebens von Weierstrass*, Acta Math., 39 (1923), S. 1 − 57。

[21] G.G. Mittag– Leffler, *Weierstrass et Sonja Kowalewsky*, Acta Math., 39 (1923), S. 133 − 198。