凱　萊

凱萊， A. (Cayley， Arthur) 1821 年 8 月 16 日生於英國薩里 (Surrey) 的里士滿 (Richmond)； 1895 年 1 月 26 日卒於英國劍橋。 數學、 天文學。

凱萊之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Cayley.html

凱　萊

張 祖 貴
(中國科學院自然科學史研究所)

凱萊， A. (Cayley， Arthur) 1821 年 8 月 16 日生於英國薩里 (Surrey) 的里士滿 (Richmond)； 1895 年 1 月 26 日卒於英國劍橋。 數學、 天文學。

凱萊的父親亨利 • 凱萊 (Henry Cayley) 是一位在俄國聖 • 彼得堡從事貿易的英國商人， 其母瑪麗亞 • 安東妮婭 • 道蒂 (Maria Antonia Doughty) 據說有俄羅斯血統。 在父母的一次回英國短期探親期間， 凱萊誕生在英國， 他是父母的第二個孩子。 不久， 凱萊隨父母到了俄羅斯。 凱萊主要在俄國度過童年。

1829 年， 凱萊的父親退休， 於是全家回英國定居。 凱萊被送到倫敦布里克里什一所小規模的私立學校唸書， 在學校裡， 他充分顯示了數學天才， 尤其是在數値計算方面有驚人的技巧。 十四歲時， 父親將他送到倫敦國王學院學習， 國王學院的教師們十分欣賞凱萊的數學才能， 並鼓勵他發展數學能力。 開始時父親從商人的眼光出發強烈反對他將來成爲一名數學家， 但父親最終被校長說服了， 同意他學習數學。 十七歲那年， 凱萊進入著名的劍橋大學三一學院就讀， 他在數學上的成績遠遠超出其他人。 他是作爲自費生進入劍橋大學的， 1840 年成了一位獎學金獲得者。 1842 年， 二十一歲的凱萊以劍橋大學數學榮譽學位考試一等的身份畢業， 並獲得了更困難的史密斯獎金考試的第一名。

1842 年 10 月， 凱萊被選爲三一學院的研究員和助教， 在他那個時代乃至整個十九世紀， 他是獲得這種殊榮的人中最年輕的一位， 爲期三年。 其職責是教爲數不多的學生， 工作很輕鬆， 於是他在這一時期的大部分時間內從事自己感興趣的研究， 他廣泛閱

讀 C.F. 高斯 (Gauss)、 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 等數學大師的著作， 並開始進行有創造性的數學工作。 三年後， 由於劍橋大學要求他出任聖職， 於是他離開劍橋大學進入了法律界。

按照成爲一名高級律師的要求，凱萊必須專門攻讀法學課程， 於是他進了英國林肯法律學院， 1848 年取得律師資格。 值得注意的是， 在十九世紀， 英國許多一流的大法官、 大律師都是像凱萊這樣的劍橋大學數學榮譽學位考試一等及格者。

凱萊取得律師資格後， 從事律師職業長達十四年之久， 主要處理與財產轉讓有關的法律事務。 作爲一位名聲與日俱增的大律師， 他過著富裕的生活， 並且爲從事自己喜愛的研究積累了足夠的錢。 然而， 在這段作爲大律師的時間裡， 他擠出了許多時間從事數學研究， 發表了近三百篇數學論文， 其中許多工作現在看來仍然是第一流的和具有開創性的。

正是在擔任律師的時期， 凱萊與著名的美國數學事業創始人之一 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 開始了長期的友誼與合作。 西爾維斯特從 1846 年起由數學界進入法律界， 1850 年取得律師資格， 於是， 兩人作爲法律界的數學家結識而走到了一起。 1851 年， 兩人開始用書面形式表達對對方給予自己在數學方面的幫助的感激之情。 在 1851 年出版的一篇論文中， 西爾維斯特寫道："上面闡明的公理部分是在同凱萊先生的一次談話中提出的 …… 我感激他使我恢復了享受數學生活的樂趣。" 1852 年， 西爾維斯特提到凱萊"慣常講的話都恰如珍珠寶石。" 凱萊與西爾維斯特被認爲共同創立了不變量的代數理論。 E.T. 貝爾 (Bell) 稱他們是"不變量的孿生兄弟"。

凱萊時刻準備放棄律師職業， 從事他所喜愛的數學研究事業。 機會終於來了。1863 年， 劍橋大學新設立了一個薩德勒 (Sadler) 純粹數學教授席位， 由於出色的數學工作， 凱萊被任命爲首位薩德勒數學教授， 他擔任這一教席直至去世。 雖然作爲數學

教授的收入遠比作爲一名大律師少，但他卻感到十分高興。他將全部精力投入到數學研究與數學之中，高質量、高產地奉獻出一個又一個重要的數學成果。

在劍橋大學，凱萊還被委任大學行政工作，他的辦事經驗和風格，不受個人情感影響的判斷力，特別是他的法律知識、在法律界的聲譽與其行政管理能力相結合，使他對劍橋大學的管理與發展做出了重要貢獻。由於他的不懈努力，創建於中世紀的劍橋大學終於允許婦女註册入學了。

1881－1882 年，凱萊應西爾維斯特之邀前往美國霍普金斯大學進行爲期半年的講學。1855 年，西爾維斯特離開法律界開始任數學教授，並於 1876 年受邀到霍普金斯大學擔任數學教授，1878 年創辦《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*)。凱萊又與西爾維斯特在一起從事了一段時間的數學研究工作。

1883 年，凱萊被任命爲英國科學促進協會主席，爲英國科學的持續發展、科學普及做出了重要貢獻。

由於傑出的學術成就，凱萊獲得了大量的學術榮譽，其中包括 1859 年當選爲皇家學會會員，獲得英國皇家學會的皇室勳章，1881 年獲得英國皇家學會的柯普雷勳章。今天，劍橋大學三一學院安放著一尊凱萊的半身塑像。

凱萊僅出版了一部專著《橢圓函數論》(*Treatise on elliptic functions*，1876)，然而他卻發表了涉及衆多數學分支、影響十分深遠的數學學術論文達 966 篇，1889－1898 年編輯出版的《凱萊數學論文集》(*The collected mathematical papers of Arthur Cayley*) 排滿整整四開本十三大卷，每卷多達 600 餘頁!

在成爲劍橋大學數學教授的同時，1863 年 9 月，凱萊與格林威治的蘇姍·莫蘭 (Susan Moline) 結婚，生有一兒一女，婚姻與家庭幸福美滿，他一生所經歷的一切；無論是事業還是家庭、愛情，無論是作爲數學家，還是作爲律師和行政官員，都是令人羨

慕的。

凱萊在數學上最早、最重要的工作之一，是創立不變量理論。

受拉格朗日、高斯尤其是 G. 布爾 (Boole) 有關二次型論文的啓發，凱萊在 1843 年二十二歲時即開始計算 n 次型的不變量，即在變換下 n 次型具有哪些不變量 − 哪些量經變換後只相差某個因子。

1845 年，凱萊發表 “線性變換理論” (*On the theory of linear transformation*) 一文，探討求不變量的方式。開始，他稱不變量爲 “導出數” (derivative) 即 “從一個給定的函數按任意方式 (即變換) 導出的一個函數”。後來他又稱不變量爲 “超級行列式” (hyperdeterminants)。他在這些文章中給出了如何求 n 次齊次函數的不變量的計算方式。

1846 年，凱萊發表 “論線性變換” (*On linear transformation*) 一文，引入了 “協變量” (covariance) 的概念。

這兩篇文章奠定了凱萊作爲不變量創立者的地位。無論是布爾、F.M.G. 艾森斯坦 (Einsenstein) 或拉格朗日、高斯都沒有明確表述出不變量的概念，他們 (主要指布爾) 都沒有找出求不變量的一般方法。凱萊是第一位表述在一般意義下的代數不變量問題的數學家，他第一個深入研究求不變量的一般方法，發明了一種處理不變量的符號方法，並且得到了一系列重要結果。

從 1854 年開始，凱萊連續發表了一系列共十篇論代數形式的學術論文，“代數形式” (quantics) 是他用來指稱二個、三個或多個變量的齊次多項式的名詞，最後一篇這方面的論文發表於 1878 年，這一組論文中得到了一系列漂亮、簡捷、富有啓發性的關於不變量的結果。如對於二元四次型

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4\text{，}$$

凱萊經過精細的計算， 證明了 f 的黑塞 (Hesse) 行列式

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

及 f 與 H 的雅可比行列式

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial H}{\partial x_1} & \dfrac{\partial H}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

都是 f 的協變量， 並且證明

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

是 f 的不變量。

凱萊還深入研究了不變量的完備系問題， 他證明了， 艾森斯坦所求得的二元三次式， 他本人求得的二元四次式的不變量與協變量， 分別是兩種情況下的完備系。 凱萊在不變量理論奠基性的創造工作中， 還涉及到了衆多其它數學分支重要而基本的問題。

受凱萊的影響， 西爾維斯特在不定量理論的創立過程中也做了許多傑出而基本的工作，“不變量” (invariant) 這個術語就是西爾維斯特引進的。 凱萊對不變量理論傾注了極大的熱情與精力， 他的工作開創了十九世紀下半葉研究不變量理論的高潮。 P. 哥爾丹 (Gordan) 大半生致力於研究不變量， 給出了如何計算完備系等重要方法， 被稱爲 “不變量之王”。 1885 年， D. 希爾伯特 (Hilbert) 完成不變量方面的博士論文， 以後又在不變量理論方面做了劃

時代的工作。 哥爾丹的學生、 二十世紀最重要的女數學家 E. 諾特 (Noether) 在 1907 年即以 “三元雙二次型的不變量完備系” (*On complete systems of invariants for ternary biquadratic forms*) 爲其博士論文， 並以此爲出發點， 進行了一系列卓有成效的工作。 更重要的是， 在十九世紀七十至九十年代， 數學家們利用不變量理論統一了數學中的許多領域。 凱萊開創的這一數學理論顯示出了異乎尋常的意義。

矩陣是凱萊的另一項重要數學工作， 他被認爲是矩陣論的創立者。 他曾指出， 從邏輯上來說， 矩陣的概念應先於行列式的概念， 但在歷史上卻正好相反。 他第一個將矩陣作爲一個獨立的數學概念、 對象而討論， 並且首先發表了一系列討論矩陣的文章， 因此他作爲矩陣代數的創立者是當之無愧的。 他曾指出：“我決然不是通過四元數而獲得矩陣概念的； 它或是直接從行列式的概念而來， 或是作爲一個表達方程組

$$\begin{aligned} x' &= ax + by\text{，} \\ y' &= cx + dy \end{aligned}$$

的方便的方法而來的。” 可見， 凱萊是在研究線性變換下不變量時開始研究矩陣的， 並引進矩陣 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 以簡化記號。

在 1858 年的第一篇矩陣文章 “矩陣論的研究報告” (*A memoir on the theory of matrices*) 中， 凱萊引進了矩陣的基本概念和運算。 給出了零矩陣、 單位矩陣的定義。 兩個矩陣的和的矩陣定義爲， 其元素是兩個相加矩陣的對應元素之和， 他注意到， 上述定義不僅適用於 $n \times n$ 矩陣， 而且可用於任意的 $m \times n$ 矩陣， 他指出， 矩陣加法滿足結合律和交換律。 對於一個數 m。 凱萊定義 mA 爲這樣的矩陣， 其每一個元素都是 A 的對應元素的 m 倍。

凱萊給出了矩陣乘法的定義， 並著重強調， 矩陣乘法是可結合的， 但一般不滿足交換律。 他還給出了求矩陣的逆矩陣 (如果有的

話) 的一般方法。

在矩陣論研究中， 凱萊給出了矩陣代數一系列重要而基本的性質， 如有關轉置矩陣、 對稱矩陣、 斜對稱矩陣的定義與性質。

凱萊引入了方陣 ($n \times n$ 矩陣) 的特徵方程的概念。 對於矩陣 M 、 I 是單位矩陣， M 的特徵方程是 (定義爲)

$$|M - xI| = 0，$$

此處 $|M - xI|$ 是矩陣 $M - xI$ 的行列式， 特徵方程展開爲

$$x^n - A_0 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n |M| = 0，$$

該方程的根是矩陣的特徵值 (或特徵根)。 1858 年， 凱萊發表文章指出， 在上述方程中用 M 代替 x， 則得到一個零矩陣， 於是， 他給出了現在稱爲任意方陣的凱萊－哈密頓定理。

值得指出的是， 1841 年凱萊已引入兩條豎線作爲行列式符號， 如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 表示行列式， 後爲世人採用。

隨後， 矩陣代數在十九世紀沿著兩個方向發展， 一個是凱萊與西爾維斯特所擅長的抽象代數結構， 另一個則是被用於幾何學上。

凱萊將矩陣論與超複數等線性結合代數聯繫起來考慮。 的確， 四元數是他關注的一個重要方面， 因爲四元數提供了一個不具有乘法交換性的代數， 這使得他在考慮矩陣乘法時有了先例。 當然， 如他所宣稱的那樣， 他的矩陣概念不是通過四元數而獲得的。 但是， 他本人的確對四元數以及由此而產生的超複數系研究十分感興趣。 在 1843 年 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 宣告四元數的發明之後， 凱萊在 1847 年給出了實四元數的一個八單元的推廣， 這種八單元 (可以看作八元數的特例) 的單元是 1 、 e_1 、 e_2 、 $\cdots$ 、 e_7， 具有如下性質

$e_i^2=-1$，$e_ie_j=-e_je_i$，i、$j=1$、2、$\cdots$、7，

且 $i\neq j$，

$e_1e_2=e_3$，$e_1e_4=e_5$，$e_1e_6=e_7$，

$e_2e_5=e_7$，$e_2e_4=-e_6$，

$e_3e_4=e_7$，$e_3e_5=e_6$。

對三足標的每個集合循環地進行排列，從上述後七個方程可得到 14 個方程，如 $e_2e_3=e_1$；$e_3e_1=e_2$。這種八單元 (八元數) 也不具有乘法交換律。此外，凱萊還給出了超複數代數。1858 年，他提出了將超複數當作矩陣看待的思想，爲研究超複數代數提供了新的工具。

研究線性變換下的代數不變量不僅使凱萊創立了矩陣論，而且還使他在幾何研究方面做出了傑出貢獻。他以代數觀點研究幾何在十九世紀上半葉獨樹一幟。在研究不變量問題時，他對代數形式 (齊次多項式型) 的幾何解釋很感興趣，如 f 的一個協變量代數某一圖形，它不僅相關於 f 而且射影相關於 f。爲了要證明度量概念能夠用射影語言來表達，凱萊致力於歐氏幾何與射影幾何關係的研究。在這方面，他的最好的工作是十篇論代數形式系列論文中的 “關於代數形式的第六篇論文” (*Sixth memoir upon quantics*，1859)。在這篇文章中，他給出了一種關於圖形度量性質的新意義。對於二維情形，用任一二次曲線代替虛圓點，在三維時他則引入二次曲面，並將這些圖形稱爲絕對形。於是他斷言，圖形所有的度量性質，是加上了絕對形或者關於絕對形的射影性質。

凱萊從平面上的點可以用齊次坐標表示的事實出發，定義距離與角度。首先，他引入二次型

$$F(x,\,x)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\text{，}a_{ij}=a_{ji}\text{，}i\text{、}j=1\text{、}2\text{、}3$$

與雙線型

$$F(x,\ y)=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\ ;$$

方程 $F(x, x)=0$ 定義爲一條二次曲線， 即上述凱萊的絕對形。 絕對形的線坐標方程則爲

$$G(u,\ u)=\sum_{i,j=1}^{3}A^{ij}u_iu_j=0\ ,$$

其中 A^{ij} 是 F 的係數行列式中 a_{ij} 的餘因子。

然後， 凱萊定義兩點 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ 、 $y=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ 間的距離

$$\delta=\arccos\frac{F(x,\ y)}{[F(x,\ x)F(y,\ y)]^{1/2}}\ ,$$

定義線坐標爲 $u=(u_1,\ u_2,\ u_3)$ 、 $v=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ 的兩直線的夾角 ϕ 爲

$$\cos\phi=\frac{G(u,\ v)}{[G(u,\ u)G(v,\ v)]^{1/2}}$$

取絕對形二次曲線爲無窮遠圓點 $(1,\ i,\ 0)$ 及 $(1,\ -i,\ 0)$，凱萊證明， 上述關於距離與角度的公式可化成普通的歐氏幾何中相應的公式。 在上述定義中， 長度和角度的表達式中包含絕對形的代數表達式。

凱萊指出， 任一歐氏幾何度量性質的解析表達式包含著該性質與絕對形的關係式， 度量性質不是圖性本身的性質， 而是圖形相關於絕對形的性質， 因此一般的射影關係決定度量性質， 也就是說， 射影關係更爲重要， 度量幾何只不過是射影幾何的一部分， 是其特例。 他的這種思想， 深深地影響了德國的 F. 克萊因 (Klein)， 克萊因認識到， 利用凱萊的上述觀點， 有可能把非歐幾何 、 雙重幾何 、 橢圓幾何 (二重) 都包含在射影幾何。 沿著這一研

究方向， 克萊因成功地在 1872 年完成了對當時各種幾何學分支的統一工作。

考慮用代數方法研究幾何問題， 實際上也是凱萊試圖弄清楚當時新出現的非歐幾何與其它幾何關係的重要方面， 他非常渴望能將非歐幾何 、 仿射幾何 、 歐氏幾何在某種形式下統一起來， 尤其是希望能在歐氏幾何中實現非歐幾何。 他在非歐幾何的研究方面做了不少工作， 可是他只對歐氏幾何的實在性深信不疑， 他只接受那種能用新距離公式在歐氏空間實現的非歐幾何。 他在 1883 年就任英國科學促進會主席的致詞中， 關於非歐幾何的觀點佔了很大的篇幅， 他說非歐空間是一個先驗性的錯誤思想， 非歐幾何只不過是在歐氏幾何引進新的距離函數後得到的新奇結果， 認爲 “歐氏空間長期以來一直被當作是我們經驗的物理空間， 所以幾何學的命題不僅僅近似地是眞實的， 而且還是絕對眞實的。” 因此， 他不承認非歐幾何的獨立存在性， 認爲它們只不過是一類特殊的歐氏幾何結構或者是歐氏幾何中表示射影關係的一種方式。 因而他關於幾何學各分支統一的觀點是 “射影幾何是所有的幾何， 反之亦然。” 這在十九世紀下半葉是非常具有創見的， 儘管他沒有承認非歐幾何與歐氏幾何一樣基本， 一樣具有實用性和實在性。

在一定程度上， 凱萊可以說是 n 維幾何 (高維幾何) 、 高維抽象空間的創始人之一。 他通過將 $n \times m$ 矩陣方面的工作類比於幾何中的概念， 從而實現了高維空間的解釋。 另一方面， 他在幾何研究中也應用了高維空間的思想。

歷史上， 拉格朗日 、 J.R. 達朗貝爾 (d’Alembert) 、 A.F. 莫比爾斯 (Möbius) 等都曾考慮過 n 維空間問題， 但都未深入探討。 一般認爲， H.G. 格拉斯曼 (Grassmann) 在 1844 年建立了完全一般的 n 維幾何概念， 因而被認爲是高維幾何的奠基人。

實際上， 與拉格斯曼完全獨立， 凱萊也進行了用分析方法研究 n 維幾何的工作。 1843 年， 凱萊在考慮行列式的性質時， 提出了

行列式各行 ($n \times n$ 行列式) 形成 n 維空間的坐標。 1843 年， 他寫成了 “n 維解析幾何的幾章” (*Chapters in the analytical geometry of n-dimensions*)， 於 1845 年發表在《劍橋數學雜誌》(*Cambridge Mathematical Journal*) 上。 他認爲， 研究 n 維幾何 “無須求助於任何形而上學的解釋。” 在這篇文章中， 他給出了關於 n 個變量的分析結果， 表明他已完全抓住了 n 維幾何的概念。 這篇文章雖然標題是關於 n 維解析幾何的， 但主要內容卻是關於任意多個變量的齊次線性方程組的非零解的問題， 可見， 他是通過分析、 代數方法而引入 n 維空間。

1846 年， 在闡述一些特殊的綜合幾何定理時， 凱萊已經利用了四維空間。 不僅如此， 凱萊還爲高維空間幾何引進了一系列術語。 他曾使用 “超行列式” 來表示不變量， 又曾引入 “超橢圓 θ 函數”(hyperelliptic theta functions)。 在 1870 年的 “關於抽象幾何的學術論文” (*Memoir on abstract geometry*) 中， 他引入了 “超空間” (hyperspace)、 “超幾何” (hypergeometry)。 他還考慮過由一組關於超二次曲面共軛的線性方程所確定的 $(m-n)$ 維空間中的點， 其每一點的坐標滿足某個由行列式確定的方程， 其中這個行列式涉及到超二次曲面的偏微分方程的係數。 1860 年， 他還推導出了六元齊次坐標系統。 可見， 他不僅引入了 n 維空間的概念， 還對高維空間進行了深入研究。

在高次曲線、 曲面的研究方面， 凱萊得到了一系列重要結果， 如他 1843 年得到的 “凱萊相交定理” (Cayley’s intersection theorem)、 關於高次曲線相交的 “凱萊 − 巴赫拉切定理” (Cayley-Bacharach theorem)。 1866 年， 在 “論平面曲線的高度奇異性” (*On the higher singulorities of a plane Curve*) 一文中， 他發現大量重要的定理， 其中涉及到尖點 (cusp)、 二重切線、 拐切線、 結點的大量性質。 他還仔細考查十七、 十八世紀 I. 牛頓 (Newton)、 J. 斯特靈 (Stirling)、 G. 克萊姆 (Cramer) 所討論的三次曲線的性

質， 以及十九世紀 J. 普呂克 (Plücker) 的三次曲線理論， 他系統地給出兩個不同的三次曲線研究綱領的關係。 他在 1849 年發現， 每個三次曲面上恰好存在二十七條直線 (每一條直線代表一類)， 其中包括某些虛直線； 在一條非奇異的四次平面曲線上， 恰好存在二十八條雙切線。 這些重要工作， 爲後來幾何學的研究提供了重要線索， 不少工作爲後來的數學家所發展， 如 “凱萊 − 塞蒙定理” (Cayley-Salmon theorem) 等。

在曲面的代數幾何中， 凱萊不僅由於其不變量理論的創造奠定了直至今天的發展方向， 他還在 1869 年和 1871 年的論文中研究了曲面的算術虧格等問題， 得到了一些比較重要的結果。

凱萊在十九世紀下半葉群論的發展中起了十分重要的作用。 在群論的創造者 E. 伽羅瓦 (Galois) 及當時相當多的數學家的群論研究中， 置換群居於中心地位， 甚至有不少人認爲群論就是研究置換群。 第一個改變這種狀況的是凱萊， 他首先認識到， 置換群的概念可以推廣。 在 1849 年發表的 “關於置換群的註記” (*Note on the theory of permutations*) 中， 他引進了抽象群的概念， 且以後在 1854、 1859 年發表的兩篇文章中更進一步討論了這一問題。 他將一個一般的算子符號 θ 作用於一組元素 x、 y、 z、 $\cdots$， 這樣子作用的 θ 產生了關於 x、 y、 z、 $\cdots$ 的一個函數 x'、 y'、 z'、 $\cdots$。 凱萊指出，θ 可以是一個置換， 也可以是其它的運算。 抽象群包含許多算子， 如 θ、 ϕ、 $\cdots$， $\theta\phi$ 是兩個算子的複合作用 (乘積)， 複合是可結合的， 但不一定是可交換的， 即 $\theta\phi$ 的複合結果不一定等於 $\phi\theta$ 的複合結果。 他指出， 在抽象群理論中， 群的元素的特性並不重要， 一個群是完全確定的， 如果它的所有元素的可能的乘積是已知的或可確定的。 用凱萊自己的話來說就是：“一個符號 (算子符號) 的集合，1、 α、 β、 $\cdots$ 它們全不相同。 如果它們中任意兩個的乘積 (不考慮其次序)， 或者任一符號的自乘結果， 仍然屬於這個集合， 那麼就說它組成一個群。”

由此出發， 他在論文 “關於群論” (*On the theory of groups， as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$， 1854 年、 1858 年分兩次發表) 中， 第一次以乘法群的形式列出了一個群的元素。 他舉出矩陣在乘法下， 四元數在加法下構成群的實例， 來闡述抽象群 (不同於置換群)。 但凱萊對抽象群概念的引進在十八世紀五十年代沒有引起人們的注意， 可見他的理論的確是超越時代的。 他發展的矩陣論、 他關注的四元數當時也是新的數學內容， 而他已將這些數學成就用來作爲創造新數學理論的素材。

凱萊繼續研究群論， 並在《大英百科全書》(*English cyclopaedia*) 中按他的抽象群概念撰寫 “群論” 詞條。 1878 年， 他又連續發表了四篇有關抽象群的論文， 繼續強調一個群可以看作一個普遍的概念， 而不必局限於置換群， 他指出雖然每個有限群可以表示成一個置換群， 但抽象群更爲重要。 在 1878 年， 凱萊還研究了找出具有給定階的群的全體的問題。 這些文章發表後， 很快在數學界引起了反響， 數學家已接受了他的觀念並進行了大量卓有成效的工作。

由於凱萊的數學成果十分豐富， 所撰寫的論文數量多且涉及面廣， 又有相當高的水準， 因此在數學中的衆多領域都有以凱萊命名的定理、 公式。 他曾研究微分方程的奇解問題， 並在 1872 年將完整的奇解理論發展成了現代的形式。 在 1886 年， 他撰寫了關於線性微分算子理論的文章， 在多篇論文中討論了與此相關的問題。 凱萊在組合拓撲學方面也進行了一些工作， 尤其是在有關地圖問題的研究方面。 1879 年， 他發表了研究 “四色問題” (four-color-map problem) 的論文， 這是關於四色問題的第一篇研究論文， 近一百多年來， 這一問題引起了數學家們廣泛的研究。 他對橢圓函數理論等也做出了特殊貢獻。

凱萊寫了一系列研究天文學的論文， 關於月球和行星理論中的攝動函數是其研究重點。 與英國天文學家 J.C. 亞當斯 (Adams) 完

全獨立， 凱萊研究了地球運動軌道偏心率的變化， 得到了月亮平均運動的特徵加速度。 不僅如此， 他還給出了一種新的、 更加簡單的解決這些問題的方法， 其中引入了偏心率的變差。 對於亞當斯計算出的月亮平均運動的特徵加速度的新值， 凱萊經過另外一種獨立的方法給予了證明。 相對來說， 他在天文學方面的工作對當時的天文學家沒有產生太大的影響。

凱萊富有深遠意義的創造性的數學成就， 不僅對數學發展產生了深遠的影響， 而且爲物理學的研究準備了必不可少的工具， 這種對物理學的影響甚至是超越時代的。 凱萊開創的不變量理論， 不僅在數學中成爲重要而基本的內容， 而且在二十世紀通過微分不變量對物理學的研究產生了直接的影響。 他創造的矩陣論， 給出了矩陣乘法的特殊規則以及不滿足交換律的特徵。 P.G. 泰特 (Tait) 評價矩陣論的創造是 “凱萊正在爲未來的一代物理學家鍛造武器。” 的確， 在凱萊矩陣論的創造性工作六、 七十年後， 1925 年， W. 海森伯 (Heisenberg) 發現， 矩陣代數正是量子力學中必不可少的重要工具。 著名的物理學家 J.C. 麥克斯韋 (Maxwell) 這樣評價凱萊：“他的精神擴展了普通空間， 在 n 維空間中繁榮昌盛。”

作爲一位十九世紀受人尊敬的學者， 凱萊有著許多優秀的品質。 他性情溫和， 判斷冷靜沉著， 總是與人爲善， 他那律師的氣質使他能面對任何武斷而心平氣和地處理各種事宜。 對於年輕人和初學者， 他總是給予幫助、 鼓勵和正確的忠告。 他一生對無數的學者給予了無私的幫助， 他們中有西爾維斯特、 泰特、 塞蒙、 F. 高爾頓 (Galton)(優生學創始人) 等著名學者。 他爲某些學者的著作寫整章的內容而不留名， 泰特的名著《四元數》(Quaternions) 的第六章就是凱萊寫給他的信件。 1885 年， 功成名就的西爾維斯特在他於七十一歲高齡就任牛津大學數學教授的演講中， 衷心地讚揚道：“凱萊， 雖然比我年輕， 卻是我精神上的前

輩－他第一個打開了我的雙眼，清除了我眼裡的雜質，從而使它們能看見並接受我們普通數學中更高深的奧秘。”

熱愛生活、享受生活，是凱萊這位數學家與衆多數學大師不一樣的方面之一。他廣泛地閱讀過許多羅曼蒂克式的文學作品，愛好旅遊和領略大自然的美景，徒步旅行使他周遊了大半個歐洲與美國。他終生都喜歡創作水彩畫，並顯示出了一定的天才，他對建築和建築繪畫也頗有研究。對大自然、對生活的美的享受，決定了他的數學觀，他對數學所做的下述描述反映了他那富有情趣的生活的影響：“很難給現代數學的廣闊範圍一個明確的概念。‘範圍’這個詞不確切。我的意思是指充滿了美妙的細節的範圍－不是一個像一馬平川的平原那樣單調乏味的範圍，而是像一個從遠處突然看到的遼闊美麗的鄉村，它能經得起人們在其中漫步，詳細研究一切山坡、峽谷、小溪、岩石、樹木和花草。但是，正如對一切事物一樣，對一個數學理論也如此－美，只能意會不可言傳。”

從 1841 年二十歲開始發表第一篇數學論文，凱萊不停地進行創造性的研究，直到去世的那一週，長期患病的痛苦也不能使他停止。接替凱萊擔任劍橋大學薩德勒數學教授的 A.R. 福賽思 (Forsyth) 寫道，凱萊“不僅僅是一位數學家。他懷著唯一的目標……直到生命的最後一刻，始終堅持他一生爲之奮鬥的崇高的理想。他的一生對於那些認識他的人有著重大的影響：他們欽佩他的品格，猶如他們敬重他的天才。在他去世時，他們感到，一個偉大的人從這個世界消失了。”

文　　獻

原始文獻

[1] *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, 13 vols, indexed in a 14 th. Cambridge, England, 1889－1898。

[2] J.D. North, *Cayley, Arthur*, 見 *Dictionary of scientific biography*, Vol. III, 1971, 162－170。

[3] E.T. Bell, *Men of mathematics*, Dover publications, New York, 1937。

[4] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972。(中譯本：M. 克萊因，古今數學思想，上海科學技術出版社，1979－1981；數學史－數學思想的發展，九章出版社，1978)。