戴　德　金

戴德金， R. (Dedekind， Richard) 1831 年 10 月 6 日生於德國不倫瑞克 (Braunschweig)； 1916 年 2 月 12 日卒於不倫瑞克。 數學。

戴德金之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Dedekind.html

戴　德　金

胡　作　玄
(中國科學院系統科學研究所)

戴德金，R. (Dedekind，Richard) 1831 年 10 月 6 日生於德國不倫瑞克 (Braunschweig)；1916 年 2 月 12 日卒於不倫瑞克。數學。

戴德金的父親是一位法學教授，母親是一位教授的女兒。戴德金是四個孩子中最小的，七歲起在家鄉上中學。開始他對化學和物理學很有興趣，而把數學只看作是輔助性學科。但是，他很快就感覺到物理學缺少條理和嚴格的邏輯結構，於是就專心學習數學。1848 年戴德金進入了卡羅琳學院 (Collegium Carolinum)，這也是 C.F. 高斯 (Gauss) 的母校。在這裡，他學到了解析幾何、代數分析、微積分以及力學和自然科學。1849 – 1850 年間，他還給低年級學生授課。1850 年復活節，他進入格丁根大學學習時，已經有了相當的根底。當時格丁根大學剛建立起數學和物理學討論班，在這裡他跟 M.A. 史泰納 (Stern) 學到數論的基礎知識，跟 W. 韋伯 (Weber) 學習物理。1851 年 B. 黎曼 (Riemann) 也參加討論班，他們很快結下了深厚的友誼。戴德金在大學裡還學習物理和天文，並聽過高斯講的最小二乘法，還聽過他的高等測量學以及其他人開的課程，他只上了四個學期，就在高斯指導下準備博士論文，論文題目是“關於歐拉積分的理論” (*Über die Elemente der Theorie der Eulerschen Integrale*) 對此高斯寫下了如下的評語：“戴德金先生準備的論文是關於積分學的一項研究，它決不是一般的。作者不僅顯示出對有關領域具有充分的知識，而且這種獨創性也預示出他未來的成就。作爲批准考試的試驗論文，我對這篇論文完全滿意。”這時戴德金覺得雖然他的知

識教中學綽綽有餘， 可是他總覺得格丁根的課程度不高。 在格丁根， 聽不到 P. 狄利克雷 (Dirichlet)、 C. 雅可比 (Jacobi)、 J. 施泰納 (Steiner) 講授的高等數論 、 高等幾何 、 橢圓函數 、 數學物理等最新的課程， 因此他花兩年時間又彌補他受教育的不足。 1854 年夏天， 他取得大學講課資格， 年底開出概率論和幾何兩門課程。 1855 年高斯去世後， 狄利克雷來到了格丁根， 接替其教授職位。 戴德金自己講課， 同時也聽狄利克雷講授的數論 、 位勢理論 、 定積分及偏微分方程等課程， 獲益匪淺。 他很快同狄利克雷有了密切的交往， 並同他進行了多次富有成果的討論。 據戴德金後來回憶， 狄利克雷把他變成一個新人並大大擴展了他的學術方面的視野。 他也參加了狄利克雷和他的朋友們的社交活動。 1855 年冬季到 1856 年， 戴德金聽黎曼講授了阿貝爾函數和橢圓函數的課程， 他自己也在 1856 − 1857 年和 1857 − 1858 年冬季學期， 先後給四個學生講授伽羅瓦理論。 他可能是第一個開伽羅瓦理論課的人。 在講課中， 他引進了域的概念， 並且把置換群的概念用抽象群的概念來取代。

1858 年戴德金被任命爲瑞士蘇黎世綜合工業學院教授， 在講授微積分的課程中深感到分析基礎的薄弱， 從此開始實數理論基礎的研究。 1859 年 9 月， 戴德金陪黎曼到柏林大學訪問， 在這裡他遇到了 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)， 也遇到了 L. 克羅內克 (Kronecker)。 1862 年， 他被家鄉的高等工業學院聘請爲教授， 於是他返回故鄉， 一直在不倫瑞克工作， 直到 1916 年 2 月 12 日去世。 他終生未婚， 同他二姐住在一起。 在他親屬的關懷下， 他有充分的時間和自由從事基礎數學的研究工作， 但是不倫瑞克是個小地方， 他同別人的交流不是太多。 他有時也到外地旅遊。 曾在 1874 年遇到了 G. 康托爾 (Cantor)， 兩個人的思想交流和書信往來推動了集合論的誕生。

他在格丁根及瑞士期間只發表了十篇論文， 大部分是與他講

的課有關的小題目。他關心他所講的課的基礎的嚴密性。爲此花費了大量時間。講課之餘，他致力於狄利克雷的 1856 – 1857 年度的數論講義和黎曼全集的編輯工作。在這個過程中，也進行自己的創造。狄利克雷的《數論講義》(*Vorlesungen über Zahlen theorie*) 第一版在 1863 年刊行，除了狄利克雷的講課筆記，他還加進一些新材料。而在 1871 年第二版中，他加進完全由自己寫的附錄 X，他首次發表了自己的域論及理想理論以及由此建立的一般的代數數論。而獨立的、系統的代數數論是他在 1876 – 1877 年用法文發表的《代數整數論》(*Sur la Théorie des Nombres entiers algébrigues*)。其部分內容收入《數論講義》1879 年第三版。而更爲完整的理論則作爲 1894 年第四版的附錄 XI 發表，這是他自己在代數數論研究方面的定稿。

1866 年黎曼去世後不久，黎曼夫人即委託戴德金處理黎曼的遺稿，並設法編輯出版。戴德金很快即首次發表黎曼三篇重要論文：關於三角級數的、關於幾何假設的及關於電動力學的。它們都立即引起極大反響。黎曼其餘的遺稿有的很亂，有的分散在文章中，有的發表，有的沒有發表。雖然他很努力理解黎曼的思想，但他承認有許多困難。黎曼繼承人 A. 克萊布什 (Clebsch) 1872 年計劃出版黎曼全集，並委託他到格丁根進行三年的主編工作，這事由於戴德金的忙碌及克萊布什的早逝而未能辦成。1874 年 11 月起，餘下的工作由 H. 韋伯 (Weber) 獨自完成，最後黎曼全集第一版在 1876 年出版。

戴德金從 1858 年開始教授初等微積分時，就打算爲微積分奠定一個穩固的基礎，他在 11 月 24 日得出了自己的連續性及無理數理論，並在幾天之後就告訴了他的朋友 H. 杜瑞熱 (Durege)，但直到 1872 年才以小册子形式《連續性與無理數》(*Stetigkeit und Irrationale Zahlen*) 出版。這本書的問世，連同魏爾斯特拉斯的分析基礎的傳播以及康托爾的集合論的誕生，標誌著現代數學新時

期的來臨。 戴德金無理數概念是建立在承認有理數爲已知的基礎上， 於是他再接再厲， 於 1872 年到 1878 年進一步研究正整數的基礎， 他的結果寫於 1888 年出版的《數是什麼? 數應當是什麼?》(*Was sind und was sollen die Zahlen*?)， 這本書有很大影響， 特別是影響 G. 皮亞諾 (Peano) 得出其著名的算術公理。

無理數及正整數理論

無理數理論見於 1872 年出版的《連續性與無理數》一書。 該書首先研究直線的連續性， 特別是區別開稠密性與連續性， 然後把直線與實數對應起來， 最後定義戴德金截斷或分割。 作者的思想清楚地表達在下面的引文中： “上面把有理數域比做直線， 結果認識到前者充滿了間隙， 它是不完備的、 不連續的， 而我們則把直線看成是沒有間隙的、 完備的和連續的。 直線的連續性是什麼意思? 這個問題的答案必須包含研究所有連續區域時所根據的科學基礎。 只是泛泛而談其最小子集的不間斷的連續性， 不會產生什麼結果。 我們必須要有連續性的一個精確定義， 使它可以成爲邏輯推理的基礎。 長時期以來， 我對這些事情進行了深入思考， 但始終沒有取得成果， 一直到最近我才發現我所要尋求的答案。 不同的人對於我的發現將會有不同的判斷， 但我相信大多數人都會覺得它平凡無奇。 在上一段中我曾經指出， 直線上每一點 p 都將直線分成兩部分， 使得其中一部分的點都在另一部分的左方。 我確信， 連續性的實質就在於它的反面， 也就是下面的原理： 如果直線上所有的點都屬於兩類， 使得第一類中每一點都在另一類中每一點的左方， 那麼就存在唯一的一個點， 它產生了把直線分成兩部分的分劃。” (《全集》III， 322)

戴德金的無理數理論的核心是他的 “截斷” 或 “分割” (Schnitt) 概念。 一個截斷把所有有理數分成兩類， 使得第一類中每一個數都小於第二類中的每一個數； 如果這個截斷不 “對應” 於一個有理

數， 那麼它就 “定義” 一個無理數。

假設我們已經指定某些規則， 它把所有有理數分成兩類 (比如說 “左” 類和 “右” 類)， 使得右類中的每一個數小於左類中每一個數， 在這個假設之下， 下面三種互相排斥的情形只有一種是可能的。

(A) 在右類中可以存在一個數大於該類中其它每一個數。

(B) 在左類中可以存在一個數小於該類中其它每一個數。

(C) 在 (A)、 (B) 中所講的數 ([A] 中最大、 [B] 中最小) 都不存在。

可能導出無理數的是 (C)。 因爲， 假如 (C) 成立， 我們假設的規則就在所有有理數的集合中 “定義” 一個確定的中斷或 “截斷”。 彷彿左類和右類趨於交會在一起。 但是爲了使兩類交會， 這個 “截斷” 必須用某個 “數” 塡補起來， 但是由 (C)， 不可能由有理數塡補。 這樣一來這個截斷就定義了一個無理數。 接著他給出一個截斷大於另一個截斷的定義， 在定義了不等關係之後， 證明實數具有下列性質： (1) 若 $\alpha > \beta$ 且 $\beta > \gamma$， 則 $\alpha > \gamma$。 (2) 不同實數 α 及 γ 之間存在無窮多個數。 (3) 如果實數全體被劃分爲兩類， 且一類中的每一個數都小於另一類中每一個數， 則必有一個且僅有一個數產生這個截斷。

有了實數的截斷定義之後， 自然可以定義兩個截斷的加法及乘法， 它們滿足交換律和結合律。 這樣原來沒有嚴格證明的公式 $\sqrt{6} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$ 也就迎刃而解了。

在 1872 年的小書《連續性與無理數》中， 主要的問題是闡述連續性的概念， 爲此， 戴德金定義無理數並把無理數加入到有理數中成爲完整的實數集合， 這些都是建立在有理數爲已知的基礎上。 從 1872 年到 1878 年， 連續性問題已經解決， 他開始深入下一步的問題 − 有理數的生成問題， 實際上是正整數的生成問題。 在《數是什麼? 數應當是什麼?》一書中， 戴德金闡述了他的

正整數理論。 在序言中， 他說明了自己的觀點： 他認爲， 數論是邏輯的一部分， 數的概念完全不依賴於空間和時間的表象或直觀， 而是一種純粹思想規律的直接產物。 他對書名《數是什麼? 數應當是什麼? 》的答案是 “數是人類心智的自由創造， 數作爲一個工具使我們對於各種各樣的事物能夠更容易、 更精確地掌握”。

這本書分爲 14 章， 戴德金首先細緻地討論了類的概念 (他用的詞是系統 Systeme， 實際上是集合)。 他敍述類的併及交、 一類到另一類的映射、 “相似映射” (不同元素總映射到不同元素上)。 他引進重要的概念是關於一映射的 “鏈”， 如果 ϕ 是一類 S 到其自身中的映射， S 的一個子類 K 稱爲 (關於映射 ϕ 的) 鏈， 如 $\phi(K) \subset K$ (用近代詞彙來講， K 在映射 ϕ 下是封閉的)。 對於任意一個子類 A， 他定義 A 的鏈爲包含 A 的所有鏈的交， 用 A_0 表示。 他再次指出無窮類和有窮類的差別， 即無窮類總存在一個到自身的眞子類的相似映射， 而有窮類則不存在這種映射。

他引進的另一個重要概念是單無窮類 N， 即 N 存在一個 N 到 N 自身中的映射 ϕ， 使得 N 是不屬於 $\phi(N)$ 的單元素的鏈。 在這裡戴德金顯然沒有對單元素及單元素類加以區別。 他在 71 節給出一類 N 爲單無窮的條件， 即存在一個映射 ϕ 和 N 中一個元素 1 滿足

(α) $\phi(N) \subset N$，

(β) $N = 1_0$，

(γ) $1 \notin \phi(N)$，

(δ) 映射 ϕ 是相似映射。

接著在 73 節他就定義， 一個單無窮類 N 的元素爲正整數或序數或簡單說就是數。 這樣的 N 可以按照 ϕ 排成一個順序， 成爲一個數列， 第一個數是 1、 第二個數是 $\phi(1)$、 第三個數是 $\phi(\phi(1))$、 $\cdots$。 所以戴德金的映射 ϕ 就是把 N 中的一個元素 x 映射到它的後繼 $\phi(x)$ 上。 而且在這個定義中，已經抽去元素的具體內

容， 賦予數一個抽象的定義。 他沒有明確說， $(\alpha)-(\delta)$ 就是數的公理， 但他由這些特徵性質導出正整數的其它性質， 特別是， 他在 80 節證明數學歸納法， 不難看出皮亞諾的公理有著對應關係：

$$\begin{array}{ccc} (2) & \longleftrightarrow & \alpha \\ (3) & \longleftrightarrow & \delta \\ (4) & \longleftrightarrow & \gamma \end{array}$$

在第 10 章中證明所有無窮系是數列， 因此它們彼此相似， 這也就唯一定義了正整數列。 從第 11 章到第 13 章， 它由上述 $(\alpha)-(\delta)$ 定義了數的加法、 乘法、 冪， 並證明簡單的算術性質。 最後一節討論有窮類的計數、 基數及序數以及它們的初等性質。

代數數理論及代數函數論、 理想理論

戴德金奠定了代數數的系統理論。 代數整數是通常有理整數的推廣。 代數整數的特殊情形已見於高斯關於四次互反律的研究， 他在 1832 年引進複整數， 即 $a+b\sqrt{-1}$ 型的數， 其中 a 、 b 是有理整數。 對這種複整數， 他證明了質因子唯一分解定理 (算術基本定理)。 1844 年 E.E. 庫默爾 (Kummer) 在研究費馬大定理時引進分圓整數， 爲了彌補有些分圓整數因子不唯一分解， 他引進理想數的概念。

庫默爾的理想數相當於今天的除子 (divisor)， 而分圓域中的整數稱爲複整數 (或分圓整數)， 他證明對於分圓域， 關於理想數的唯一因子分解定理成立。 兩個理想數稱爲等價， 如一個理想數可表爲另一理想數與複整數之積， 庫默爾證明理想數在這種等價之下分爲等價類。 分圓域的類數是有限的。 戴德金把庫默爾的理想數加以推廣， 他注意到， 一個理想數由它所整除的所有複數整數決定， 於是他把理想數看成它所整除的所有複整數的集合， 而把後者命名爲理想 (ldeale)。 他證明， 在所有分圓整數子集中， 理想可由下面兩條性質刻劃：

(1) 一個理想中任何兩個分圓整數的和仍屬於這個理想。

(2) 一個理想中的分圓整數與任何分圓整數的乘積仍屬於此理想。

這樣，他完成從理想數到理想的推廣，也就是由數到集合的推廣，並且由上述兩條性質來定義。更值得注意的是戴德金的理想從分圓域推廣到任何代數數域，其後又推廣到任意數環乃至一般環上。由 1871 年到抽象代數學正式建立之前，理想理論成爲一個獨立的數學分支，有著各種各樣的應用。

戴德金在前人工作的基礎上，建立起系統的代數數論。在 1871 年出版的狄利克雷《數論講義》第二版上，他加進附錄 X，其中引進代數數及代數整數的概念，它們是滿足有理整係數代數方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的根，當 $a_0 = 1$ 時，則根稱爲代數整數。他證，代數整數經過加、減、乘之後仍是代數整數，而代數數經過加、減、乘、除之後仍然是代數數。這樣他定義了體 (Körper)，然後把有理整數的同餘理論推廣得出模 (Modul) 的概念，還推廣可除性理論得出質數及單元的概念。在附錄 X 的 § 163 節定義理想及質理想，這是代數數論最基本的概念。

戴德金的理想定義如下：如 K 是代數數域，K 中代數整數的集合 A 構成一個理想，如 α 和 β 屬於這個集合時，則 $\mu\alpha + \nu\beta$ 也屬於這個集合 (μ、ν 爲 K 中任何代數整數)。如理想 A 的每一元素可表爲 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$ (其中 λ_i 爲 K 中任意代數整數)，則稱 A 由 α_1、$\cdots$、α_n 生成，並表爲 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$。如 $n = 1$，即由一個整數生成的理想稱爲主理想。對於理想可以定義乘法：若 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$、$B = (\beta_1, \cdots, \beta_q)$，則

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \cdots, \alpha_i\beta_i, \cdots, \alpha_p\beta_q),$$

然後他定義整除與質理想的概念。

他進一步定義兩個理想的乘積， 並且得出理想論基本定理： 代數數體每個非單位的理想可唯一表示爲質理想的乘積， 由此明顯看出一般整數論的理論系統。 但是代數整數與有理整數的一個很大不同之處是一般代數整數卻不能唯一分解， 這反映在代數數域理想的類數問題上， 理想在等價關係下分成理想類， 對於二次域， 理想的分類相當於二元二次型的分類， 理想類的乘積相當於二元二次型的組合 (Komposition)。 狄利克雷在 1840 年應用解析方法得出二次域的類數公式。 戴德金對於一般的代數數域， 引進戴德金 ζ 函數

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{(N(a))^s} = \prod_{\beta} \frac{1}{(1-(N(\beta))^{-s}}$$

(其中 $\sum$ 過代數數論 k 的所有理想 a、 $\prod$ 過所有質理想 β、 N 表示範)， 並用它在極點 $s=1$ 的殘數來計算類數

$$\lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta_k(s) = gh \qquad \text{(全集 III， 175 − 176)}$$

其中 h 爲 k 的類數， g 爲與域 k 有關的常數， 這公式是以後計算類數的基礎。 戴德金早在 1871 年開始研究代數數域的分岐理論， 定義共軛差積 (他稱爲基本理想 Grundideal)， 得出兩條主定理， 1882 年證明質數 p 在代數擴域中分岐的充分必要條件的戴德金判別式定理。1882 年的論文 (《全集》I， 352) 曾提到推廣到相對代數數域上， 但後來未發表這方面的結果。 在戴德金的系統的代數數論 (特別是在狄利克雷《數論講義》第四版附錄 XI 所表述的) 基礎上， 希爾伯特從 1894 年起完成了代數數論大廈的建立。 另外， 戴德金在 1901 年發表的 “所有代數數域的置換” (*Über die Permutationen des Körper aller algebraischen Zahlen*) 一文中首次提到無窮次擴域， 這理論後爲 W. 克魯爾 (Krull) 在 1928 年所發展。

與代數數論相平行的是戴德金和 H. 韋伯 (Weber) 合作的《一變元代數函數論》(*Theorie der algebraischen Funktionen einer Verän-*

der lichen)。一變量代數函數論有多種表現形式及表述方法,它始於十九世紀初高斯、阿貝爾、雅可比關於橢圓函數的研究,黎曼在 1851 年把代數函數作爲黎曼曲面上的函數來處理,發展了函數論或超越方法的方向。其後從 1863 年起從克萊布什到馬克斯•諾特 (Max Noether) 發展了代數幾何方向,把代數函數作爲代數曲線來研究,而戴德金和韋伯與克羅內克則從不同角度開創了第三個方向,算術或代數方向,他們研究複數域 **C** 上的代數函數域。戴德金和韋伯在他們 1880 年完成、1882 年發表的著名論文中把代數數論和代數函數論作了對比:代數數域是有理數域添加代數方程的根的擴張,而一變元代數函數域則是有理函數域的擴張。定義完全平行於代數數論,他們接著定義整函數、模及理想。得出理想的乘積及唯一分解定理,這一切均爲代數數論的翻版。

與其有關,戴德金於 1877 年獨立於 F. 克萊因 (Klein) 引進模函數 $J(\tau)$ 的概念,由此預示了自守函數的重要理論。他還對純三次代數數域進行過細緻研究。

抽象代數學

戴德金是近代抽象數學的先驅。他或明顯或隱函地定義抽象代數許多基本概念,而且對研究抽象結構有著明確的理解。

1858 年他給有限群下一個抽象的定義。1877 年注意到模的抽象概念不一定非得與代數數聯繫在一起,只要每元素有逆元素並且運算可交換。同時他也推廣具體的理想及域的概念。1897 年他在研究群論中引進換位子及換位子群的概念,並證明一個群的換位子的集合構成正規子群。在他通信的啓發下,G. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 從 1895 年起發展了群的特徵標理論,形成群表示論的有力工具。在環論方面,他也有抽象環及單位 (可逆元) 的觀念。另外,他還是格論的創始人。他在 1899 年引入對偶群的概念,此即後來的格,並且開創了用格來研究群的結構的方

法。 他的抽象代數的思想後來爲 D. 希爾伯特 (Hilbert) 及埃米•諾特 (Emmy Noether) 大大發展， 但埃米•諾特認爲， 她的抽象代數理論 “在戴德金那裡已經全有了”。

戴德金終身淡漠自守， 不慕名利。 但是， 他的傑出工作越來越得到數學界的重視， 並使他獲得許多榮譽。 早在 1862 年，他已成爲格丁根科學院通訊院士。 1880 年在克羅內克的提議下，他成爲柏林科學院通訊院士。 1900 年成爲巴黎科學院通訊院士，1910 年成爲國外院士 (associé étranger)， 這對任何一位科學家來說都是一項殊榮。 此外， 他還是羅馬等地科學院的院士以及許多大學的名譽博士。 在不倫瑞克市政廳裡掛著他和高斯等人的肖像， 他們都是這個小城的驕傲。

E. 朗道 (Landau) 在 1917 年格丁根召開的紀念戴德金的講演中對他作了崇高的評價：“理查•戴德金不僅是一位偉大的數學家， 而且是從古到今整個數學歷史上眞正傑出的人物。 他是他那偉大時代的最後一位英雄， 高斯的最後一位學生。 他本人四十多年以來已經是經典作家， 不僅我們， 而且我們的老師乃至老師的老師都從他的工作中受到啓發。” 這可以說是對戴德金一生的眞實概括。

文　　獻

原始文獻

[1] R. Dedekind, *Gesammelte mathemafische werke, Robert Fricke, Emmy Noether*, Öystein Ore eds., Druck und Verlag von Frièdr, Vieweg & Sohn Akt.–Ges. Braunschweig, I, 1930, II, 1931, III, 1932。

[2] G. Cantor und R. Dedekind, *Briefwechsel*, Hermann, Paris, 1937

研究文獻

[3] W. Scharlau, *Richard Dedekind* 1831 − 1981, Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden, 1981。

[4] P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondemenfs des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976。

[5] E. Landau, *Richard Dedekind, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen* (1917), 50－70。