克 萊 因

克萊因，F. (Klein，Felix Christian) 1849 年 4 月 25 日生於德國的杜塞爾多夫 (Düsseldorf)；1925 年 6 月 22 日卒於德國的格丁根。數學、數學史、數學教育。

克萊因之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Klein.html

克　萊　因

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

克萊因， F. (Klein， Felix Christian) 1849 年 4 月 25 日生於德國的杜塞爾多夫 (Düsseldorf)； 1925 年 6 月 22 日卒於德國的格丁根。 數學、 數學史、 數學教育。

菲利克斯 • 克萊因出身於德國的萊因地區普魯士家庭。 他的祖父是位鐵匠， 父親是州長的私人秘書。 母親出身於亞琛工業資本家的家庭。 1857 年秋天， 克萊因進入了天主教文科中學， 受了八年的片面的文科教育， 只是在他朋友的家裡， 他才開始接觸到一些化學、 植物學、 動物學、 天文學以及工業技術方面的初步知識。 1865 年秋天進入波恩大學。 第一年他聽數學、 物理學的課不多， 主要聽植物學， 雖聽過 R. 李普希茨 (Lipschitz) 的初等數學課程， 但他貧乏的基礎知識既不能使他理解數學， 也引不起他對數學的興趣。 1866 年復活節， 他成爲 J. 普呂克 (Plücker) 的助手， 幫助他準備實驗。 普呂克原是一位數學家， 因爲受到 J. 施泰納 (Steiner) 的排斥， 轉而研究實驗物理學。 普呂克使他對數學和物理學產生了興趣。 這時， 普呂克又繼續進行關於解析幾何學的研究， 繼續自己先前的工作， 力圖把空間解析幾何建立在以直線爲元素的基礎上， 他正寫他的《基於以直線爲空間元素的新空間幾何學》(*Neue Geometriè des Raumes， gegründet auf der geraden Linie als Raumelement*， 1868 − 1869)。 克萊因積極協助這項工作， 在工作過程中， 逐步充實自己的知識。 不久普呂克於 1868 年 5 月去世， 這部著作只完成了第一卷。 在普呂克的指導下， 克萊因寫了博士論文 “線坐標的一般二次方程到典則形

式的變換” (*Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des Zweiten Grades Zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form*, 1868), 並於 1868 年 12 月 12 日獲得了博士學位。

1869 年初, 克萊因離開波恩前往格丁根, 協助接替黎曼的 A. 克萊布什 (Clebsch) 整理普呂克的遺著, 出版了他的《新空間幾何學》第二卷。他在格丁根從克萊布什那裡學到不變式論以及光學, 並完成了他的一篇重要論文, 發現一階和二階線性複形與庫默爾 (E. Kummer) 曲面有關。當時的數學中心在柏林, 於是克萊因在 1869 年 8 月底到柏林去。在這裡, 他結識了挪威來的 S. 李 (Lie), 兩人成爲終生密友。他還結識了從奧地利來的 O. 斯托爾茨 (Stolz), 從他那裡知道 Н. И. 羅巴切夫斯基 (Лобачевский) 的非歐幾何學。1870 年 2 月, 他在 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 的討論班上, 報告了 A. 凱萊 (Cayley) 關於射影距離的工作, 並提出把凱萊的工作推廣到非歐幾何學上, 但受到魏爾斯特拉斯的批評。1870 年 4 月, 克萊因和李結伴到巴黎, 並在巴黎科學院的院報上發表了他們在柏林的合作論文。在這篇論文中, 已經提出在某些變換下的不變性質, 成爲後來他們各自研究的出發點。李研究所謂連續變換群, 而克萊因研究的卻是離散變換群。在巴黎, 李與克萊因見到了法國數學家 C. 喬丹 (Jordan) 和 G. 達布 (Darboux)。當時喬丹的《代換論及代數方程論》(*Traité des substitutions et des equations algébraiques*, 1870) 剛剛出版, 而達布也剛完成了反演幾何學的研究, 這對他們後來的研究有著深遠的影響。不久, 普法戰爭爆發, 克萊因趕回德國報名參軍, 被編入波恩的急救團, 參加了 9 月 1 日和 2 日在梅斯和色當的戰役。由於傳染上傷寒, 被送回家。一直到 11 月中才康復, 並於 1871 年元旦第二次來到格丁根。1 月 7 日, 他取得授課資格, 在夏天同斯托爾茨的多次討論中, 越來越明確非歐幾何學是射影幾何學的一部分, 8 月份發表 “論所謂非歐幾何學” (*Über die* *sogenannte nicht-euklidische Geometrie* I) 的第一篇論文， 但受到哲學家及數學家的攻擊。 這促使他更深入地研究幾何學的基礎。

在克萊布什的推薦下， 1872 年 10 月他到埃朗根大學就任正教授， 不久克萊布什病逝， 他成爲克萊布什的學術研究及組織工作的繼承人。 他把克萊布什的朋友及學生吸引到自己的周圍， 接替他的《數學年鑒》(*Mathematische Annalen*) 的編輯工作， 協助編輯克萊布什的講義。 在大學評議會上他提出著名的埃朗根綱領 (*Erlangen Programm*) 即 "新近幾何學研究的比較考察"(*Vergleichende Betrachtangen über neuere geometrische Forschungen*)， 在埃朗根時期， 克萊因教課範圍仍然是幾何學， 但 "碰到的學生數量極少以及毫無研究空氣的環境" 使他非常失望。 不過與朋友及同事的交流大大擴大了他的眼界， 他的研究工作也從幾何學擴展到代數學、 分析學， 他與國外同行的交流也更加頻繁起來。

1873 年 4 月， 克萊因決定到英國， 參加英國科學促進協會召開的會議， 爲此， 他學習英文。8 月中旬， 他經過漢堡和愛丁堡， 到布拉德福德， 在那裡， 克萊因不僅結識了他慕名已久的凱萊和 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester)， 而且還結識了 R. 伯爾 (Ball) 和 W.K. 克利福德 (Clifford)。 伯爾關於螺旋面的理論和克利福德的工作， 對克萊因後來的工作有很大影響。 會議期間， 他第一次遇見偉大的英國物理學家 C. 麥克斯韋 (Maxwell) 和 P.G. 泰特 (Tait)， 他對英國的數學物理學留下深刻的印象， 後來， 多次在德國加以介紹。

1874 年， 他又到義大利去旅行， 先後見到 L. 克雷莫納 (Cremona)、 E. 貝爾特拉米 (Beltrami) 和 E. 貝蒂 (Betti) 等數學家， 在埃朗根最後一個學期， P. 哥爾丹 (Gordan) 來到埃朗根， 與他結下終生的友誼。 哥爾丹關於不變式論方面的研究， 對他很有影響。 克萊因到了慕尼黑以後， 兩個人還經常在星期天在埃朗根和慕尼黑的中間城市艾希施泰特相聚會， 這對他們倆人關於代數方程

的工作都有所促進。

1874 年 11 月，克萊因被任命爲慕尼黑工業大學教授，繼承 O. 黑塞 (Hesse) 的職務，同時，達姆施塔特工業大學的 A. 布里爾 (Brill) 也被任命爲該校教授。這是一個培養工程師和學院教師的學校，但是，德國的工業學院水準並不高，克萊因同布里爾一起，決心對工業學院的教學進行改革。1875 年他在離開埃朗根之前同安娜 • 黑格爾 (Anna Hegel) 結婚。她是大哲學家 G.W. 黑格爾的孫女，她的父親是埃朗根大學歷史學教授。克萊因夫婦共有一子三女。

克萊因在慕尼黑的研究工作是代數方程，接著是橢圓模函數理論，他獨立於 R. 戴德金 (Dedekind) 引進模函數 $J(\tau)$，克萊因是從橢圓積分引進，並稱之爲絕對不變量。在這期間，他研究黎曼的著作，並對拓撲學作出貢獻。他認爲這段時期是他最快樂、數學上最富創造性的時期，於此同時他培養出一些他最好的學生。

1880 年秋，他到萊比錫大學就任幾何學教授。他給未來大學教師開了系統的幾何學課程並把大學數學教學系統化，在 1881 年創辦萊比錫大學第一個數學討論班。在其上他報告了黎曼代數函數及其積分理論，用幾何觀點來整理黎曼的工作，開創了幾何函數論的方向。同時指導他學生 W. 迪克 (Dyck) 搜集製造數學模型。1881 年夏天，他見到初露頭角的法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 在《法國科學院院報》(*Comptes Rendus*) 上發表的三篇關於自守函數的論文，於是開始了他同龐加萊的通信，兩人之間有一場競賽。由於克萊因用腦過度，到 1882 年底身體完全垮了，斷斷續續休息了一年才恢復，這時已經不能幹多少創造性的工作了。他開始整理過去的工作，做小的改進，寫出專著《二十面體及五次方程解講議》(*Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*，1884)。從此之後，他主要從事教學及組織工作，這使他在德國及國際上進一

步產生巨大的影響。

1886 年春，他就任格丁根大學教授，從此開始一個新時期。他的創造性研究的黃金時代已經過去，雖然其後他也發表五、六十篇論文，但大多數都是以前論文的繼續和發展。他的興趣越來越轉向應用數學。他的活動更加趨向於教學工作、行政組織工作以及國際上的交流等方面。他的雄心是把格丁根建成世界上數學及物理學的中心。不過，在他剛到達時，這一切並不順利，一直到 1892 年 H.A. 施瓦茲 (Schwarz) 離開格丁根後，特別是 1895 年初 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的到來，格丁根逐步成爲世界數學及物理學的中心，而這個中心的無冕之王就是克萊因。1892 年在克萊因領導下，開始對格丁根大學教育制度及教學計劃進行巨大的改革，在這個過程中大大加強了應用數學的份量，陸續設立了應用數學的教授、副教授席位。

1890 年，在 G. 康托爾 (Cantor) 的倡議下，德國數學家聯合會正式成立。克萊因作爲創始者之一，積極參加其活動。他在 1894 年會上報告“黎曼及其對近代數學發展的意義”，並且於 1897、1904、1908 三年任大會主席。

1893 年爲紀念 C. 哥倫布 (Columbus) 發現新大陸四百週年，在美國芝加哥舉行世界工業博覽會，同時召開國際數學家大會。克萊因代表德政府參加這次會議，在大會上作“當前數學的狀況”的報告。他還攜帶十幾篇德國數學家的論文在大會上宣讀。會後，他又專門爲大會參加者作了十二次當前數學狀況的報告，對於美國數學家是個極大的促進。他先後培養許多美國數學家，例如 H.B. 范因 (Fine) 就是他的博士生。1896 年 10 月爲紀念普林斯頓大學建校 150 週年紀念，他再次赴美，並作了他新研究的“陀螺理論”的報告。他在這個問題上，用自守函數簡化了前人的證明，並給複數時間以新的解釋。他和 A. 索末菲 (Sommerfeld) 合著的四卷《陀螺理論》(*Über die Theorie des Kreisels*，1897 −

1910) 長期以來是這方面的標準著作。

1895 年他積極參與德國《數學百科全書》(*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*) 的籌劃工作， 1899 年起任力學部分的主編。 1896 年 5 月， 克萊因被授予樞密顧問官職務， 表明他在學術界的地位的提高。 1897 年 6 月， E.C.J. 謝林 (Schering) 去世， 他於是創立了兩個新的職位給 O.R.M. 布倫德爾 (Brendel) 和 E. 維謝爾 (Wiechert)， 布倫德爾是理論天文學教授， 在克萊因指導下， 負責編輯高斯的全集， 這個工作原來是由謝林開始的， 但未完成。 正是由於克萊因發起編輯高斯的全集的工作， 使得許多高斯生前沒有發表的手稿得以重見天日， 例如高斯關於橢圓函數和阿貝爾函數的工作的研究。 不過原來克萊因還計劃寫一部全面的詳盡的高斯的傳記， 但這個計劃未能實現。 克萊因同時在應用數學、 物理學和工程方面做了大量的組織工作， 1897 年在 C. 林德 (Linde) 等人的幫助之下， 建立起了一個機械實驗室， 而且建立一個教授席位， 由 R. 莫利爾 (Mollier) 擔任。1898 年 2 月， 克萊因創立了格丁根應用數學及物理學促進學會， 他仿照美國人的先例， 這個協會目的是在格丁根大學內部建立更多的應用數學的機構， 由工業界和大學以及私人的贊助人進行財政上的資助， 由此逐漸產生一系列的應用數學的分支， 首先是畫法幾何學， 其次是保險數學， 而且還有自己單獨的講課教室。 同年， 克萊因發表了一篇文章， 是關於建立一個單獨的數學研究所的規劃， 第二年該研究所開始工作， 以謝林爲主任， 由於數學系的擴張， 使得數學系的職位增多。 1900 年著名的荷蘭物理學家 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 被任命爲技術物理學教授。 1904 年， 克萊因又請來 C. 龍格 (Runge) 爲應用數學教授。 從此在格丁根形成一個純粹數學、 應用數學協調發展的黃金時代。

從 1872 年在埃朗根作就職演說時， 克萊因就談到數學教育， 其後特別從十九世紀末起， 克萊因積極參與國際和國內數學教育的

研究工作。

1910 年春天，他的健康情況開始惡化，經常請假。1912 年幾乎全年沒上班，於是 1912 年底他決定提前退休。退休之後，他開始講授數學史以及相對論等課程，有時就在自己家裡舉行。1918 年起，他開始編訂自己的全集，寫下了許多有歷史意義的評註。三卷全集在 1921 年到 1923 年陸續出版。他的《十九世紀數學史講義》(*Vorlesungen Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*，I，1926，II，1927) 在他去世後出版。

當時數學可以分爲兩大部分，純粹數學以及包括力學、數學物理學、天文學、測地學在內的應用數學。而純粹數學則可一分爲二：分析學及幾何學。分析學包括數論、代數、微積分及函數論。當時的代數主要問題仍然是方程論，群論並沒有形成一門學科，甚至抽象群的定義也沒有嚴格地給出。伽羅瓦理論剛剛爲大家知道，數學家所知道的群僅僅是代換群或置換群。另外一個熱門是不變式論，他研究齊次多項式 (型或形式) 在線性變換之下的不變式。一般的函數論剛剛處於萌芽狀態，函數論主要的題目是橢圓函數、超橢圓函數、阿貝爾函數。黎曼、魏爾斯特拉斯及克萊布什都是因爲他們在這些方面的工作而在當時獲得極大聲譽，這些具體問題已成爲數學家才能的試金石。

純粹數學的另一半是幾何學，從 1795 年到 1872 年，幾何學經歷了它的黃金時代。在這期間，古典的歐幾里得幾何學不再是幾何學的唯一對象，射影幾何學正式成爲一門新學科。接著是綜合方法與解析方法的對立，出現了綜合幾何學、解析幾何學及無窮小幾何學 (即微分幾何學) 三大分支。幾何學也從 “現實的” 三維歐幾里得空間及其中的點、線、面作了三方面的擴張：一是非歐幾何的創立，從而結束了歐幾里得幾何唯我獨尊一統天下的地位。二是高維幾何學的出現，開始研究四維及四維以上的空間及流形，這裡代數及解析方法更顯示其優越性。三是空間元素不再

局限爲點，而可以是線、圓、球等，形成線幾何學、球幾何學等等新學科，其中有些還在力學、光學等方面有著重要應用。

面對著這種複雜多樣的數學學科，克萊因的突出貢獻就是用群的觀點來統一整個數學，具體來說就是：

1. 提出埃朗根綱領，用變換群的觀點統一幾何學；

2. 用幾何學及群的觀點來研究五次及五次以上代數方程及線性常微分方程；

3. 用群與幾何學的觀點來研究函數論，發現自守函數，它是橢圓函數等的重大推廣。這樣通過群把幾何學、代數學、分析學連接成一個統一的數學整體，通過他和別人的工作，直接或間接聯繫上代數數論、不變式論、數學物理等等學科。

I　　幾何學與埃朗根綱領

在埃朗根綱領之前，克萊因從 1870 年到 1872 年發表過五篇論文，其中“論所謂非歐幾何學”(*Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie*，1871) 成功地把各種度量幾何歸結爲射影幾何。早在 1822 年 J.V. 龐斯列 (Poncelet) 在他的書《論圖形的射影性質》(*Traité propriétes projectives des figure*) 中已經指出，雖然射影性質及度量性質有所區別，射影性質在邏輯上更爲基本。K.G.C. 斯陶特 (Staudt) 在《位置幾何學》(*Geometrie der Lage*，1847) 中引進了“投”的概念，在擺脫長度與角度的情形下建立射影幾何學 (克萊因在 1870 年指出，斯陶特仍用到平行公理從而不夠純粹)。在普呂克的指導下，克萊因讀了凱萊的著作，後來成功地把平面中歐幾里得度量 (長度及角度) 用射影幾何的語言來表達，用凱萊的話講“度量幾何是畫法幾何 (按：指射影幾何) 的一部分，畫法幾何學就是全部幾何學。”克萊因在兩方面大大推廣了凱萊的結果：一是不僅歐幾里得幾何，而且把非歐幾何學也包括在射影幾何學內，二是在射影基礎上建立坐標。凱萊的坐標概念是

含混的， 其中有時也用到歐氏幾何的距離。 而斯陶特的書中又用到歐幾里得平行公理， 這使得他們由射影幾何得到度量幾何， 既不夠純粹也不能推廣。 克萊因去掉了平行公理， 使四個點、 四條直線或四個平面的坐標和交比都可以在純粹射影基礎上定義。 由於選爲絕對形的二次曲線或二次曲面的不同， 由同一距離及角度公式， 可以得出雙曲幾何、 抛物幾何及橢圓幾何， 它們分別是羅氏幾何、 歐氏幾何、 黎氏幾何。 這樣非歐幾何與歐氏幾何從射影幾何學中平行地導出來， 從而爲射影幾何學的公理化鋪平道路。

克萊因對非歐幾何學的貢獻還有， 建立平面非歐幾何學的平面模型， 例如在橢圓或圓之內建立平面非歐幾何學， 另外他還發現存在第二種橢圓幾何。 在通常球面模型中， 兩個點不唯一決定一條直線， 而他指出， 在所謂單重橢圓幾何中， 兩個點永遠唯一決定一條直線， 他還提出單重橢圓幾何的曲面模型 (半球模型)， 實際上這是射影平面。

克萊因成功地把各種度量幾何歸納爲射影幾何之後， 他便尋求更廣泛的觀點來刻畫幾何學的特徵而不只是根據射影的性質和度量的性質以及各種度量間的區分， 他提出的埃朗根綱領的基本觀點是： 每種幾何學都由變換群所刻畫， 每種幾何學所要研究的就是幾何圖形在其變換群下的不變量， 而一門幾何學的子幾何學就是研究原來變換群的子群下的不變量。 例如最一般的射影幾何學在二維的情形就是研究從一個平面上的點到自身的變換群下的不變量， 用射影坐標來表示， 每個變換形式爲

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\,, \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\,, \\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\,,
\end{aligned}
$$

其中係數 a_{ij} 是實數， 係數行列式不等於零。 這些變換組成射影變換群，射影變換群下的不變量有：線性、 共線性、 交比、 調和集以及保持爲圓錐曲線不變等。 射影變換群的一個子群是仿射

變換群， 仿射變換群保持一條直線 l_∞ 不變， 因此仿射幾何學是射影幾何學的子幾何學， 仿射變換下的不變量除了射影幾何學的不變量之外， 還有把直線變成直線， 平行直線變成平行直線等性質， 仿射幾何學雖然早已出現在 L. 歐拉 (Euler) 及 A.F. 莫比爾斯 (Möbius) 的著作中， 但克萊因在他的綱領中並沒有提到。 克萊因進一步考慮了比仿射變換群更小的歐幾里得變換群， 他稱之爲等仿變換群， 實際上其變換就是旋轉、 平移和反射， 在這種變換群下的不變量是： 長度、 角度以及任意圖形的大小和形狀。 類似地， 他進一步刻畫雙曲度量幾何， 也就是研究射影平面上使一個任意的、 實的、 非退化的二次曲線保持不變的所有變換所構成的子群下的不變量， 這個子群叫做雙曲度量群， 相應的幾何學叫做雙曲幾何學， 其中的不變量是與合同有關的那些量。 同樣， 單純橢圓幾何學所研究的變換是使射影平面上一個虛橢圓不變， 而二重橢圓幾何學則要複雜一些。

克萊因進一步推廣了這種觀點， 他提出更一般的問題， 給了一個流形和這個流形的一個變換群， 以在這個變換群的變換之下其性質保持不變的觀點研究這個流形的實體。 在這廣義的意義下， 克萊因考慮的不僅僅是通常以點爲基礎的幾何學， 而且考慮以任何一種點集， 特別是一條曲線或一個曲面爲基礎的幾何學， 例如線幾何學和球幾何學。 但是只要取同一變換群爲幾何學研究的基礎， 那麼這種幾何學的內容就不會改變， 所以像流形的維數只是做爲某種次要的東西出現。 從這種觀點出發他不僅把圓幾何及球幾何也看成研究某些射影變換群的某些子群的不變性質， 而且還更一步擴大他的綱領的應用範圍： 代數幾何學研究雙有理變換下的不變性， 拓撲學研究連續變換下的不變性等。 雖然並非所有幾何學都可以納入克萊因的分類框架， 但是這種觀點至今對幾何學仍有影響。 特別是強調變換下的不變性， 對於力學及物理學思想的推動， 大大超出了數學的範圍。

II 代數學與 "超伽羅瓦綱領"

十九世紀的代數學中心問題是解代數方程。 N.H. 阿貝爾 (Abel) 及 É. 伽羅瓦 (Galois) 作出最大的貢獻： 一方面他們證明一般高次代數方程不可能用根式解， 另一方面給出那些五次方程可解的判據。 至此， 對於五次及五次以上的方程研究並未結束， 數學家仍進行兩方面的研究： 一方面是通過超越函數來解方程， 另一方面研究方程的群與方程的性質。 這兩方面都涉及一個任務， 找出根與係數的函數關係並加以簡化。 歷史上簡化的方法有兩條。 一是方程的變換： 最早是契恩毫斯 (E.W. Tschirnhaus) 變換， 後來英國數學家 G.B. 杰勒德 (Jerrard) 獨立發現 1786 年瑞典人 E.S. 布靈 (Bring) 把五次方程化簡爲只依賴於一個係數的結果， Ch. 埃爾米特 (Hermite) 把它化爲標準形

$$t^5 - t - A = 0 。$$

1858 年埃爾米特通過橢圓函數給出其明顯解。 二是構造預解式。 這種方法始於 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 1771 年的工作。 但是這種預解式往往帶來更大的困難而不是本質的簡化。 只有到 1858 年 L. 克羅內克才得出一個六次的預解式， 可以從另外一個途徑同橢圓函數掛起鉤來。 克萊因發現， 克羅內克實際上是做出兩個發現： 1. 由一般五次方程加上判別式的平方根， 可以得出一個預解式， 它是雅可比方程； 2. 這樣得到的雅可比方程可以簡化爲標準型， 從而可以用橢圓函數解。 克萊因早在 1871 年就把方程論的主要思想幾何化， 即把正多面體群與方程的群與預解式聯繫起來。 對於五次方程則與二十面體群聯繫在一起。 通過適當的坐標選擇， 二十面體群可以表示爲一個複變元的分式線性代換， 這樣五次方程解可以如下得出：

1. 把五次方程化爲 "主五次方程"

$$y^5 + 5\alpha y^2 + 5\beta y + y = 0 。$$

2. 引進

$$p_v = y_0 + \varepsilon^v y_1 + \varepsilon^{2v} y_2 + \varepsilon^{3v} c y_3 + \varepsilon^{4v} y_4 \text{，}$$
$$v = 0、1、2、3、4$$

有

$$\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 = 0 \text{，} \end{cases}$$

後一方程爲一個四次曲面方程， 它有一個變換方程， 在五個根的 120 個置換之下也即 p_1 、 p_2 、 p_3 、 p_4 的 120 個線性代換之下不變。 此即二十面體方程。

3. 對於二十面體方程， z 是方程的係數 α 、 β 、 γ 及判別式平方根的有理函數。 這樣可以計算出五次方程的根 y 。

克萊因利用二十面體群研究五次方程的方法， 進一步運用於高次方程， 哥爾丹戲稱之爲 "超伽羅瓦綱領"， 即 "把解方程的問題歸結爲求最少可能變元的有限線性代換群相聯繫的 "形式問題"。 所謂形式問題， 就是對於一個給定的射影變換群 G ， 只通過在 G 中存在的不變式來計算 n 維點的坐標。 因此， 解代數方程的問題歸結爲給定群 G 的形式問題。

1884 年， 克萊因寫了一本著作《二十面體及五次方程解講義》， 這本書大部分材料都在論文中發表過， 但是這本書寫得簡潔明瞭， 同時還討論了不變式問題。 這本書出版後， 哥爾丹進一步地簡化了書中的材料， 他後來還把克萊因的理論推廣到六次方程。 關於六次方程的研究， 克萊因交給了他的學生來作， 特別是萊沙特 (Reichardt) 和 F.N. 科爾 (Cole)。 克萊因還曾打算用四元的線性學來研究六次方程， 但實際上有一位名叫 H. 瓦倫替那 (Valentiner) 的人在 1889 年發現了 360 階的三元線性單群， 由於這篇文章首先是用丹麥文發表的， 所以沒有引起注意。 直到 1896 年， A. 維曼 (Wiman) 注意到了這個事實， 並且證明這個群同六個字母的偶置換群同構， 這件事引起了普遍的驚異。 克萊因在一封

給 G. 卡斯特爾諾沃 (Castelnuovo) 的信中證明六次方程的一般解可以使得它依賴於這個 360 階的單群而不必依賴於一個四元群， 1899 年它發表了， 這篇文章結束了他關於代數方程的工作。

III　自守函數論

克萊因關於代數方程的幾何理論涉及到有限變換群很快地推廣到無限的離散變換群上， 這導致自守函數論的產生。 自守函數是過去熟知的三角函數、 橢圓函數的推廣， 最簡單的情形是如下的分式線性變換

$$z' = \frac{az+b}{cx+d}\text{， 其中}a\text{、 }b\text{、 }c\text{、 }d\text{是實數， 且}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

所構成的群 Γ， 當群是不連通的時， 在這些變換下不變的亞純函數 (即對於 $z \in \mathcal{H}$ 上半複平面， $f(z) = f(z'))$ 稱爲自守函數。 自守函數的名稱是克萊因在 1890 年在 "一般拉梅函數理論" 一文中提出的， 後來得到國際上的公認。 但系統的自守函數理論是龐加萊在 1881 年到 1884 年系統闡述的， 這在某種程度上使克萊因的貢獻黯然失色。 據克萊因自述， 他關於自守函數的研究開始於 1874 年， 當他看到龐加萊在 1881 年初發表的三篇關於自守函數 (龐加萊稱爲富克斯函數) 的短文時， 他指出自己從 1878 年發表的五篇關於橢圓模函數理論的文章。 從 1881 年 6 月到 1882 年 9 月， 兩人通了二十五封信， 進行了友好的 "競爭"， 一直到 1882 年底克萊因病倒爲止。

克萊因對於自守函數的貢獻：

1. 引進橢圓模函數的基本域的概念， 這是橢圓函數週期四邊形及二十面體群相應的圓弧三角形的自然推廣。 但是龐加萊考慮更一般的基本域， 並獨立於戴德金 (1877) 發現基本不變量 $J(\tau)$， 它取基本域內的每個值只有一次， 從而所有橢圓模函數都可表爲 $J(\tau)$

的有理函數。

2. 進一步研究 Γ 的有限指標子群，即同餘子群：Γ 中滿足 $a\equiv d\equiv +1$，$b\equiv c\equiv 0 \pmod m$ 條件的所有變換構成的子群 Γ_1，最小可能的 m 稱爲 Γ_1 的級。同餘子群與數論密切相關。

3. 在龐加萊的暗示下，1882 年克萊因 “證明” 了邊界圓定理，他稱之爲基本定理：複數域不可約多項式 $f(w,z)=0$ 可以由 $g_1(t)=w$、$g_2(t)=z$ 來參數化，按照 $f(w,z)=0$ 的黎曼面的虧格爲 0、1 和大於 1，$g_1(t)$、$g_2(t)$ 分別可寫成大的有理函數，橢圓函數和邊界圓群的自守函數。實際上，這是著名的單值化定理，不過，克萊因的證明並不完全，龐加萊稍後也得出同樣定理，也不完全。一直到二十五年後，P. 克貝 (Koebe) 和龐加萊才獨立地得出完整的證明。

克萊因關於這方面的研究總結在他同 R. 弗里克 (Fricke) 合作的兩部書中：《橢圓模函數論講義》(*Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*，I，1890；II，1892，兩卷) 和《自守函數論講義》(*Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*，兩卷，1897，1912)。

克萊因用直覺的幾何觀點整理了黎曼曲面理論，在這個過程中他發展了一些拓撲的概念。他提出用 p 個柄的球面代替黎曼多葉曲面，他注意到曲面的可定向性及不可定向性，並證明射影平面的不可定向性。他明確概括前人的結果：兩個可定向曲面同胚當且僅當虧格相等，他還指出在定向曲面有邊界的情況下，還需邊界曲線條數相等。他首次引進不可定向單側閉曲面－克萊因瓶。這些工作在曲面拓撲學上有著歷史意義。

除了數學的工作之外，克萊因的數學史至今仍是十九世紀數學史上的重要的標準著作，作爲當時的領袖數學家，他的許多觀點至今仍然對數學家、數學史家有所啓迪。他的《高觀點下的初等數學》(*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*，I， 1908；II，1909；中譯本，九章出版社，1996) 反映了他對數學的許多觀點，是一本譯爲多種文字的通俗讀物，影響至今不衰。

文　獻

原始文獻

[1] F. Klein, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 3 Bände, Springer, 1921－1923, Reprint, 1973。

[2] F. Klein, Vorlesungen *Über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 Bände, Springer, 1926－1927。

[3] F. Klein, *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale*, Teubner, 1882。

[4] F. Klein, *Vorlesungen Über das lkosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner, 1884。

[5] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Teubner, Bd 1, 1890；Bd 2, 1892。

[6] F. Klein, *The Evanston Colloquium*, MacMillan & Co., 1894。

[7] F. Klein und R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Teubner, Bd. 1, 1897；Bd 2, 1901, 1911, 1912。

[8] F. Klein und A. Sommerfeld, *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, Heft 1, 1897；Heft 2, 1898, Heft 3, 1903, Heft 4, 1910。

[9] F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teubner, Teil I, 1911；Teil II, 1913。

[10] F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Springer, 1928。

[11] F. Klein, *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion*, Springer, 1933。

[12] F. Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer, 1926。

[13] F. Klein, *Riemannsche Flächen*, Teubner, 1986。

[14] F. Klein, *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise*, Teubner, 1987。

[15] F. Klein, ed., *Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland*, Bd. 1, 1909－1913；Bd. 2, 1910－1913 Bd 3, 1911－1916；Bd 4, 1919。

研究文獻

[16] R. Tobies, *Felix Klein*, B.G. Tenbner, Leipzig, 1981。

[17] G. Frei, *Felix Klein (*1849－1925*)—A biographical sketch*, Jahrbuch Überblick Mathematik, 1984, 229－254。

[18] F. König, *Felix Klein,* 100 *Jahre Mathematisches Seminar der Karl–Max Universität*, Leipzig VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981。

[19] *Felix Klein zur Feier seines siefzigten Geburtstages*, Die Naturwissenschaften, 7 (1919), 17, 275－317。

[20] R. Courant, *Felix Klein*, Die Naturwissenschaften, 13 (1925), 37, 765－772。