科 瓦 列 夫 斯 卡 婭

科瓦列夫斯卡婭， C. B.(Ковалевская， Софья Васильевна) 1850 年 1 月 15 日生於俄國莫斯科；1891 年 2 月 10 日卒於瑞典斯德哥爾摩。數學、 文學。

科瓦列夫斯卡婭之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Kovalevskaya.html

科瓦列夫斯卡婭

杜瑞芝

(遼寧師範大學)

科瓦列夫斯卡婭， C. B.(Ковалевская， Софья Васильевна) 1850 年 1 月 15 日生於俄國莫斯科； 1891 年 2 月 10 日卒於瑞典斯德哥爾摩。 數學、 文學。

科瓦列夫斯卡婭的父親柯文・克魯科夫斯基 (Корвин–Круковский， B. B.) 是匈牙利國王馬休斯・柯文 (Mathias Korvin) 的後裔， 在俄羅斯部隊任陸軍中將。 母親柯文・克魯科夫斯卡婭 (Корвин–Круковская， E. Ф.) 出身於俄國貴族家庭。 1858 年， 柯文・克魯科夫斯基退職， 帶全家到靠近立陶宛邊界的帕里賓諾莊園定居。 科瓦列夫斯卡婭早年受到良好的家庭教育。 她的伯父博覽群書， 是一位科學愛好者， 他經常來帕里賓諾莊園作客， 給小科瓦列夫斯卡婭講一些有趣的科學故事。 科瓦列夫斯卡婭臥室裡的糊牆紙是她父親早年學習微積分時的筆記， 那些奇怪的公式和符號使她困惑不解。 這些都激發了她強烈的求知慾。 不久， 她在數學方面就表現出特殊的天賦。 據說， 科瓦列夫斯卡婭十四歲時曾自學三角學， 既無教師， 又無課本。 她通過在圓上作弦的方法， 居然能解釋正弦函數並推導出一些三角公式， 被譽爲 “新帕斯卡”。 十六歲以後， 她很渴望能進大學學習。 但十九世紀的俄國， 大學是婦女的禁區。 1866 年冬， 科瓦列夫斯卡婭的父親請聖彼得堡的一位著名數學教師 A. H. 斯特蘭諾留勃斯基 (Страннолюбоский) 爲她私人授課。 在此期間， 她很快掌握了解析幾何和微積分。

十九世紀六十年代， 俄國正處在從農奴制向資本主義過渡的

時期，反對沙皇專制統治的革命民主主義運動蓬勃發展。許多進步婦女起來爲爭取上大學的權利而鬥爭，科瓦列夫斯卡婭也加入了這個鬥爭行列。她中斷了在斯特蘭諾留勃斯基那裡的學習之後，爲能進大學學習而四處奔走，甚至直接拜訪了大數學家 п. л. 切比雪夫 (Чебышев)，請求他的幫助，也未獲成功。在這種情形下，要想繼續深造只有出國。而未婚女子到國外求學會引起各種流言蜚語。當時，一些進步女青年常採取 “假婚” 的方式來擺脫困境，即與某位男青年形式上結爲夫婦，然後共同出國。1868 年，科瓦列夫斯卡婭與青年學者、莫斯科大學古生物系畢業生 B. O. 科瓦列夫斯基 (Ковалевский) 舉行了假結婚。第二年，他們共同來到德國。

在德國，科瓦列夫斯卡婭克服了重重困難，終於進入了海得堡大學，在數學家 L. 柯尼斯伯格 (Königsberger) 的教授下學習數學，並兼聽大物理學家 H.L.F. 亥姆霍茲 (Helmholtz) 的物理課。柯尼斯伯格在課堂上經常向學生們頌揚他的老師，號稱 “數學分析之父” 的 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass)，激起科瓦列夫斯卡婭對這位數學大師的崇敬之情，她決心到柏林去，在魏爾斯特拉斯的直接指導下研究數學。1870 年，經柯尼斯伯格的推薦，她到柏林拜見了魏爾斯特拉斯，向它表述了自己獻身科學的決心和對數學的愛好。魏爾斯特拉斯對她進行了測試，她的解題才能使魏爾斯特拉斯大爲欣賞。於是他親自向柏林大學校方請求，讓科瓦列夫斯卡婭非正式地隨班聽課，但遭到拒絕。魏爾斯特拉斯決定做她的私人教師。1870－1874 年，他利用星期天單獨給科瓦列夫斯卡婭授課，並共同討論數學問題，從未間斷過。科瓦列夫斯卡婭在這四年內學習了橢圓函數論及其應用、綜合幾何學、阿貝爾函數、複變函數和變分法等課程，並與她的老師共同研究了有關的課題。她很快就成爲魏爾斯特拉斯最得意的學生，魏爾斯特拉斯曾說：“可以肯定，在我的學生中，在勤勉、才能、熱情和愛

科學方面，可以和她相比的實在不多。”科瓦列夫斯卡婭的所有數學研究都直接受到魏爾斯特拉斯的影響，他們之間結下深厚的友誼，直至科瓦列夫斯卡婭去世。

經過幾年的努力，科瓦列夫斯卡婭寫出了三篇出色的論文，分別研究偏微分方程理論、阿貝爾積分和有關土星光環等課題。1874 年 8 月，根據魏爾斯特拉斯的推薦，沒有經過考試和答辯，格丁根大學授予科瓦列夫斯卡婭博士學位，這是數學史上的第一位女博士。

科瓦列夫斯卡婭和科瓦列夫斯基正式結婚後，於 1874 年秋季返回俄國。科瓦列夫斯卡婭懷著滿腔熱情，希望用自己的學識爲祖國人民服務。但是沙皇統治下的俄國，仍像幾年前一樣黑暗。從 1874 年起，科瓦列夫斯卡婭放棄了科學工作，以後的幾年內，她進入社交界，也發表過戲劇評論和科普報導等。魏爾斯特拉斯曾多次來信勸導她重返數學界，但都未能奏效。1878 年以後，科瓦列夫斯卡婭開始對自己的現狀不滿。她寫信給魏爾斯特拉斯，表達了希望恢復數學研究的願望。然而，這種願望由於她的女兒的出生而未能實現。直到 1880 年在聖彼得堡召開的科學大會，才眞正激勵了科瓦列夫斯卡婭重新從事數學研究的熱情。

1880 年末，科瓦列夫斯卡婭又來到柏林，在魏爾斯特拉斯的指導下進行數學研究。1881－1883 年，她完成了幾篇關於光的折射的研究論文。在此期間，她仍爲自己的就業問題而奔走。不幸的是，1883 年春她的丈夫因爲破產而自殺。這對科瓦列夫斯卡婭無疑是一沉重打擊，她勇敢地挑起生活的重擔，並繼續從事數學研究。1883 年 11 月，科瓦列夫斯卡婭在她的朋友、著名瑞典數學家 M.G. 米達格－萊弗勒 (Mittag–Leffler) 的幫助下，受聘擔任斯德哥爾摩大學講師，終於登上了大學的講台。她用德語講授數學課程，淸晰易懂，引人入勝，頗具魏爾斯特拉斯的風格，大受歡迎。1884 年，她提升爲該校的數學教授，並擔任《數學學

報》(*Acta Mathematica*) 的編輯。 1889 年， 被任命爲斯德哥爾摩大學的終身教授。

在斯德哥爾摩大學任職期間， 科瓦列夫斯卡婭研究了剛體繞定點旋轉的問題。 這個問題已有一百多年的歷史， 被稱爲 “數學水妖”。 許多著名數學家都曾致力於它的研究， 甚至 L. 歐拉 (Euler) 和 J.L. 拉格朗日 (Lagrange) 也只得到了某些特殊情形下的結果。 法國科學院曾三次懸賞， 給在該問題的研究中有所突破的人頒發波爾丁 (Bordin) 獎金。 1888 年， 法國科學院再次懸賞徵求剛體旋轉理論的論文。 在用匿名提呈的十五篇論文中， 有一篇如此傑出， 受到評獎委員會的高度讚賞， 以致法國科學院把獎金從三千法郎增至五千法郎， 這就是科瓦列夫斯卡婭提交的論文。 1888 年 12 月， 科瓦列夫斯卡婭榮獲鮑羅丁獎。 這項工作在 1889 年又得到瑞典科學院的獎賞。

1889 年 12 月， 由切比雪夫等三位著名科學家聯名推薦， 科瓦列夫斯卡婭當選爲俄國科學院通訊院士， 她是歷史上第一個獲得科學院院士稱號的女科學家。

科瓦列夫斯卡婭不幸於 1891 年春患肺炎逝世， 終年只有四十一歲。 從青年時代起， 科瓦列夫斯卡婭就接受民主主義革命思想， 她積極支持女權運動， 同情巴黎公社[1]。 在婦女倍受歧視的年代， 她勇敢地衝破傳統的偏見和社會的壓制， 屹然獨立， 獻身科學。 科瓦列夫斯卡婭刻苦勤奮， 勇於探索， 以短暫的一生， 在科學領域取得了傑出的成績。 她在數學、 文學和政治等方面都留下了的出色的成果。

在數學方面， 科瓦列夫期卡婭在德國、 法國和瑞典的科學雜誌上共發表了十篇純粹數學和有關數學物理的論文， 它們是：

1. “關於偏微分方程理論” (俄文 К теории уравнений в частных производных， 德文 Zur Theorie der partiellen Differentialgleichun-

[1]科瓦列夫斯卡婭的姐姐、 姐夫參加了巴黎公社起義， 其姐夫被捕入獄。 爲營救姐夫， 她曾隻身進入戰火中的巴黎， 並參加營救公社傷員的工作。

gen， 1875)。

2. “論某一形式的第三類阿貝爾積分簡化成橢圓積分” (俄文 О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам， 德文 Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abels’cher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale， 1884)。

3. “對拉普拉斯土星光環形態研究的補充和意見” (俄文 Добавления и замечания к исследованию Лапласа о Форме колща Сатурна， 德文 Zusätze und Bemerkungen zu Laplace’s Untersuchungen Über die Gestalt der Saturnsringe， 1885)。

4. “論光線在結晶介質中的折射” (俄文 О преломлении света в кристаллических средах， 德文 Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln， 1883)。

5[2]. “論光在晶體中的傳播” (法文 Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé， 1884)。

6. “論光在晶體中的傳播” (瑞典文 Om Ijusets fortplantning uti ett Kristalliniskt medium， 1884)。

7. “剛體繞定點旋轉的一個問題” (俄文 Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки， 法文 Sur le problème de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe， 1889)。

8. “關於重物繞定點旋轉問題的一個特殊情形，其積分可藉助時間的超橢圓函數實現” (俄文 Мемуар об одном частном случае задачи о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки， когда интегрирование производится с помощыо ультраэллиптических функций времени， 法文 Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d’un corps pesant autour d’un point fixe, où l’intégration s’effectue à l’aide des fonctions ultraelliptiques

[2]文 5 與文 6 是同一篇文章 “О рапространении света в кристаллической среде， 分別在巴黎科學院和斯德哥爾摩科學院的雜誌上發表。

du temps， 1890)。

9. “論確定一剛體繞定點旋轉的微分方程組的一個性質” (俄文 Об одном свойстве системы дифференциальных уравнений，определяющей вращение твердого тела около неподвижной точки， 法文 Sue une propriété du système d'équations differentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe， 1890)。

10. “關於 Bruns 的一個定理” (俄文 ОБ одной теореме Г. Брунса， 法文 Sur un théorème de H. Bruns， 1891)。

以上的十篇論文， 前三篇即是科瓦列夫斯卡婭在魏爾斯特拉斯指導下的博士論文 (1870 − 1874)， 關於光的折射的論文 (第 4 − 6 篇) 是她重返柏林時 (1881 − 1883) 撰寫的， 後四篇論文是她在斯德哥爾摩大學任職期間完成的。 關於偏微分方程理論和剛體運動方面的論著是她最重要的工作， 已被譯成英文傳世， 下面作較詳細的介紹。

十八和十九世紀的數學家們創立了大量類型的微公方程。 他們很快就發現， 在許多情況下求方程的顯解歸於失敗。 於是， 數學家們轉而去證明解的存在性。 1842 年， A.L. 柯西 (Cauchy) 給出了微分方程中第一個一般的存在性定理。 他討論了給定初始條件的微分方程的求解問題。 證明了常微分方程和幾種線性偏微分方程解析解的存在性。 對於形如

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = F_i\left(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n;\ u_1,\ \cdots,\ u_m;\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\right)$$

$$(i = 1、2、\cdots、m)$$

的一階偏微分方程組， 柯西問題就是求滿足初始條件

$$u_i(0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n) = w_i(x_1,\ \cdots,\ x_n)\ (i = 1、\cdots、m)$$

的解 $u(x,\ t)$。

柯西假設 F_i 和 w_i 都是解析的，用 “優函數方法” 得到局部收斂的冪級數解。他以一個簡單的解析函數代替原來的 F_i，要求其冪級數展開的係數都是非負的，且不小於 F_i 對應項係數的絕對值。所得到的方程組可以用明顯的求積法給出解，這就是原方程組具有初始條件的解的優函數。

科瓦列夫斯卡婭在她的論文中，把柯西的結果推廣到很一般的情形。她首先考慮擬線性方程組

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}^{(r)}(u_1,\ \cdots,\ u_n)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha}\ , \\ r &= 1、2、\ \cdots\ 、n\ 。\end{aligned} \tag{1}$$

假設其係數 $F_{\alpha\beta}^{(r)}$ 在 $(0,\ \ldots,\ 0)$ 附近解析，證明了下面的結果：

A. 如果 $u(x_1,\ \cdots,\ x_r)_{10}$ 、 $\cdots$ 、 $u(x_1,\ \cdots,\ x_r)_{n0}$ 是 n 個任意選擇的具有共同收斂域的冪級數，並且它們當 $(x_1,\ \cdots,\ x_r) = (0,\ \cdots,\ 0)$ 時的值均爲 0，那麼在空間 $(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_r)$ 中可確定 n 個冪級數，它們在 u_1 、 $\cdots$ 、 u_n 空間中形式地滿足 (1)，並且當 $t = 0$ 時，它們的值依次等於 $u(x_1,\ \cdots,\ x_r)_{10}$ 、 $\cdots$ 、 $u(x_1,\ \cdots,\ x_r)_{n0}$ 。

B. 上述 n 個冪級數在某一域內絕對收斂並在此域內是確實滿足 (1) 的函數。

接著，科瓦列夫斯卡婭又研究了方程組

$$\begin{aligned} F^{(r)}(u_1,\ \cdots,\ u_n)\frac{\partial u_r}{\partial t} &= \sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n} F_{\alpha\beta}^{(r)}(u_1,\ \cdots,\ u_n)\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \\ &\quad + F_{00}^{(r)}(u_1,\ \cdots,\ u_n)\ , \\ r &= 1、2、\ \cdots\ 、n \end{aligned} \tag{2}$$

得到類似的結果。

她在證明這些結果的過程中，利用了柯西和魏爾斯特拉斯的優

函數方法。 即以方程組

$$\frac{\partial V_r}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{n}\overline{F}^{(r)}_{\alpha\beta}(V_1,\,\cdots,\,V_n)\frac{\partial V_\beta}{\partial x_\alpha}\text{，}r=1\text{、}2\text{、}\cdots\text{、}n\text{，}$$

代替方程組 (1)， 其中 $\overline{F}^{(r)}_{\alpha\beta}$ 是 $F^{(r)}_{\alpha\beta}$ 的一個優函數， 其形式爲

$$\overline{F}^{(r)}_{\alpha\beta}(V_1,\,\cdots,\,V_n)=\frac{G}{1-\dfrac{V_1+\cdots+V_n}{g}}\text{，}$$

其中 G、 g 都是常數。

然後， 科瓦列夫斯卡婭把柯西的存在唯一性定理推廣到包含高階時間導數的高階方程組的情形。 她考慮方程組

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial^{n_i}u_i}{\partial t^{n_i}}\quad=\quad & F_i(t,\,x_1,\,\cdots,\,x_n,\,u_1,\,\cdots,\,u_m,\,\cdots,\\ & \tfrac{\partial^k u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\,\cdots)\text{，}\end{aligned}$$

i、 $j=1$、 2、 $\cdots$、 $m; k_0+k_1+\cdots+k_n=k\le n_i; k_0<n_i$， 和初始條件

$$\left(\frac{\partial^{k_0}u_i}{\partial t^{k_0}}\right)_{t=t_0}=\phi_i^{(k_0)}(x_1,\,\cdots,\,x_n)\text{，}$$

假設所有的 F_i 在點

$$\begin{aligned}&(t^0,\,x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0,\,\phi_1^{(0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0),\,\cdots,\,\phi_m^{(0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0),\,\cdots,\\ &\qquad\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}\phi_j^{(k_0)}(x_1^0,\,\cdots,\,x_h^0)}{\partial x_1^{k_i}\cdots\partial x_n^{k_n}},\,\cdots)\end{aligned}$$

的一個鄰域內解析， 所有 $\phi_j^{(k_0)}(x_1,\,\cdots,\,x_n)$ 在點 $(x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0)$ 的鄰域內解析， 她證明了上述柯西問題在點 $(t^0,\,x_1^0,\,\cdots,\,x_n^0)$ 附近的唯一的一組解析解。

在現代數學文獻中， 關於偏微分方程解的存在唯一性定理通常稱爲柯西－科瓦列夫斯卡婭定理。 它的最簡形式可敍述爲：

任意形如

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

的方程， 如果 f 在點 $(t^0,\ x^0_0,\ u_0,\ \dfrac{\partial u^0}{\partial x^0})$ 附近解析， 那麼方程在點 $(t^0,\ x^0)$ 附近存在唯一的解析解 $u(t,\ x)$， 它滿足

$$u(t^0,\ x)=g(x)\text{，}$$

這裡 $g(x)$ 在點 x_0 附近解析， 並滿足

$$g(x_0)=u_0,\ g'(x_0)=\frac{\partial u^0}{\partial x_0}\text{。}$$

科瓦列夫斯卡婭的工作得到數學界的好評， 法國數學家 H. 龐加萊 (Poincaré) 曾說：“她極大的簡化了證明並給出定理的最終形式。”

科瓦列夫斯卡婭最重要的貢獻是對剛體運動的研究。 剛體繞定點運動的方程是歐拉在 1750 年提出的， 它們是：

$$\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)qr+Mg(y_0\gamma''-z_0\gamma')\text{，}\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)rp+Mg(z_0\gamma-x_0\gamma'')\text{，}\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)pq+Mg(x_0\gamma'-y_0\gamma)\text{，}\\
\frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma'-q\gamma''\text{，}\\
\frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma''-r\gamma\text{，}\\
\frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma-p\gamma'\text{。}
\end{aligned}$$

其中，A、B、C 是剛體關於定點的慣性橢球的主軸，M 是剛體的質量，g 是重力加速度，$(\gamma,\ \gamma',\ \gamma'')$ 是指向下方的單位向量，p、q、r 是角速度沿各主軸的分量，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是剛體重心的坐標。

爲確定任意時刻剛體的運動位置，要對這組方程求積。1888 年以前，只解決了兩種情形。第一種情形要求滿足條件 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$，曾被歐拉和 S.D.B. 泊松 (Poisson) 研究過。此時剛體的重心與固定點重合，這是不受力的對稱體的運動。這時沒有外力作用於剛體，重力不影響運動，因此旋轉軸在剛體內的固定位置上。地球的自轉運動就是不受外力運動的一個例子。

第二種情形要求 $A = B$、$x_0 = y_0 = 0$，曾由拉格朗日研究過。此時，定點和重心位於同一軸上，有時這個軸是對稱軸的，比如陀螺的旋轉便是如此。陀螺繞一個定點旋轉，這個定點不是重心，但它與重心都在陀螺的對稱軸上。當陀螺旋轉時，它本身產生一個力矩，使陀螺保持平衡。

以上兩種情形，都要求剛體是對稱的。科瓦列夫斯卡婭在她的論文中指出，歐拉和拉格朗日所考慮的方程組，p、q、r、γ、γ'、γ'' 這六個未知量都是時間變量的單值函數，它們只有唯一的奇點，即極點。方程組的通積分在通常情形下是否能保持這一性質呢? 如果能保持這一性質，那麼這些方程可以藉助於下列級數進行積分：

$$
\begin{aligned}
p &= t^{-n_1}(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots)\text{，} \\
q &= t^{-n_2}(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots)\text{，} \\
r &= t^{-n_3}(r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \cdots)\text{，} \\
\gamma &= t^{-m_1}(f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots)\text{，} \\
\gamma' &= t^{-m_2}(g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \cdots)\text{，} \\
\gamma'' &= t^{-m_3}(h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \cdots)\text{。}
\end{aligned}
$$

這裡 n_1、n_2、n_3、m_1、m_2、m_3 都是正整數。爲了使這些級

數能表示所研究的方程組的通積分，它們應該包含五個任意常數。比較方程組兩邊第一項的係數，不難確定

$$n_1 = n_2 = n_3 = 1,\ m_1 = m_2 = m_3 = 2\text{。}$$

爲確定係數 p_0、q_0、r_0、f_0、g_0、h_0，科瓦列夫斯卡婭進一步分析方程，得到了剛體是非對稱的一種情形的解。即當兩個慣性力矩相等，並等於第三個慣性力矩的二倍，而剛體重心在由相等的慣性矩決定的平面內，相當於在條件

$$A + B = 2C\text{、}z_0 = 0$$

下給出了方程組的通積分。

歐拉方程組具有如下形式的代數積分：

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = C_1\text{，}$$
$$Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_2\text{，}$$
$$\gamma^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 = 1\text{。}$$

科瓦列夫斯卡婭在她限定的條件下導出了第四積分。她利用在 xy 坐標平面內的轉軸變換以及改變長度單位的辦法使 $y_0 = 0$、$C = 1$，此時歐拉方程組變爲：

$$\begin{aligned}
2\frac{dp}{dt} &= qr\text{，} & 2\frac{dp}{dt} &= -pr - C_0\gamma''\text{，}\\
\frac{dr}{dt} &= C_0\gamma'\text{，} & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma''\text{，}\\
\frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma\text{，} & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'\text{，}
\end{aligned}$$

其中，$C_0 = Mgx_0$。那麼三個代數積分是

$$\begin{aligned}
2(p^2 + q^2) + r^2 &= 2C_0\gamma + 6l_1\text{，}\\
2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' &= 2l\text{，}\\
\gamma^2 + (\gamma')^2 + (\gamma'')^2 &= 1\text{。}
\end{aligned}$$

此處 l 與 l_1 是積分常數。然後她導出第四部積分：$[(p+qi)^2+C_0(\gamma+\gamma' i)][(p-qi)^2+C_0(\gamma-\gamma' i)]=k^2$，$k$ 爲任意常數。接著，她令 $x_1=p+qi$、$x_2=p-qi$，經過幾次變量替換及代數運算，得到方程

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}}+\frac{dS_2}{\sqrt{R_1(S_2)}}\ ,\\
dt &= \frac{S_1dS_1}{\sqrt{R_1(S_1)}}-\frac{S_2dS_2}{\sqrt{R_1(S_2)}}\ ,
\end{aligned}
$$

這裡 $R_1(S)$ 是五次多項式，其零點是唯一的，S_1 和 S_2 是 x_1 與 x_2 的多項式。這組方程引出了超橢圓積分，科瓦列夫斯卡婭用 θ 函數解出了這些積分。

科瓦列夫斯卡婭還證明，她引進的關於 p、q、r、γ、γ'、γ'' 的級數展開式是歐拉方程組的解的必要條件是 A、B、C、x、y、z 滿足下列四個條件之一：

(1) $A=B=C$，

(2) $x_0=y_0=z_0$ (歐拉研究的情形)，

(3) $A=B$、$x_0=y_0=0$ (拉格朗日研究的情形)，

(4) $A=B=2C$、$z_0=0$ (科瓦列夫斯卡婭研究的情形)。

剛體繞定點旋轉問題如圖 1 [3]所示。

關於剛體繞定點旋轉問題的研究，自從拉格朗日之後，大約有一個世紀停步不前。科瓦列夫斯卡婭的工作，打破了一百年來的僵持局面，開闢了在近代力學中應用數學分析方法的新方向。正是這項工作使她獲得法國科學院的鮑羅丁獎金。法國科學院舉行了隆重的授獎儀式。科學院院長皮埃爾•讓森 (Pierre Janssen) 先生親自到會致詞，高度評價了科瓦列夫斯卡婭的成就。他說：“當今最輝煌、最難得的榮譽桂冠，有一頂將落到一位婦女頭上。本

[3]引自 *P. Polubarinova-Kochina*，Sophia Vasilyevna Kovalevskaya，1957，第 60 頁。

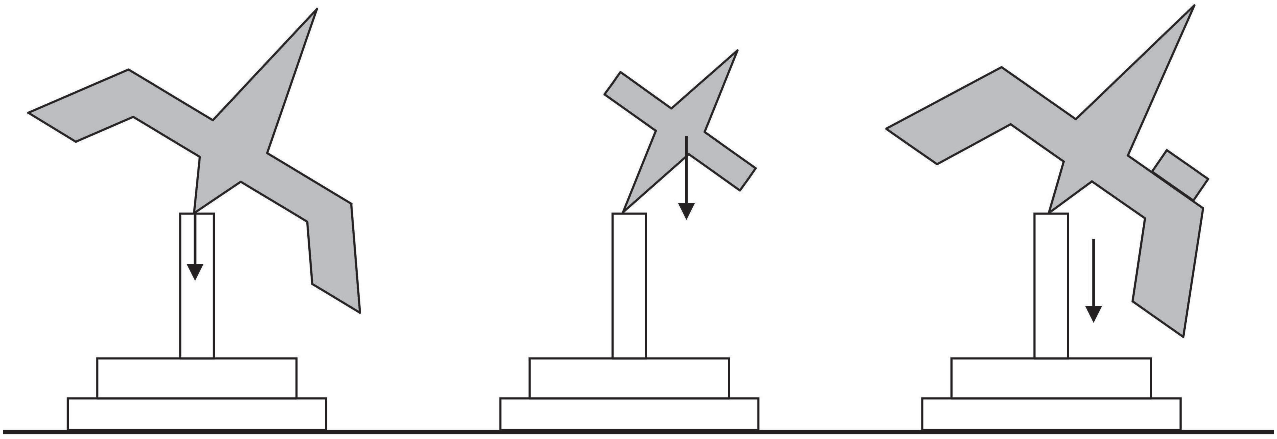

圖 1(a) 歐拉和泊松解決的情形；(b) 拉格朗日解決的情形；
(c) 科瓦列夫斯卡婭解決的情形。

科學院的成員們發現，她的工作不僅證明她擁有廣博深刻的科學知識，而且顯示了她的巨大的創造才智。”

在文學方面，科瓦列夫斯卡婭曾和瑞典女科學家安娜•萊弗勒 (Anna Leffler) 共同創作劇本《爲幸福而鬥爭》(Барьба за стастье，1877)，獲得成功。她還寫了幾部小說，如《童年的回憶》(Васпоминания детства，1890)、《一個女虛無主義者》(Ни гилистка，1884) 等。其中以《童年的回憶》最爲著名，已被譯成多種文字。

1948 年，蘇聯科學院出版了科瓦列夫斯卡婭科學著作集。1950 年，莫斯科和斯德哥爾摩分別舉行了隆重的紀念大會，紀念科瓦列夫斯卡婭誕生一百週年。

文　　獻

原始文獻

[1] С. В. Ковалевская, Научные работы, Редакция и комментарии члена-корреспондента АН СССР П. Я. Полубариновой-Кочиной, Изд. АН СССР, М., 1948。

研究文獻

[2] Roger Cooke, *The mathematics of Sonya Kovalevskaya*, Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984。

[3] Л. Ворончова, Софьа Ковалевская, Москва, 1959。

[4] Г. К. Михайлов, С. Я. Степанов, К истории задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования, Исторцко-Математцческце цсследования, вып. 28(1985), стр. 223－246

[5] П. Я. Полубаринова Кочина, К Биографии С. В. Ковалевской, Исторцко-Математцческце цсследованця, ып. 7(1954), стр. 666－712。

[6] K.D. Rappaport, *S. Kovalevsky*： *a mathematical lesson*. The American Mathematical Monthly, 88, 8, 564－574 (中譯本： 數學譯林， 1(1982)， 4)。

[7] P. Polubarinova-Kochina, *Sophia Vasilyyevna Kovalevskaya, the live and work*, Moscow, 1957。

[8] И. В. Кузнецова, Людн Русской Науки, 178－184, 1961。