羅 素

羅素，B. (Russell，Bertrand) 1872 年 5 月 18 日生於英格蘭蒙茅斯郡的特雷勒克 (Trelleck)；1970 年 2 月 2 日卒於威爾士的彭林代德賴思 (Penrhyndeudreath) 附近的帕萊斯彭林。數理邏輯、數學基礎、哲學。

羅素之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Russell.html`

羅　素

王 順 義
(上海華東師範大學)

羅素，B. (Russell，Bertrand) 1872 年 5 月 18 日生於英格蘭蒙茅斯郡的特雷勒克 (Trelleck)；1970 年 2 月 2 日卒於威爾士的彭林代德賴思 (Penrhyndeudreath) 附近的帕萊斯彭林。數理邏輯、數學基礎、哲學。

羅素出身於一個貴族的家庭。祖父約翰•羅素 (John Russell) 伯爵是一個著名的自由黨政治家，他於 1832 年提出第一個議會選舉法修正案，並兩次出任英國政府首相。羅素二歲時母親去世，三歲時父親也去世。於是羅素和他的哥哥便與祖父祖母生活在一起，由他們照管。羅素六歲時，祖父去世。祖母活到了 1898 年，她對羅素在童年和青少年時期的發展有過決定性的影響。祖母出身於一個貴族的虔誠教徒的家庭，具有非常強烈的道德信念和宗教信仰，在政治上較爲激進。她曾用一條緘言告誡羅素："你不應該追隨衆人去作壞事"，羅素一生都努力遵循這條準則。羅素少年時未被送到學校去學習，而只是在家裡接受褓姆和家庭教師的教育。他的童年和少年時代是孤獨的。由於他的一個叔叔的影響，他從小就對科學產生了興趣。在哥哥的幫助下，他十一歲時就掌握了歐幾里得幾何學，這是他智慧發展的重要轉折。

1890 年 10 月，羅素考入劍橋大學，在三一學院學習數學和哲學。在此期間，他結識了當時劍橋大學數學講師 A.N. 懷特海 (Whitehead)、哲學家 G.E. 穆爾 (Moore) 和 E. 麥克塔格特 (McTaggart) 以及其他一些歷史學家、經濟學家、詩人和散文家。從 1895 年至 1901 年他任三一學院研究員。在此期間，羅素撰寫

了《論幾何學的基礎》(*An essay on the foundations of geometry*，1897) 一書。這本書的主題是用 I. 康德 (Kant) 關於數學是先驗綜合判斷的思想未檢查幾何學的發展和現狀，他用稍加修改的康德的觀點來評價非歐幾何學的產生，但後來羅素對這本書的評價甚低。羅素最初在哲學上受 G.W.F. 黑格爾 (Hegel) 哲學的影響較大，1898 年在 G.E. 摩爾的勸說下拋棄了黑格爾的哲學觀點，參加了反叛絕對唯心主義哲學的運動，從此轉變爲經驗主義者、實證主義者和物理主義者。羅素說過，在這個時期，“就哲學的基本問題而言，在所有的主要方面，我的立場都來自 G.E. 穆爾先生。…… 在數學上，我主要受惠於 G. 康托爾 (Cantor) 和 G. 皮亞諾 (Peano) 教授。” (《數學的原理》(*The principles of mathematics*，1930) p.xviii) 從 1900 年至 1914 年，羅素主要從事數理邏輯和數學基礎的研究，他在這個領域中最重要的工作都是在這個時期完成的。從 1910 年至 1916 年羅素任三一學院哲學講師。從二十年代至四十年代，羅素主要從事哲學方面的研究和講學。羅素用“邏輯原子主義”來稱呼他的哲學。他的主要哲學著作有《神秘主義和邏輯》(*Mysticism and logic*，1918)、《心的分析》(*The analysis of mind*，1921)、《物的分析》(*The analysis of matter*，1927)、《意義和眞理研究》(*An inquiry into meaning and truth*，1940)、《人類知識：它的範圍和限度》(*Human knowledge，its scope and limits*，1948) ··· 等等。從 1916 年至三十年代後期，羅素沒有任何學術職務，他以寫作和公開演講爲生。1920 年至 1921 年，他曾訪問過蘇聯和中國，他在中國講學近一年，給我國哲學界以很大的影響。1938 年，羅素遷往美國，先後在芝加哥大學、加州大學任教。1941 年至 1943 年他在費城講學。1944 年他返回劍橋，重任三一學院研究員直到去世。五十年代後，羅素從哲學轉向國際政治，他反對核戰爭、主張核裁軍。1955 年，他動員了許多著名科學家包括 A.

愛因斯坦 (Einstein) 在內簽署了一個爲爭取世界和平而合作的宣言。1964 年他建立了羅素和平基金會，抨擊美國政府的侵略政策。1967 年後他與存在主義者 J.-P. 薩特 (Sartre) 建立了一個國際戰犯審判法庭，並傳訊美國總統 L. 約翰遜 (Johnson)。由於羅素積極從事政治活動，他晚年享有世界範圍的名望。羅素一生中曾三次競選下院議員，但都沒有成功。他曾兩次被捕入獄，其原因是因爲他申張民主和參加核裁軍運動。

羅素於 1908 年當選爲英國皇家學會會員。1949 年他成爲英國科學院的榮譽院士，同年還被授予功勳獎章。他曾兩度擔任亞里士多德學會的會長，並擔任過理性主義者新聞協會會長多年。1950 年他獲得諾貝爾文學獎。諾貝爾獎金委員會在授予他獎時稱他爲 “當代理性和人道的最傑出的代言人之一，西方自由言論和自由思想的無畏鬥士”。

羅素一生曾四次結婚，有三個孩子。1931 年，由於他哥哥去世，他成爲羅素伯爵三世。

十九世紀下半葉，數學家對微積分的理論基礎進行嚴格處理。K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 用 “$\varepsilon - \delta$” 方法重新表述了 A. 柯西 (Cauchy) 的極限論，把微積分理論建立在實數理論的基礎上；接著，R. 戴德金 (Dedekind) 和康托爾分別從有理數出發定義了實數；之後，魏爾斯特拉斯和皮亞諾從正整數出發定義了有理數，並且皮亞諾還從不經定義的 “集合”、“正整數”、“後繼者” 等概念出發，用公理化的方法塑述了正整數理論；最後康托爾建立了無窮集合的理論。康托爾的這項工作起源於對三角級數和數學基礎問題的研究，他先提出了點集理論，進而又提出了一般無窮集合論。與此同時，數理邏輯通過 G. 布爾 (Boole)、E. 施勒德 (Schröder)、皮亞諾和 G. 弗雷格 (Frege) 等人的工作得到了長足的進步。但是除了少數人如弗雷格和皮亞諾外，許多數學家忽視邏輯的作用，看不到數理邏輯對數學基礎研究的重要性。1900

年 7 月，羅素到巴黎參加國際哲學會議時遇到了皮亞諾，這件事對羅素的學術生涯來說是一個重大的轉折點。通過聆聽皮亞諾的講話，羅素才意識到數理邏輯對於數學基礎研究的重要性，於是羅素向他請教並表示希望拜讀他的著作。在讀完皮亞諾的有關著作後，羅素很快地掌握了皮亞諾的符號邏輯和思想，在此基礎上他開始了數理邏輯和數學基礎的研究工作，其主要成果是《數學的原理》一書。該書的大部分寫於 1900 年下半年，全書於 1903 年出版。從此之後到 1914 年，羅素與懷特海合作進行這方面的研究，他撰寫了三十餘篇有關論文，1910 年至 1913 年他與懷特海合著的三卷本巨著《數學原理》(*Principla mathematica*) 陸續出版。1919 年，他又出版了該著作的通俗讀本《數理哲學導論》(*Introduction to mathematical philosophy*)。在數學基礎和數理邏輯方面，羅素的主要成就有兩個方面，一是他通過建立邏輯類型論來消除邏輯悖論；二是他從一個較爲簡單的邏輯系統出發加之少量非邏輯公理推導出經典數學。

羅素發現著名的羅素集合論悖論是在 1901 年。開始他似乎覺得“所有類這個類是一個類”，後來由於受到康托爾證明沒有最大的基數方法的啓發，“使我考慮不是自己的項的那些類。好像這些類一定成一類。我問自己，這一類是不是它自己的一項。如果它是自己的一項，它一定具有這個類的分明的特性，這個特性就不是這個類的一項。如果這個類不是它自己的一項，它就一定不具有這個類的分明的特性，所以就一定是它自己的一項。這樣說來，二者之中無論哪一個，都走到它相反的方面，於是就有了矛盾”。[《我的哲學的發展》，(*My philosophical development*，1959)，第 66 – 67 頁] 一年以後，羅素將上述結果寫信告訴了弗雷格。弗雷格回答說，羅素悖論的發現使他驚愕之極，由於這個悖論，他的《算術原理》(*Grundgesetze der Arithmetik*，vol. I，1893；vol. II，1903) 中的第五公理便是錯的，必須給予剔

除， 於是他認爲算術的基礎發生了動搖。

爲了消除悖論， 羅素首先在《數學的原理》的附錄 B 中提出了類型論。 這個理論以兩條公設爲基礎： (1) 每一個命題函項 ϕx 除了有其眞值域外， 都有一個意義域。 只要 ϕx 是一個命題， 無論是眞還是假， x 必須在這個意義域內取值。 (2) 命題函項的意義域構成類型， 即如果 x 屬於 ϕx 的意義域， 則存在一個對象的類， 即 x 的類型， 其中所有的對象也應屬於 ϕx 的意義域， 當然 ϕ 可以是各種各樣的。 在此基礎上羅素討論了類的類型。 就類而言， 在最底層的對象是個體， 它沒有域， 它是最低的類型的對象； 接下去依次可以構成對象是個體類的類型， 對象是個體類的類的類型， 如此等等。 因爲類只能由同一類型的對象組成， 類相對於其成員是高一級的類型的對象， 這樣 “自己屬於自己” 或 “自己不屬於自己” 的命題本身是無意義的， 於是便避免了羅素悖論的產生。 羅素的這種類型論本質上屬於簡單類型論， 在用它來處理數、 命題或語義學悖論時卻有困難。

爲了進一步尋找解決悖論的方法， 1906 年羅素在論文 “關於超窮數和超窮序型理論中的一些困難” (*On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*) 中又提出了另外三種理論， 即曲折論、 限量論和無類論。 曲折論是羅素在研究康托爾最大基數悖論後提出的， 他認爲對命題函項的複雜性應加以限制， 只有非常簡單的命題函項才能決定類， 而其它複雜的、 費解的命題函項則不能。 這樣就可以避免構成一個可以導致悖論的太大的類。 羅素的這個思想後來在 W.V. 奎因 (Quine) 1937 年的有關數理邏輯的工作中得到發展。 限量論是羅素在研究布拉里 − 福爾蒂 (Burali–Forti) 悖論後提出的， 它的主要論點是否認全類和不加限制的某些概念的存在性， 從而避免過大的類。 在無類論中， 羅素在摹狀詞理論的基礎上主張取消類作爲實體存在的資格， 而只把類看作是一種邏輯的虛構、 一種說話的方便而已和一種 “不完全的符

號”。 後來他又把類等同於命題函項。

1906 年 H. 龐加萊 (Poincaré) 研究了理查德 (Richard) 悖論之後提出， 悖論的根源在於非直謂定義。 如果 x 是類 A 的一個成員， 但定義 x 時又須要依賴於 A， 則這種定義稱爲非直謂的。 顯然這種定義具有循環定義即 “反身自指” 的特徵。 羅素吸取了龐加萊的這個思想， 提出了避免悖論的 “惡性循環原則”， 認爲： 凡包含一個集體的總體的對象， 它不應再是集體的一個成員； 反之， 假如一個集體有一個總體， 該集體又含有只能由它的總體來定義的成員， 則該集體沒有總體。 遵循這條原則便可以避免 “反身自指” 的不合邏輯的總體的產生， 而這種不合法總體正是導致悖論的基礎。 在無類論和惡性循環原則的基礎上， 羅素於 1908 年在論文 “以類型論爲基礎的數理邏輯”(*Mathematical logic as based on the theory of types*) 中進一步提出了分支類型論的理論。 這個理論後來在《 數學原理 》的第 I 卷中也有詳細的論述 。

在分支類型論中， 羅素從命題函項出發， 對其進行分層處理， 將其分屬不同的 “階”。 處於底層的是個體， 它們既非命題又非命題函項； 比它高一層次的是一階命題函項， 它們僅以前面層次中的個體爲變元 (自變元或約束變元) 而構成； 更高一層次的是二階命題函項， 它以一階函項爲變元； 以此類推， 我們可以得到一個不同階次的命題函項的系列。 一般來說， 如果一個命題函項 φx (其中 x 可以是個體， 也可以是具有各種階的命題函項) 中變元 x 的最高階是 n， 則這個命題函項 φx 本身便是第 $n+1$ 階。 每一個命題函項都有一個確定的階， 因而諸命題函項的階與階之間是不容混淆的。 如果有一類命題函項 φx 是 n 階的， 那麼涉及到這類命題函項的總體的命題函項 $f(\varphi x)$ 就不再是 n 階的， 而是第 $n+1$ 階的了， 因此我們就應將它們區別開來， 不能把後者再看作是這個總體中的一個成員， 否則就會產生悖論。 堅持這種區別， 也就是堅持了 “惡性循環原則”。 根據階的理論， 他定義了命題函項的

直謂和非直謂的性質。對只含一個變元的命題函項，如果函項 φx 的階比它的變元 x 的階僅高 1 階時，則該命題函項是直謂的記爲 $\varphi!x$，否則便是非直謂的；對含有多個變元的命題函項，如果函項 $\varphi(x,y)$ 的階比其變元 x 或 y 中的最高階僅高 1 時，則稱命題函項是直謂的記爲 $\varphi!(x,y)$, 否則便是非直謂的。顯然包含悖論的命題函項都是非直謂的。堅持惡性循環原則，也就是要拒斥非直謂的命題函項。類似地，羅素對命題也進行了分層處理，將其分成不同的階，而且進一步將命題的眞值也分屬於不同的階。這樣，運用邏輯類型論，我們便可以消除各種邏輯悖論和揭示“撒謊者悖論”等語義學悖論錯誤所在。

在數學基礎研究方面，羅素繼弗雷格之後奉行邏輯主義的研究綱領，其核心思想是認爲可以將數學還原爲邏輯學，從而奠定數學的牢固基礎。他曾將純數學定義爲是由所有“p 蘊涵 q”這種形式的命題所構成的一個類，其中 p、q 的相同點在於它們都是包含一個或多個變元的命題，並且無論 p 還是 q 都不包含任何非邏輯的常項。羅素想通過自己的工作表明：數學概念可以通過顯定義從邏輯概念推導出來，而數學定理也可以通過純粹的邏輯演繹法從邏輯公理推導出來。因此在他看來，在數學與邏輯之間完全劃不出一條界限來，它們二者實際上是一門學科，它們的不同就像兒童與成人的不同，邏輯是數學的少年時代，數學是邏輯的成人時代。

羅素試圖推演出經典數學的邏輯系統是由如下概念和公理組成的：

(1) **基本概念**：語句 p 的否定“非 p”($\sim p$)；兩個語句的析取“p 或者 q”($p \vee q$)；合取“p 並且 q”($p \bullet q$)；蘊涵，“如果 p，則 q”($p \supset q$)；等價，“p 蘊涵 q 且 q 蘊涵 p”($p \equiv q$)；全稱量詞 ( )，如 $(x)\phi x$ (讀作：對於每一個 x，x 具有性質 ϕ)；存在量詞 $(\exists)$，如 $(\exists x)\phi x$ (讀作：有一個 x，x 具有性質 ϕ)；$\cdots$ 等等。上述概念還可以相互表示，如 $p \vee q$ 可以定義爲 $\sim(\sim p \bullet \sim q)$，

$(\exists x)\phi x$ 可以定義爲 $\sim(x)\sim\phi x$，因此上述基本概念並不都是初始的。(《數學原理》，第 I 卷，第 1 章。)

(2) **命題演算的公理：** (在表述上與原稿略有不同)

1.1 如果 p，$p\supset q$，則 q

1.2 $(p\vee p)\supset p$

1.3 $q\supset(p\vee q)$

1.4 $(p\vee q)\supset(q\vee p)$

1.5 $(p\vee(q\vee r))\supset(q\vee(p\vee r))$

1.6 $(q\supset r)\supset((p\vee q)\supset(p\vee r))$ (《數學原理》第 I 卷，第 94－97 頁)

(3) **謂詞演算的公理**

10.1 $(x)Fx\supset Fy$

10.11 如果 Fy，則 $(\exists x)Fx$

10.12 $(x)(p\vee Fx)\supset(p\vee(x)Fx)$ (《數學原理》，第 I 卷，第 139－140 頁)

早在弗雷格之前，數學家已經證明，所有傳統的純數學都可以看作是有關正整數的命題所組成，即其中的概念可以用正整數來定義，其中的命題可以從正整數的性質推導得出。而正整數的理論又由皮亞諾歸約爲數量極少的概念 (如 0，數和後繼) 和五個基本命題 (即公理) 組成，它們是：(1) 0 是一個數；(2) 任何數的後繼是一個數；(3) 沒有兩個數有相同的後繼；(4) 0 不是任何數的後繼，(5) 任何性質，如果 0 有此性質，又如果任一數有此性質，它的後繼必定也有此性質，那麼所有的數都有此性質。羅素在此基礎上要做的工作是要將皮亞諾的三個基本概念和五條基本命題歸約爲上述的邏輯概念和公理。在從邏輯概念推出正整數的概念方面，雖然弗雷格已經找到解決這一問題的辦法，但是羅素和懷特海也獨立地獲得相同的結果。羅素解決問題的關鍵在於正確認識正整數的邏輯地位，它們不屬於事物而屬於概念的邏輯屬性。他

從類和關係的概念出發，定義了類的相似，接著又定義了：一個類的數是所有相似的類的類，而所謂數則是某一個類的數。例如，0 是以空類爲唯一成員的類，而 2 則是所有對偶的類，記爲(《數學原理》，第 I 卷，第 359 頁)

$$2 = \hat{a}\{(\exists x, y) \bullet x \neq y \bullet a = l'x \cup l'y\}，$$

其中一些新的符號都可以從基本邏輯概念推出。至於“後繼”則定義爲：類 a 所有項數的後繼就是 a 與任何不屬於 a 的項 x 一起所構成的類的項數。在此基礎上“正整數”就可以定義爲是對於“直接前趨”這一關係 (“後繼”的逆關係) 而言的 0 的“後代”。至於皮亞諾的五條基本命題，第 (1)，(2)，(4)，(5) 都可以從上述 0、數、後繼和正整數概念中推出。但是在證明第 (3) 條時卻遇到了一點困難，如果宇宙中個體的總數不是有窮的，這個困難就不致於發生。因此爲了不使第 (3) 公理失效，便須要斷定無窮集體的存在。於是羅素不得不追加一條“無窮公理”，即“若 n 是任一歸納基數，則至少有一個類有 n 個個體”。由於 n 是任意的，可知無窮集合必然存在，於是困難才得以解決。另外，羅素在定義因子數可能是無窮的正整數乘法時發現，以往對兩個因數相乘的定義是以假定其中每一個因數的數目是有限爲先決條件的，如果要將這種情況擴展到無限時必然要以如下的命題奠基，即“給定一個類的類，若這類的分子互相排斥，那麼必定至少有一個類，這個類是由那些給定類中的每一個的一個項所組成”。但對這個命題人們既不能證明又不能否證。爲了克服困難，羅素把這個命題作爲公理引進到他的系統中去，這就是所謂的“乘法公理” (或稱“選擇公理”)。羅素引入乘法公理還有其它原因，譬如，他發現在證明“每個非歸納的基數必是一個自反數”的命題時，也須要以乘法公理爲出發點；再者，他看到乘法公理有許多與之等價的重要命題，如策梅羅 (Zermelo) 良序定理等等，如果乘法公理眞，則這些重要命題自然亦眞。由於引進乘法公理，皮亞諾算術理論便可

從他的系統中推演出來。

爲了進一步推演出經典數學較高等的部分， 羅素在正整數的基礎上定義了正數、 負數、 分數、 實數和複數的概念， 這種定義不是用通常增加正整數的定義域的方法來完成的， 而是通過構造一種全新的定義域來實現的。 他把 “ $+m$” 定義爲歸納數 $n+m$ 對於 n 的關係， “ $-m$” 是 n 對於 $n+m$ 的關係； 把分數 “$\frac{m}{n}$” 定義爲， 當 $xn=ym$ 時， 二歸納數 x 、 y 之間的一個關係； 把一個 “實數” 定義爲是以大小爲序的分數序列中之一節， 其中把一個 “有理實數” 定義爲是以大小爲序的分數序列中有邊界的一節， 把一個 “無理實數” 定義爲以大小爲序的分數序列中無邊界的一節， 如 $\sqrt{2}$ 就是所有平方小於 2 的分數所形成的節。 這種定義方法是構造性的， 而不是假定性的。 這種構造是通過顯定義產生一些具有實數通常的性質而完成的。 當然這與直覺主義者那種通過 “實數發生器” 將實數一個個 “創造出來” 的構造方式是不同的。 羅素還用類似的方法引進了其餘的數學概念， 如分析學中的收斂 、 極限 、 連續性 、 微分 、 微商和積分等概念， 以及集合論中的超限基數 、 序數等概念。 這種邏輯構造方法構成了邏輯主義的本質部分。

但是羅素在用分支類型論來處理實數理論時又遇到一些難以克服的困難。 根據定義， 一個 “實數” 是一個有理數的集合，因此一個 “實數集合” 就是一個有理數集合的集合。 所以，根據分支類型論， 在數學中就不能無限制地像以往那樣使用 “對於一切實數” 的短語， 因爲它涉及到 “一切集合的集合” 的提法， 而這種提法是非直謂的。 因此， 根據分支類型論， 人們不能無限制地論及所有實數， 而只能論及具有確定階的實數。 如對屬於一階命題的那些實數， 在論及它們時不能出現 “對於所有實數” 這種形式的短語； 對於屬於二階命題函項的那些實數， 在論及它們時僅能使用 “一階的所有實數” 的短語 $\cdots$ 等等。 如果遵循這種規定， 則以

往實數理論中的許多重要定義和定理都將失效。 爲了克服這種困難， 羅素引進了 “可化歸公理”：“有一個 a 的函項的類型 (譬如說 τ)， 使得給定任何 a 函項， 有屬於所說類型的某個函項與它形式等價”。 它斷言， 任何階的每一個函項都對應一個在形式上等價於它的直謂函項。 接受這條公理， 上述困難便可克服， 因爲依據它我們可以說， 雖然我們論及實數的命題函項確實有不同的階， 但對每一個論及一個實數的高階命題函項都有一個相應的論及同樣實數的直謂函項， 這一函項爲同樣的有理數所滿足而不爲其它有理數所滿足， 這樣我們論及的仍都是直謂函項從而使許多定義和定理仍然有效。 羅素認爲， 可化歸公理與無窮公理和選擇公理一樣， 它對於推演某些數學結論來說是必需的， 但我們無法假定它確實是眞， 可是我們又不能說有無方法完全廢除這條公理。 羅素的學生 E.P. 拉姆齊 (Ramsey) 於 1926 年沿著這個方向作了一些嘗試。

這樣， 羅素實際上是在其邏輯系統的基礎上添加了少量的非邏輯公理 (即無窮公理、 選擇公理和可化歸公理) 後， 將經典數學推演出來。 這項工作雖然不完全符合他原來所持的 “將數學還原爲邏輯” 的宗旨， 但是他具體地、 系統地展開了從邏輯構造出數學的工作， 這確實是數學基礎研究中的一個重大成就。 正因爲如此， 羅素所代表的邏輯主義與稍後的形式主義和直覺主義， 堪稱爲現代數學基礎研究的三大數學哲學流派。

在數學方面， 羅素在《數學原理》第 II 卷中花了大量的篇幅提出了 “關係算術理論”。 他先定義了兩個關係 P、 Q 的 “相似” 的概念， 即有 P 領域對 Q 領域的那麼一個相互關係產生者， 凡是兩項有 P 關係， 它們的相關者就有 Q 關係， 反之亦然。 接著， 他用相似關係定義了 “關係數” 的概念， 即一個 P 關係的關係數就是那些在次序上和 P 相類似的關係的類。 他認爲， 關係數完全是一種新的數， 普通數是它的一種極其特殊化的例子； 一切能用於序數的那些形式定律都能用於這種一般得多的關係數； 藉助關係算

術， 還可以對 "結構" 的概念加以精確的定義。 但是關係算術理論並沒有爲世人所注意， 對此羅素感到十分惋惜。

在數理邏輯方面， 羅素還發展了弗雷格和皮亞諾的工作， 在《數學原理》中建立了一個完全的命題演算和謂詞演算系統； 發展並給出了一個完全的關係邏輯系統； 以及提出了摹狀詞理論。 關係， 無論是對邏輯還是對數學， 都是一個重要而基本的概念。 關於關係邏輯的理論， 在 C. 皮爾斯 (Peirce) 和施勒德的工作中就有了一些， 但很不完全， 而羅素在這方面的工作卻是顯著的。 在關係邏輯中， 他論及到關係的許多重要概念， 如前域、 後域、 關係域、 逆關係等等。 他認爲這些概念都是摹狀函項， 因此他認爲可以用摹狀函項來定義每一種關係。 如 R 是任意一個一對多的關係， 摹狀函項即是 "與 x 有 R 關係的項"， 或者簡單地說，"x 的 R 關係者"。 他還詳細地討論了 "一對多"、"一對一"、"次序" 三種基本關係。 在關係邏輯中， 他還對關係演算進行了研究， 涉及到關係與關係之間的 "包含"、"交"、"聯集"、"否定" 和 "差" 的演算。 摹狀詞理論， 是羅素於 1905 年在 "論指稱" (*On denoting*) 一文中提出的。 在這個理論中他認爲應該把專有名詞與確定摹狀詞區分開來。 一個專有名詞如果是有意義的， 就必須指稱一個對象。 而確定摹狀詞 (即形式爲 "如此這般的那個" 的表達式) 則可以完全沒有任何指稱， 在這個意義上它們是一種 "不完全的符號"， 它們沒有獨立的意義。 離開了在一個句子中的地位， 它們就不代表某種對象， 它們的意義只有在句子的前後關係中才能確定。 他主張取消摹狀詞短語， 把它們表達爲不完全符號， 即把摹狀詞短語擴展爲存在陳述， 並把這些存在陳述解釋爲斷定某一事物具有包含於那個摹狀詞中的屬性。 例如， 命題 "這座金山並不存在" 可以改爲："對 x 的一切值來說，'x 是金的而且是一座山' 這個命題函項總是假的。"

在邏輯方面， 羅素還強調應將命題與命題函項區別開來， 將

蘊涵與推理區別開來。 以前人們認爲邏輯是關於推理的理論， 他則認爲邏輯是關於推理合法性的理論， 即關於蘊涵的理論。 他說， “在我們從一個命題有效地推出另一個命題之處， 無論我們察覺與否， 都是根據兩命題間成立的一個關係推導的： 事實上， 理智在推理中是純粹接受的， 就像常識上認爲理智對可感對象的知覺是純粹接受的一樣”。 (《 數學原理 》， 第 33 頁)

羅素對應用數學的態度經歷了一個否定之否定的變化過程。 最初， 羅素奉行一種畢達哥拉斯主義， 認爲現實世界裡的事物是遵循數學原理的， 他是在這個意義上看重應用數學的。 他說， 他少年時雖然不會打撞球， 卻喜歡關於撞球怎樣運行的數學學說。 他在自己第一本著作即關於幾何基礎的著作中， 就開始試圖運用數學來建立運動概念和動力學定律的牢固基礎。 但是在 1900 年至 1914 年這個時期， 由於他偏重於數理邏輯和數學基礎的理論研究， 便對應用數學的興趣減弱了。 甚至還產生這樣一種想法， 認爲數學基本上不是一個了解和操縱感覺世界的工具， 而是一個抽象的體系， 這個體系是存於柏拉圖哲學意義的天上， 只有它的一種不純淨和墮落的形式才來到感覺世界。 在這個時期， 他採取一種極深的避世思想。 第一次世界大戰之後， 他親眼看見成千上萬的年青人搭上了運送軍隊的火車並在戰爭中慘遭屠殺， 他感到自己與實際的世界有了痛若的結合。 這時他才醒悟到以前他關於抽象的概念世界那些浮誇的思想是沒有內容和無足輕重的了。 從此以後， 羅素不再認爲數學在題材上是和人事無關的學科， 也不再覺得理性高於感覺， 不再覺得只有柏拉圖的理論世界才接近 “實在”(real) 的世界。 在此之後的一些著作如《 物的分析 》(*The analysis of matter*， 1927) 中， 他把數學運用到物理中去， 試圖建立物理學的數學基礎。

在本世紀中， 羅素是數學基礎研究中邏輯主義學派的傑出領導者， 是著名的數理邏輯學家， 同時又是著名的哲學家和社會活動

家， 所有這些都是世人公認的。

文　　獻

原始文獻

[1] B. Russell, *The principles of mathematics*, London, George Allen and Unwin LTD, 1956。

[2] B. Russell, *Principla mathematica*, Vol. I–III, Cambridge University Press, 1925。

[3] B. Russell, *Introduction to mathematical philosophy*, 2nd ed., London, Allen, 1920 (中譯本： B. 羅素， 數理哲學導論， 商務印書館， 1982)。

[4] B. Russell, *My philosophical development*, London, Allen, G., 1959 (中譯本： B. 羅素， 我的哲學的發展， 商務印書館， 1982)。

[5] B. Russell, *The autobiograph of Bertrand Russell*, London, Unwin, 1978。

[6] B. Russell, *On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types*, Proceedings of the London Mathematical Society, series 2, (4), 29 − 53。

[7] B. Russell, *Mathematical logic as based on the theory of types, in J. van Heijenoort (ed.), From Frege To Gödel*, Harvard University Press, 1967, 150 − 182。

研究文獻

[8] R. Carnap, *The logicist foundations of mathematics, in P. Benacerraf and H. Putnam (eds.)*, Philosophy of Mathematics Prentice–Hall Inc., 1964, 31 − 41。

[9] K. Gödel, *Russell's mathematical logic*, philosophy of mathematics, Prentice–Hall Inc., 1964, 211 − 232。

[10] Hao Wang, *From mathematics to philosophy*, London, Routledge and Kegan Pall, 1974。

[11] A.J. Ayer, *Bertrand Russell*, New York, The Viking Press, 1972 (中譯本： A. 艾耶爾， 貝特蘭•羅素， 上海譯文出版社， 1982)。

[12] W. Kneale and M. Kneale, *The development of logic*, Oxford, At the Clarendon Press, 1962 (中譯本： W. 涅爾等， 邏輯學的發展， 商務印書館， 1985)。

[13] M. Munitz, *Contemporary analytic philosophy*, Macmillan Publishing co. Inc., 1981 (中譯本： M. 穆尼茨， 當代分析哲學， 復旦大學出版社， 1986)。