勒 貝 格

勒貝格， H.L. (Lebesgue， Henri Léon) 1875 年 6 月 28 日生於法國的博韋 (Beauvais)；1941 年 7 月 26 日卒於巴黎。數學。

勒貝格之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lebesgue.html

勒 貝 格

周 民 強
(北京大學)

勒貝格， H.L. (Lebesgue， Henri Léon) 1875 年 6 月 28 日生於法國的博韋 (Beauvais)；1941 年 7 月 26 日卒於巴黎。數學。

勒貝格的父親是一名印刷廠職工， 酷愛讀書， 很有教養。 在父親的影響下， 勒貝格從小勤奮好學， 成績優秀， 特別善長計算。 不幸， 父親去世過早， 家境衰落。 在學校老師的幫助下進入中學， 後又轉學巴黎。 1894 年考入高等師範學校。

1897 年大學畢業後， 勒貝格在該校圖書館工作了兩年。 在這期間， 出版了 E. 波萊爾 (Borel) 關於點集測度的新方法的《函數論講義》(*Leçons sur la théorie des functions*， 1898)， 特別是研究生 R. 貝爾 (Baire) 發表了關於不連續實變函數理論的第一篇論文。 這些成功的研究工作說明在這些嶄新的領域中進行開拓將會獲得何等重要的成就， 從而激發了勒貝格的熱情。 從 1899 年到 1902 年勒貝格在南錫的一所中學任教， 雖然工作繁忙， 但仍孜孜不倦地研究實變函數理論， 並於 1902 年發表了博士論文 “積分、 長度、 面積”(*Intégrale*， *longueur*， *aire*)。 在這篇文章中， 勒貝格創立了後來以他的名字命名的積分理論。 此後， 他開始在大學任教 (1902 − 1906 在雷恩； 1906 − 1910 在普瓦蒂埃)， 而在此期間， 他也進一步出版了一些重要的著作：《積分法和原函數分析的講義》(*Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives*， 1904)；《三角級數講義》(*Leçons sur les séries trigonométriques*， 1906)。 接著， 勒貝格又於 1910 − 1919 年在巴黎 (韶邦) 大學擔任講師， 1920 年轉聘爲教授， 這時他又陸續發表了許多關

於函數的微分、積分理論的研究成果。勒貝格於 1921 年獲得法蘭西學院教授稱號，翌年作為 C. 喬丹 (Jordan) 的後繼人被選爲巴黎科學院院士。

勒貝格對數學的主要貢獻屬於積分論領域，這是實變函數理論的中心課題。十九世紀以來，微積分開始進入嚴密化的階段。1854 年 B. 黎曼 (Riemann) 引入了以他的名字命名的積分，這一理論的應用範圍主要是連續的函數。隨著 K. 魏爾斯特拉斯 (Weierstrass) 和 G. 康托爾 (Cantor) 工作的問世，在數學中出現了許多 “奇怪” 的函數與現象，致使黎曼積分理論暴露出較大的局限性。幾乎與這一理論發展的同時 (1870 − 1880 年)，人們就已經開展了對積分理論的改造工作。當時，關於積分論的工作主要集中於無窮集合性質的探討，而無處稠密的集合具有正的外 “容度” 性質的發現，使集合的測度概念在積分論的研究中佔有重要地位。積分的幾何意義是曲線圍成的面積，黎曼積分的定義是建立在對區間長度的分割的基礎上的。因此，人們自然會考慮到如何把長度、面積等概念擴充到更廣泛的集合類上，從而把積分概念置於集合測度理論的框架之中。這一思想的重要性在於使人們認識到：集合的測度與可測性的推廣將意味著函數的積分與可積性的推廣。勒貝格積分正是建立在勒貝格測度理論的基礎上的，它是黎曼積分的擴充。

爲勒貝格積分理論的創立作出重要貢獻的首先應推喬丹，他在《分析教程》(*Cours d’analyse*，1893) 一書中闡述了後人稱謂的喬丹測度論，並討論了定義在有界喬丹可測集上的函數，採用把定義域分割爲有限個喬丹可測集的辦法來定義積分。雖然喬丹的測度論存在著嚴重的缺陷 (例如存在著不可測的開集，有理數集不可測等)，而且積分理論也並沒有作出實質性的推廣，但這一工作極大地影響著勒貝格研究的視野。在這一方向上邁出第二步的傑出人物是波萊爾，1898 年在他的《函數論講義》中向人們展示了 “波萊爾

集" 的理論。 他從 R^1 中開集是構成區間的長度總和出發， 允許對可列個開集作聯集與補集的運算， 構成了所謂以波萊爾可測集爲元素的 σ 代數類， 並在其上定義了測度。 這一成果的要點是使測度具備完全可加性 (喬丹測度只具備有限可加性)， 即對一列互不相交的波萊爾集 $\{E_n\}$， 若其聯集是有界的， 則其聯集的測度等於每個 E_n 的測度的和。 此外， 他還指出， 集合的測度和可測性是兩個不同的概念。 但在波萊爾的測度思想中， 卻存在著不是波萊爾集的喬丹可測集 (這一點很可能是使他沒有進一步開創積分理論的原因之一)。 特別是其中存在著零測度的稠密集， 引起了一些數學家不快。 然而勒貝格卻洞察了這一思想的深刻意義並接受了它。 他突破了喬丹對集合測度的定義中所作的有限覆蓋的限制， 以更加一般的形式發展和完善了波萊爾的測度觀念， 給予了集合測度的分析定義： 設 $E \subset [a,b]$， 考慮可數多個區間 $\{I_i\}$ 對 E 作覆蓋。 定義數值

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_i |I_i| ： \bigcup_i I_i \supset E\right\}$$

爲 E 的測度 (即今日之勒貝格外測度)， 且若

$$m^*(E) + m^*([a,b]\backslash E) = b - a，$$

則稱 E 爲可測集 (即 E 是勒貝格可測的)。 在此基礎上， 勒貝格引入了新的積分定義： 對於一個定義在 $[a,b]$ 上的有界實值函數 $f(x)(m \leq f(x) \leq M)$， 作 $[m,M]$ 的分割 Δ：

$$m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = M 。$$

令

$$E_i = \{x \in [a,b] ： y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i\}，(i = 1、2、\cdots、n)$$

並假定這些集合是可測的 (即 $f(x)$ 是勒貝格可測函數)。 考慮和式

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot m(E_i) \text{、} \ S_\Delta = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot m(E_i) \text{，}$$

如果當 $\max\{y_i - y_{i-1}\} \to 0$ 時， s_Δ 與 S_Δ 趨於同一極限值， 則稱此值為 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的積分。 勒貝格曾對他的這一積分思想作過一個生動有趣的描述：“我必須償還一筆錢。 如果我從口袋中隨意地摸出來各種不同面值的鈔票， 逐一地還給債主直到全部還清， 這就是黎曼積分； 不過， 我還有另外一種作法， 就是把錢全部拿出來並把相同面值的鈔票放在一起， 然後再一起付給應還的數目， 這就是我的積分”。 在他的這一新概念中， 凡喬丹可測集， 波萊爾可測集都是勒貝格可測集。 勒貝格積分的範圍包括了由貝爾引入的一切不連續函數。

從數學發展的歷史角度看， 新的積分理論的建立是水到渠成的事情。 但是可貴的是， 與同時代的一些數學家不同， 在勒貝格看來， 積分定義的推廣只是他對積分理論研究的出發點， 他深刻地認識到， 在這一理論中蘊含著一種新的分析工具， 使人們能在相當大範圍內克服黎曼積分中產生的許多理論困難。 而正是這些困難所引起的問題是促使勒貝格獲得這一巨大成就的動力。

這方面的第一個問題是早在十九世紀初期由 J. 傅里葉 (Fourier) 在關於三角級數的工作中不自覺地引發的： 當一個有界函數可以表示為一個三角級數時， 該級數是它的傅里葉級數嗎? 這一問題與一個無窮級數是否可以逐項積分有著密切的關係。 傅里葉當時曾認為在其和為有界函數時這一運算是正確的， 從而給上述問題以肯定的回答。 然而到了十九世紀末期， 人們認識到逐項積分並不總是可行的， 甚至對於黎曼可積函數的均勻有界的級數也是這樣，因為由該級數所表示的函數不一定是黎曼可積的。 這個問題的討論促使勒貝格在新的積分理論中獲得了一個十分重要的結果： 控制收斂定理。 作為一個特殊情形他指出， 勒貝格可積的均勻有界級數都可

以逐項進行積分，從而支持了傅里葉的判斷。逐項積分在本質上就是積分號下取極限的問題，它是積分論中經常遇到的最重要的運算之一。從而這一定理的創立顯示出勒貝格積分理論的極大優越性。

微積分基本定理

$$\int_a^x f'(x)dx = f(x) - f(a)，\ x \in [a,b] \tag{1}$$

是微積分學的核心。然而這一公式的運用在黎曼積分意義下卻有較大的限制性，在 1878－1881 年間，U. 迪尼 (Dini) 和 V. 沃爾泰拉 (Volterra) 曾構造了這樣的函數，它們具有有界的導函數，但是導函數不是黎曼可積的，從而基本定理對此是不適用的。此後，聯繫到黎曼積分對無界函數的推廣也發現了類似的困難。然而，在新的積分理論中，勒貝格指出，對有界函數來說，這一困難是不存在的。在 f' 是有限值但無界的情形，只要是可積的，基本定理仍是成立的，而且這正相當於 f 是有界變差函數。同時，逆向問題也被人們提出來了：何時一個連續函數是某個函數的積分? 爲此，A. 哈納克 (Harnack) 曾導入了後來叫做絕對連續的函數。約在 1890 年期間，絕對連續函數就被當作絕對收斂的積分的特徵性質來研究，雖然還沒有人能眞正證明任何絕對連續函數都是一個積分。然而，勒貝格通過對於導數幾乎處處爲零但函數本身並非常數的函數的考察，認識到在他的積分意義下，上述結論是正確的。從而得出了積分與原函數之間的一個完整結果：公式 (1) 成立的充分且必要條件是：$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的絕對連續函數。

另一個與積分論有關的問題是曲線的長度問題。十九世紀前期，很少有人注意到一條曲線長度的定義和可求長問題。一般都認爲以 $y = f(x)(a \le x \le b)$ 所描述的曲線段總是有長度的，且長度可用

$$L = \int_a^b [1 + (f')^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

表示。 杜布瓦 -雷蒙 (Du Bois-Reymond) 在研究關於兩點間長度最短的曲線的變分問題時， 從 G.P.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 關於函數的一般觀點出發探討了曲線長度的概念。 由於用到了極限過程這一分析手段， 他認爲 (1879) 積分理論對曲線長度的概念和可求長性質的陳述是必不可少的。 但到了十九世紀末期， 這一見解由於 L. 希弗爾 (Scheeffer， 1859 − 1885) 舉出的反例而受到責難， 這一反例致使定積分

$$\int_{x_0}^{x_1} [1 + (f')^2]^{\frac{1}{2}} dx$$

在黎曼積分的定義下沒有意義。 勒貝格對這一問題很感興趣， 並應用他的積分論中的方法和結果， 證明了曲度長度與積分概念是密切相關的， 從而恢復了杜 • 布瓦 − 雷蒙斷言的可信性。

勒貝格關於微積分基本定理和曲線可求長理論的研究， 促使他發現有界變差函數是幾乎處處可微的這一事實。 (註： 喬丹曾指出不定積分是有界變差函數。) 這一定理的重要性在於： 人們對於連續函數的可微性已經討論了一個多世紀， 在十九世紀的幾乎前半個世紀， 人們還一直認爲不連續函數在其定義區域中的絕大多數點上都是可微的。 雖然連續函數總被誤認爲是逐段單調的， 但這使單調性與可微性聯繫起來了， 儘管是脆弱的。 十九世紀末期， 這一看法逐漸被人懷疑， 甚至有些其地位不低於魏爾斯特拉斯的數學家都覺得存在著無處可微的連續的單調函數。 於是， 在這一意義下， 勒貝格的定理支持了前一代數學家的直覺印象。

在傳統的關於二重積分與累次積分的等值性定理上， 黎曼積分也反映出它的不足之處， 人們發現了使該定理不成立的例子。 從而作爲一個結論， 這一定理的傳統說法必須修改， 然而在把積分推廣於無界函數的情形時， 這一修改變得更加嚴峻。對此， 勒貝格的重積分理論， 使得用累次積分來計算二重積分的函數範圍擴大了。 他在 1902 年給出的一個結果奠定了 1907 年 G. 傅比尼 (Fubini) 創立的著名定理的基礎。

勒貝格積分理論作爲分析學中的一個有效工具的出現，尤其是他在三角級數中應用的高度成功，吸引了許多數學家，例如 P. 法圖 (Fatou)，F. 里斯 (Riesz) 和 E. 菲舍爾 (Fischer) 等，來探討有關的問題，使得這一領域開始迅速發展。其中特別是里斯關於 L^p 空間的工作 (註：勒貝格可積的函數全體構成的距離空間是完備的)，使得勒貝格積分在積分方程和函數空間的理論中持久地佔有重要的位置。

雖然勒貝格在最初階段專注於他自己的積分理論，然而在激勵抽象測度和積分論研究的開展上，他的工作仍是先導性的。1910 年，勒貝格發表題爲 “關於不連續函數的積分” (*Sur l'intégration des fonctions discontinues*) 的重要專題報告。在這裡他不僅把積分、微分理論推廣於 n 維空間，而且引入了可數可加集合函數的概念 (定義於勒貝格可測集類上)，指出這些函數是定義在集合類上的有界變差函數。正是因爲對於有界變差與可加性概念之間聯繫的考察，使得 J. 拉東 (Radon) 作出了更廣的積分定義，其中把 T.-J. 斯蒂爾切斯 (Stieltjes) 積分和勒貝格積分作爲它的特殊情形。他還在 1913 年的文章中指出，勒貝格的思想在更一般的背景上也是有效的。

勒貝格的一生都獻給了數學事業，在 1922 年被推舉爲院士時，他的著作和論文已達 90 種之多，內容除積分理論外，還涉及集合與函數的構造 (後來由俄國數學家 H. 魯金 (Лузин) 及其他學者進一步作出發展)、變分學、曲面面積以及維數理論等重要結果。在勒貝格生前最後 20 年中，研究工作仍然十分活躍並反映出廣泛的興趣，不過作品內容大都涉及教育、歷史及初等幾何。

勒貝格的工作是對本世紀科學領域的一個重大貢獻，但和科學史上所有新思想運動一樣，並不是沒有遇到阻力的。原因是在勒貝格的研究中扮演了重要角色的那些不連續函數和不可微函數被人認爲是違反了所謂的完美性法則，是數學中的變態和不健康部

分。從而受到了某些數學家的冷淡，甚至有人曾企圖阻止他關於一篇討論不可微曲面的論文的發表。勒貝格曾感嘆地說：“我被稱爲一個沒有導數的函數的那種人了!” 然而，不論人們的主觀願望如何，這些具有種種奇異性質的對象都自動地進入了研究者曾企圖避開它們的問題之中。勒貝格充滿信心地指出：“使得自己在這種研究中變得遲鈍了的那些人，是在浪費他們的時間，而不是在從事有用的工作。”

由於在實變函數理論方面的傑出成就，勒貝格相繼獲得胡勒維格 (Houllevigue) 獎 (1912 年)；龐斯列 (Poncelet) 獎 (1914 年) 和賽恩吐 (Saintour) 獎 (1917 年)。許多國家和地區 (如倫敦、羅馬、丹麥、比利時、羅馬尼亞和波蘭) 的科學院都聘他爲院士，許多大學授予他名譽學位，以表彰他的貢獻。

文　獻

原始文獻

[1] H.L. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, Annali di Matematica Pura ed Appl., 7(1902), 3, 231－359。

[2] H.L. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904；2nd ed., 1928。

[3] H.L. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, 1906。

[4] H.L. Lebesgue, *Sur l'intégration des fonctions discontinues*, Ann. Ecole Norm. Sup., 27(1910), 3, 361－450。

關於其它文獻可參閱 K.O. May 的 *Measure and the integral* (San Francisco, 1966)。

研究文獻

[5] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration：its origins and development*, Chelsea Publishing Company, 1975。