哈　代

哈代，G. H. (Hardy，Godfrey Harold) 1877 年 2 月 7 日生於英國克蘭利 (Cranleigh)；1947 年 12 月 1 日卒於劍橋。數學。

哈代之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Hardy.html`

哈　代

高　嶸

(遼寧師範大學)

哈代， G. H. (Hardy， Godfrey Harold) 1877 年 2 月 7 日生於英國克蘭利 (Cranleigh)； 1947 年 12 月 1 日卒於劍橋。 數學。

哈代的父親 I. 哈代 (Hardy) 是克蘭利中學的教師， 母親索菲婭 (Sophia) 是林肯師範學院的教師， 他還有一個妹妹。 哈代的父母很有文化素養， 也極重視數學， 因經濟拮据未能上大學， 卻爲兒女提供了良好的教育。

哈代在童年時代就顯示出數學的機敏， 在克蘭利中學接受早期教育時， 表現出在數論方面的早慧與多方面的才能。 十三歲時， 他獲得獎學金進入當時以數學家搖籃而著稱的溫切斯特 (Winchester) 學院學習。 1896 年又獲入學獎學金進入劍橋大學三一學院繼續深造， 他的數學生涯從此與劍橋緊密聯繫起來。 哈代很早就養成喜歡自由提問和探索的習慣， 在劍橋開始學習時， 他對於機械的授課模式不滿， 後來幸運地被允許轉聽應用數學家 A.E.H. 拉弗 (Love) 教授的課。 這對於哈代後來成長爲一名數學家至關重要。 他在著作 (文獻 [3]， 第 29 節) 中生動地寫道：“第一個使我撥雲見日的是拉弗教授， 他教了我幾個學期， 使我對分析有了第一個嚴肅的概念。 但最使我感激的是他建議我閱讀 M.E.C. 喬丹 (Jordan) 的名著《 分析教程 》(*Cours d’analyse*)。 我永遠不會忘記我讀那本傑作時的震驚， 這是我這代數學家受到的第一個啓迪， 讀這本書我才第一次認識到數學眞正意味著什麼。”

哈代在大學學習期間成績優異。 1898 年， 他參加了劍橋的數學榮譽學位考試， 這是劍橋大學的傳統之一， 始於十八世紀。 哈

代成爲一等及格者，這主要得益於他平時在迅速解題方面的有效訓練，但對傳統極具反抗精神的哈代認爲這種考試是沒有意義的。1900 年，他被選爲三一學院的研究員，隨後以極大的熱情投入數學研究中，第二年與 J.H. 金斯 (Jeans) 共同獲得了史密斯獎金。1906 年他成爲三一學院的講師，直到 1919 年一直在那兒工作。1900 − 1911 年間哈代寫出大量級數收斂、求積分及有關問題的論文，這些論文爲他贏得了分析學家的聲望。1908 年，他的名著《純粹數學教程》(*A course of pure mathematics*) 出版了，這部教科書改變了英國大學中的教學狀況。1910 年，他當選爲英國皇家學會會員。隨後，被哈代自稱爲生活中的眞正的轉折點出現了，1911 年他開始了同 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 的長期合作，1913 年他發現了 S.A. 拉馬努金 (Ramanujan)。

哈代長李特爾伍德八歲，他們結識於 1904 年，在長達三十五年的合作中，聯合發表了約一百篇論文，其中包括丟番圖逼近、堆壘數論、數的積性理論、黎曼 ξ 函數、不等式、一般積分、三角級數等廣泛的內容。哈代 − 李特爾伍德極大函數，哈代 − 李特爾伍德圓法，哈代 − 李特爾伍德定理等聯繫著二人名字的數學成果正是他們親密合作的寫照。在他們集中合作的 1920 − 1931 年間，哈代執教於牛津而李特爾伍德執教於劍橋，他們通過學院的郵政來郵寄數學信件，即使二人同在三一學院時也是如此，並且他們達成一種默契：當互相收到信件時，先不讀解法，而是要獨立解決其中的問題，直到取得一致意見，最後由哈代定稿。當時，一些不了解內情的國外數學家認爲李特爾伍德根本不存在，只是哈代虛構的一個筆名。事實上，李特爾伍德本身就是一個出色的數學家。通過這種密切的學術合作，二人互相切磋促進，共同建立了二十世紀上半葉具有世界水準的英國劍橋分析學派。

哈代稱自己對拉馬努金的發現是他一生中的一段浪漫的插

曲。 拉馬努金出生於印度的馬德拉斯 (Madras)， 幼年即顯示出數學的興趣和才能， 但因生活貧困， 要不斷爲生計奔波， 只能靠自覺汲取數學知識。 1913 年初他給哈代寄了一封信， 信中陳述了他對質數分佈的研究並列有 120 條公式， 涉及數學中多個領域。 這些公式大部分已被別人證明， 有些看起來容易， 實際上證明起來很困難。 特別是後來被 L.J. 羅傑斯 (Rogers) 和 G.N. 沃森 (Watson) 證明的三個公式完全難倒了哈代。 哈代確信拉馬努金是一位數學天才， 於是邀請他到英國， 但作爲一個婆羅門教的信徒， 拉馬努金對離開印度感到躊躇。 哈代繼續力勸拉馬努金到劍橋， 並經多方努力爲他安排了獎學金， 1914 年 4 月， 拉馬努金來到英國。 哈代花了很多心血教授拉馬努金現代歐洲數學知識， 他發現拉馬努金知識的局限竟然與它的深奧同樣令人吃驚。 拉馬努金對於證明僅有一種模糊不淸的概念， 對於變量的增量、 柯西定理根本不熟悉， 但是對於數值和組合方面的事實， 連分數、 發散級數及積分、 數的分拆、 黎曼 ξ 函數和各種特殊級數卻有深度的理解。 他有很強的直覺和推理能力， 其工作和思維方式多具挑戰性。 在哈代和李特爾伍德等人的幫助下， 拉馬努金進步很快， 在質數分佈、 堆壘數論、 廣義超幾何級數、 橢圓函數、 發散級數等領域取得了很多成果。 他在歐洲的五年裡發表了 21 篇論文， 17 篇註記， 其中幾篇是與哈代合作的。 他和哈代一起對整數分拆問題作出了驚人的解決， 首創了正整數 n 的分拆數 $p(n)$ 的漸近公式， 這無疑源自拉馬努金那極強的洞察力和哈代對於函數理論的嫻熟掌握。 哈代與拉馬努金的成功合作並未持續太久。 1917 年 5 月拉馬努金患上了肺結核病， 由於戰爭條件及宗教信仰的束縛， 拉馬努金未得到良好的醫治。 1919 年 2 月他回到了印度， 次年 4 月去世， 年僅三十三歲。 哈代對這位印度數學奇才的英年早逝深感痛惜， 他參與整理了拉馬努金的論文集， 並著有《拉馬努金》(*Ramanujan*， 1940) 一書， 書中包括關於拉馬努金生活和工作的十二篇演講稿， 比

較詳細地記述了拉馬努金的生平和研究成果， 並作了適當的評論， 是了解和研究拉馬努金的重要文獻。 哈代和拉馬努金這一段交往也長期被數學界傳爲佳話。

1914 年第一次世界大戰爆發， 哈代強烈反對對那些反戰者的殘酷迫害， 譴責對進行反戰宣傳的 B.A.W. 羅素 (Russell) 的解職和監禁。 後來， 在一本秘密傳播的小册子《羅素和三一》(*Bertrand Russell and Trinity*， 1970) 中， 他描述了羅素事件及圍繞這件事掀起的巨大波瀾。 1919 年， 他離開劍橋應聘牛津大學薩維爾幾何學教授， 這一榮譽職位是依照英國數學家 H. 薩維爾 (Savilian) 的意見設立的， 他曾於 1585 − 1592 年任默頓學院院長。 哈代在牛津創立了一個活躍的研究團體。 1928 − 1929 年間他前往美國普林斯頓做訪問教授， 與美國數學家 O. 維布倫 (Veblen) 交換。 1931 年重返劍橋， 接替 E.W. 霍布森 (Hobson) 成爲塞得林 (Sadleirian) 純粹數學教授， 居此位直到 1942 年退休。 1947 年， 哈代當選爲法國科學院外籍院士， 是從各國各研究領域中選出的十位科學家之一。 他還擔任過全國科學工作者學會主席， 倫敦數學會主席。 在他的數學研究生涯中， 獲得了許多大學和研究院的獎勵。 1920 年獲皇家勳章， 1929 年獲德摩根獎章， 1940 年獲西爾威斯特獎章， 1947 年獲皇家學會最高獎章科普利獎章。

哈代外貌漂亮， 很有風度。 他和妹妹都終生未婚， 他得到了胞妹始終如一的精心照料， 尤其在他的晚年。 1947 年， 哈代在劍橋辭世。

哈代被譽爲二十世紀傑出的分析學家， 他的數學貢獻涉及解析數論、 調和分析、 函數論等方面。 他一生著述頗豐， 計有 8 部專業書籍和大約 350 篇論文， 包括獨著或合作的， 全部在《倫敦數學會雜誌》(*Journal of the London Mathematical Society*， 1950) 中列出， 論文選從 1966 年開始在牛津出版了 7 卷， 由倫敦數學會的成員校訂， 並附有註釋。

1. 研究堆壘數論、首創圓法

整數分拆是堆壘數論的一個基本問題，即把正整數 n 分成不計次序的若干個正整數之和。如 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ ($n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_s > 0$) 爲 n 的一種分拆。以 $p(n)$ 記 n 的不加限制條件的所有分拆個數，當 n 增加時，$p(n)$ 值迅速增加，如 $p(200)$ 是一個 13 位數，$p(500)$ 是一個 22 位數。

1748 年，歐拉通過高超的手算技巧導出 $p(n)$ 的母函數

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \left[\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n)\right]^{-1}。$$

此後，關於整數分拆的研究不斷發展，但限於初等方法，未引入實質性的分析思想，只能相當繁瑣地計算較小整數的分拆數。1916 年，極富經驗與熱情的英國計算專家 P.A. 麥克馬洪 (MacMahon) 花了一個月時間算出 $p(200) = 3972999029388$。整數分拆理論研究中實質性的突破發生在 1918 年。哈代和拉馬努金合作發表論文“組合分析中的漸近公式”(*Asymptotic formulae in combinatory analysis*)，應用新的分析方法－圓法的思想給出了 $p(n)$ 的漸近公式

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{k\sqrt{n}}，\ k = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}。$$

在此之前，他們曾用初等方法證明了 $p(n)$ 的估計式

$$Hn^{-1}e^{2\sqrt{n}} < p(n) < kn^{-1}e^{2\sqrt{2n}}。$$

利用哈代－拉馬努金公式，8 項就能求出 $p(200)$ 的值，誤差僅爲 0.004。爲了確切計算任意大的 n 的分拆數，他們又得出 $p(n)$ 的既漸近又準確的分解式。進一步的結果是 H. 拉德馬赫爾

(Rademacher) 1937 年得到的級數表達式

$$p(n) = 2\sum_{q=1}^{\infty} q^{\frac{1}{2}} L_q(n)(u_q + v_q) ,$$

其中

$$\begin{aligned} u_q + v_q &= \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\lambda_n}\sinh\frac{k\lambda_n}{q}\right) ,\\ \lambda_n &= \sqrt{n-\frac{1}{24}} ,\\ |L_q(n)| &< 2q^{5/6} \text{。} \end{aligned}$$

哈代與拉馬努金的工作在近代堆壘數論的研究中具有劃時代的意義，不僅在數論領域引起數學家們的極大興趣，而且促進了改進的經典分析和現代不等式理論的發展。

華林問題是堆壘數論中另一個著名問題，1770 年由英國數學家 E. 華林 (Waring) 提出，可敍述爲：對於每個整數 $k \geq 2$，存在一個正整數 $s(k)$，使得每個正整數 n 是 s 個非負的 k 次方數之和，即不定方程

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = n \tag{1}$$

對所有整數 $n \geq 0$ 有非負整數解 x_j $(1 \leq j \leq s)$。記 $s(k)$ 的最小值爲 $g(k)$。1909 年，希爾伯特證明了華林猜想，但他只完成對每個 k，$g(k)$ 存在性的證明，未給出對任意 k，確定 $g(k)$ 值的方法。其後幾位數學家的工作同樣限於存在性的證明。哈代和李特爾伍德的工作改變了這一狀況，他們討論使方程 (1) 對充分大的 n 可解的 $s(k)$ 的最小值 $G(k)$，這比討論 $g(k)$ 更有意義。1919 年，他們發表了 “華林問題新解法” (*A new solution of Waring's problem*) 一文，1920 − 1928 年，他們以 “‘分拆數’的一些問題” (*Some problems of “partitio numerorum*”) 爲主標題發表了一系列文

章， 開創並發展了後來以 “哈代－李特爾伍德圓法” 而著稱的研究方法。

以 $r_{s,k}(n)$ 表示方程 (1) 的解數， 令

$$s(\alpha)=\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i\alpha x^k} ,$$

其中 $p=[n^{\frac{1}{k}}]$。 由於

$$\int_0^1 e^{2\pi i\alpha x}dx=\begin{cases}1, & \alpha=0\\ 0, & \alpha\neq 0\end{cases} ,$$

所以

$$r_{s,k}(n)=\int_0^1 s(\alpha)^s e^{-2\pi i n\alpha}d\alpha 。$$

將積分區間稍微平移， 作法里 (Farey) 分割， 將 $[0,\ 1]$ 分爲優弧和劣弧兩部分， 優弧由分母較小的分數的小區間組成； 劣弧由 $[0,\ 1]$ 其餘部分組成。 從優弧上的積分可以計算出 $r_{s,k}(n)$ 的主項， 問題歸結爲從劣弧上的積分推導出 $r_{s,k}(n)$ 餘項的研究， 這就是圓法。哈代和李特爾伍德在 1922 年證明了當 $s\geq(k-2)2^{k-1}+5$ 時， $r_{s,k}(n)$ 有一個漸近公式， 從而推出對任意 k， $G(k)\leq(k-2)2^{k-1}+5$。 對於較小的 k， 1938 年華羅庚證明了當 $s\geq 2^k+1$ 時， $r_{s,k}(n)$ 有漸近公式， 得到 $G(k)\leq 2^k+1$， 五十年後 R.C. 沃恩 (Vaughan) 改進爲 $s\geq 2^k$。 對於較大的 k， И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 用改進的方法得到 $s\geq[10k^2\log k]$， 華羅庚改進其方法， 推出當 $k>10$ 時， $s\geq 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$。 此外已經知道 $G(2)=4$， 1939 年， H. 達文波特 (Davenport) 證明了 $G(4)=16$， 1942 年， Ю. В. 林尼克 (Линик) 證明了 $G(3)\leq 7$。 通過哈代－李特爾伍德圓法， $k>3$ 的 $G(k)$ 的最好估計已經得到： 當 $k\to\infty$， $G(k)\leq k(\log k)(2+o(1))$。

哈代－李特爾伍德圓法的特色之一是它適用於堆壘數論中的各種問題， 尤其是在哥德巴赫猜想的研究中有有效的應用。 以哈代和

李特爾伍德的工作爲起點， 維諾格拉多夫、 華羅庚、 達文波特等人對這一方法的發展做出了各自的貢獻 (詳見文獻 [12])。

2. 黎曼猜想研究中的突破

哈代的工作涉及解析數論的多個分支。 黎曼猜想即爲其中之一。 1859 年， G.F.B. 黎曼 (Riemann) 提出猜想： 複變函數

$$\xi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad (s=\sigma+it，\ \sigma>1)$$

的全部非平凡零點都位於直線

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

上。 後來這一猜想成爲著名的希爾伯特 23 問題中第 8 問題的首要問題， 它的解決聯繫著數論中的許多問題。 哈代對這個問題特別感興趣， 發表了多篇討論 $\xi(s)$ 函數的論文。 1914 年， 他證明了 $\xi(s)$ 有無窮多零點位於直線

$$\sigma=\frac{1}{2}$$

上， 在黎曼猜想的研究中取得了重大突破。 若以 $N_0(T)$ 表示 $\xi(s)$ 在

$$\frac{1}{2}+it\quad (0<t\leq T)$$

直線段上的零點數目，則當 $T\to\infty$ 時， $N_0(T)\to\infty$。 1921 年，哈代與李特爾伍德證明了存在 $A>0$， 使 $N_0(T)>AT$， 這一定理作爲當時關於黎曼猜想的最好結果保持了二十多年。 在此基礎上， A. 塞爾伯格 (Selberg) 於 1942 年、 N. 萊文生 (Levison) 於 1974 年作了重要推進， 但此猜想至今未被證明或否定。 自哈代的

工作之後，圍繞黎曼猜想已發展成爲錯綜複雜的分析分支－$\xi(s)$ 函數理論。在假定黎曼猜想成立的前提下，哈代曾在論文中指出哥德巴赫問題的研究方法和方向。

3. 開經典 H^P 空間理論之端

H^P 空間又稱哈代空間，是勒貝格 (L^p) 以外重要的函數空間之一。單變量的 H^p 空間，最早來源於複變函數論。1915 年，哈代引入了單變量 H^p 函數類：對於在複平面的單位圓 $|z|<1$ 內解析的函數 $f(z)$，如果當 $r\to 1$ 時，積分平均值

$$M_p(r,f)=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}\quad (0<p<\infty),$$

則稱 $f(z)$ 屬於 H^p。這被認爲是經典 H^p 空間理論的開端。1923 年 F. 里斯 (Riesz) 證明了 H^p 空間是完備的賦範空間並命名爲哈代空間，簡記爲 H^p，是複變函數論的重要研究對象之一。哈代和李特爾伍德還證明了一系列關於邊界函數光滑性、H^p 空間函數的積分、H^p 空間中函數的係數及重排方面的定理。И. И. 普里瓦洛夫 (Привалов)、F. 里斯和 M. 里斯兄弟、В. И. 斯米爾諾夫 (Смирнов) 及 G. 賽格 (Szegö) 等人都對經典 H^p 空間理論做出過貢獻。近年來又有許多推廣，調和分析、複分析、泛函分析及偏微分方程的許多問題都是在 H^p 空間中討論的。

4. 主要數學著作

《純粹數學教程》是哈代早期對數學的最大貢獻。這是英國第一部嚴謹精確的關於數、函數、極限等內容的講解性著作，適於大學在校生學習，受到普遍歡迎，1952 年已發行到第十版。這本書的主要特點是內容比較基本，未涉及均勻收斂、二重級數、無窮乘積等內容。另一特色是章末附有大量有一定難度的習題。哈

代認爲他已儘量避免包含眞正困難的思想。 1937 年第七版， 哈代又在章末挿入一些由拉弗教授提供的從過去二十年的數學榮譽學位考試中精選出的試題， 這些題目對學生的學習大有裨益。 此書初寫時， 分析在劍橋不被重視， 學生的水準也較低， 而二十年後卻出現了一股研究分析的熱潮， 哈代及其著作對這一轉變起到了不可忽視的作用。《純粹數學教程》不僅吸引了在校生， 激發了他們的思想和才幹， 而且對一些青年分析學家也產生了有益的影響。

哈代與李特爾伍德、 G. 波利亞 (Pólya) 合著的《不等式》(*Inequalities*， 1934) 也是一部重要著作， 常被作爲文獻引用。 文中內容共分 10 章， 介紹了各種類型的不等式， 任意函數平均値和收斂函數理論， 微積分的各種應用， 無窮級數， 變分學的應用以及與雙線性型和多重線性型有關的定理， 希爾伯特不等式和它的模擬及開拓。 其中包括一些哈代的獨創性工作， 如哈代不等式是他在試圖化簡希爾伯特定理的證明時發現的， 在 H^p 空間理論中有重要應用。

《發散級數》(*Divergent series*， 1949) 是哈代逝世前不久完成的一部較有影響的著作。 李特爾伍德在序言中寫道："他所有的著作都給他帶來了某種程度的快樂， 而這一本， 他最後的一部書， 則是他最珍愛的"。 事實上， 從 1931 年哈代返回劍橋時就開始間斷地收集有關的文獻， 並對這本書的價値充滿信心。 1821 年， A.L. 柯西 (Cauchy) 嚴格定義了收斂概念後， 人們只注重收斂級數的討論。 直至十九世紀末才開始發散級數的明確研究。 哈代在其著作中總結了發散級數的歷史發展概況、 研究方法及成果。 求和法是發散級數理論的主要研究課題之一， 即把不收斂的級數的和給予適當的解釋而加以定義， 使其在柯西意義下給出有限的和。哈代書中介紹的方法有特殊求和法、 算術方法、 歐拉和波萊爾方法、 豪斯多夫方法， 還論述了冪級數的陶伯型定理、 維納的陶伯型定理、 歐拉－馬克勞林求和公式。哈代在陶伯

型定理的研究中得到了好的結果， 1909 年他證明了在較弱的條件 $a_n = O(n^{-1})$ 下， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂於 S， 李特爾伍德證明了這個條件不能再減弱。

此外，哈代對丟番圖逼近、 質數分佈理論、 哥德巴赫猜想均有較深入的研究， 他與 E.M. 賴特 (Wright) 合著的《數論導引》(*An introduction to the theory of numbers*， 1938) 包括 24 章， 論及數論領域的廣泛的內容。 哈代在積分變換、 積分方程、 三角級數理論等方面也有貢獻， 著有《單變量函數積分》(*The integration of functions of a single variable*， 1905)、 《無窮序數》(*Orders of infinity*， 1910)、 《狄利克雷級數的一般理論》(*The general theory of Dirichlet's series*， 1915， 與里斯合著)、 《傅里葉級數》[*Fourier series*， 1944， 與 W.W. 羅戈辛斯基 (Rogosinski) 合著]。

5. 對生物數學的貢獻

哈代在數學上的研究還使他有機會留名於生物數學的著作中。 1908 年， 他在美國《自然》(*Science*) 雜誌上發表文章 "混合種群中的孟德爾比率" (*Mendelian proportions in a mixed population*)， 建立了描述群體遺傳平衡的代數方程， 得出結果： 一個大的隨機交配的種群在沒有遷移、 選擇和突變的情況下， 基因頻率和基因型頻率在任何世代都是恆定的， 從而解決了關於顯性和隱性遺傳特性在大量混合群體中以何種比例遺傳的爭論。 這一結果在研究許多遺傳問題， 包括 Rh 血型的分佈和血友病時極爲重要， 是群體遺傳學的基礎。 同年， 德國醫師 S. 溫伯格 (Wenberg) 也獨立發現了相同的原理， 後被稱爲哈代－溫伯格定律。

6. 品格、愛好、數學觀點

作爲一位知名數學家，哈代的人品和他的學問同樣受到讚譽。他健談，談話可以吸引周圍很多人；他嚴於律己，參加該出席的各種會議，履行自己的職責；他富於正義感，痛恨戰爭，一生中不喜歡任何虛僞的東西。

哈代爲人謙和，經常強調其他合作者的重要性而對自己輕描淡寫，他曾說過正是得益於與李特爾伍德和拉馬努金的平等合作才達到了他不尋常的大器晚成。哈代具有出色的與他人合作的才能，E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh)、A.E. 英哈姆 (Ingham)、波利亞、E. 朗道 (Landau)、M. 里斯等二十世紀數學領域中的精英人物都曾是他的合作者。哈代引導許多年輕人邁入他們早期研究的大門，在他們面臨困難時給予幫助和鼓勵。N. 維納 (Wiener) 在他的自傳《我是一個數學家》(*I am a mathematician*，1956) 中多次表達了他對哈代的欽佩與感激之情。華羅庚在赴劍橋大學進修時亦得到過哈代的指導和幫助。1936 年，華羅庚被維納推薦給哈代，惜才的哈代對華羅庚極爲賞識。華羅庚在解析數論，尤其是圓法與三角和估計方面的研究成果是他在劍橋的學習和研究分不開的。

除熱衷數學研究之外，哈代的主要興趣在球類運動上，尤其對於板球，他是一個能夠掌握最新技術的球手和經驗豐富的評論家。

哈代曾說他之所以選擇數學作爲自己的事業主要是因爲數學是他能做得最好的一件事，而不是由於別的堂皇的理由。他的數學成就基於他對數學的無限熱愛和全身心投入。他說研究工作一直是他一生中歷久不衰的一大樂事，數學是他爲之耗盡了畢生精力的學科。

哈代在《一個數學家的自白》中表達了他對數學的看法。這本書在西方數學界有一定的影響，經常被引用，但其中的某些觀點也是有爭議的。對於數學是否有其自身的存在狀態，哈代

寫道：“我認爲數學實體是在我們之外而存在的，我們的作用就是去發現它、觀察它，那些被誇張地描繪成我們的‘創造物’的定理，不過是我們觀察的記錄而已。”對於數學美，哈代認爲：“數學的美可能很難定義，但它的確是一種眞實的美”，“最好的數學既是美的，同時又是嚴肅的”。哈代對數學的應用，特別是應用於戰爭很反感。他將純粹數學視爲眞正的數學而與應用數學劃清界線。他得出結論：“純粹數學就總體而論顯然比應用數學有用。一個純粹數學家似乎不僅在美學方面而且在實用方面都佔有優勢。因爲有用的東西主要是技巧，而數學技巧主要是通過純粹數學來傳播的。”“眞正的數學對戰爭毫無影響”，“是一門‘無害而淸白’的職業。”

哈代被公認爲他所處的時代的英國純粹數學的領導人，他的活力和熱情淸晰地印在所有認識他的人的記憶中，他的作品顯示出了他過硬的專業知識和對英語文體的精通。“我曾爲知識領域添磚加瓦，也曾幫別人添枝加葉；這些東西的價値，比起身後留下的某種紀念物的大數學家或任何其他大大小小的藝術家們創造的價値，只是程度上有所不同，性質上並無差異。”這就是哈代對自己一生的總結和評價。

文　　獻

原始文獻

[1] G.H. Hardy, *Hardy autobiographie*, Paris, Berlin, 1985。

[2] G.H. Hardy, *Collected papers of G.H. Hardy*, Oxford, 1906－1979

[3] G.H. Hardy, *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, 1940；reprinted, 1967, [中文摘譯：一個數學家的自白，數學譯林，3 (1984)，3－4]。

[4] G.H. Hardy, *A course of pure mathematics*, Cambridge, 1908；9th ed. 1944；10th ed., 1952。

[5] G.H. Hardy, *J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities*, Cambridge, 1934； 2nd ed., 1952 (中譯本： 不等式， 科學出版社， 1965)

[6] G.H. Hardy, *Divergent series*, Oxford, 1949。

[7] G.H. Hardy, *E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938； 5th ed., 1981。

[8] G.H. Hardy, *W.W. Rogosinski, Fourier series*, Cambridge, 1944 (中譯本： 富里埃級數， 上海科學技術出版社， 1978)。

[9] G.H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge, New York, 1940。

研究文獻

[10] E.T. Bell, *The development of mathematics*, New York, London, 1945。

[11] L. Young, *Mathematicians and their times*, New York, 1981, 275 − 294。

[12] R.C. Vaughan, *The Hardy–Littlewood method*, Cambridge, 1981

[13] E.C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta–function*, Oxford, 1951。

[14] P.L. Duren, *Theory of H^p spaces*, New York, San Francisco, London, 1970。

[15] 王元， 華羅庚， 見《世界著名科學家傳記 • 數學家 I》， 科學出版社， 1990。