萊 夫 謝 茨

萊夫謝茨，S. (Lefschetz，Solomon) 1884 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科；1972 年 10 月 5 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。數學。

萊夫謝茨之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Lefschetz.html

萊 夫 謝 茨

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

萊夫謝茨， S. (Lefschetz， Solomon) 1884 年 9 月 3 日生於俄國莫斯科； 1972 年 10 月 5 日卒於美國普林斯頓 (Princeton)。 數學。

萊夫謝茨出身於土耳其裔家庭， 父親是商人， 由於長期在波斯 (今伊朗) 經商， 決定把他的家庭安置在巴黎， 所以他的子女從小在巴黎長大。 萊夫謝茨的第一語言是法語， 到十幾歲時才學會俄語。 他也會波斯語等稀有語種。 後來更精通英語及西班牙語。 他的基礎教育都是在巴黎完成的。 1902 年進入巴黎中心學校學習， 1905 年畢業， 獲得 "工藝製造工程師" 學位。 不久之後他移居美國， 先在伯爾溫機車工廠 (Baldwin Locomotive Works) 工作， 後轉到匹茲堡的西屋電子工程公司 (Westinghouse Electric and Manufactnring Co.) 工作， 先任見習工程師， 後任工程師。 他在這家公司中工作很出色， 但是 1910 年的一次事故， 使他永遠地失去了雙手， 這使他很有前途的工程師生涯嘎然而止。 在醫院治療期間， 他認識到 "他的眞正道路不是工程而是數學"。 當然， 對於身殘的萊夫謝茨， 從頭攻讀數學也不是輕而易舉的事， 而在取得像他那種成就更需要超人的毅力克服一個又一個幾乎不可征服的困難。 一開始， 他先複習在巴黎中央學校聽過的數學課。 當時的兩位教授 − 教分析的 E. 皮卡 (Picard) 和教分析力學的 P. 阿佩爾 (Appell) 早已是法國科學院院士， 世界著名的數學大家。 於是， 他就攻讀他們的著作， 頭等重要的是皮卡三大卷的《分析教程》(*Traite d'Analyse*)。 1910 年 5 月， 他到麻薩諸塞州沃爾斯特的克拉克大學去讀研究生， 這是一所成立不久的大學， 有幾位國

外培養的數學家， 據他講“有一位一流的館員 L.N. 威爾遜 (Wilson) 博士， 以及管理完善的數學圖書館”。 他正是利用這個條件完成他的數學進修的。 1911 年 6 月， 他在 W.E. 斯托里 (Storey) 指導下獲得博士學位， 論文題目爲 “具有給定奇點的軌跡的存在性” (*On the existence of loci with given singularities*)， 後於 1913 年發表。

從 1911 年到 1924 年， 萊夫謝茨在中西部兩所大學中任教。 在完全孤立的情形下， 獨立進行數學研究。 他先在內布拉斯加大學擔任兩年講師， 而後轉到堪薩斯大學任教， 先後任講師 (1913 – 1916)、 助理教授 (1916 – 1919)、 副教授 (1919 – 1923) 及教授 (1923 – 1925)。 這 14 年中他克服生理上的殘疾， 充滿自信地鑽研代數幾何學， 做出劃時代的貢獻。

1912 年 6 月他獲得美國國籍， 次年， 他娶 A.B. 海斯 (Hayes) 小姐爲妻， 他是在殘廢後不久在克拉克大學結識她的， 那時他還帶著他那粗糙的假肢。 她是第一位在克拉克大學拿學位的女數學家， 1911 年 6 月， 她獲得碩士學位。 沒有她的幫助， 他幾乎難以克服工作、 生活和旅行的重重困難。

1924 年他出版了《位置分析與代數幾何》(*L'analysis situs et la géométrie algébrique*)， 收入著名的波萊爾 (Borel) 叢書。 這個工作和他以前的成就給他帶來國際聲譽， 他接到許多大學的訪問邀請。 1924 年他接受普林斯頓大學的邀請， 任一年的訪問教授， 年末他得到了大學的長期聘用， 任副教授， 1928 年升爲正教授。 1932 年他接替 O. 維布倫 (Veblen) 任范因 (Fine) 研究教授， 一直到 1953 年退休。

在普林斯頓大學工作的三十年不僅使他脫離開孤軍奮戰的境地， 也使普林斯頓大學發展成一個國際性的數學中心， 許多大數學家從這裡畢業， 或訪問過這裡， 這裡成爲代數拓樸學的搖籃。

他到普林斯頓大學之後， 他的研究方向逐步由代數幾何學轉向代數拓樸學。 雖然他在代數幾何學方面還有一些研究， 特別是代

數曲線的對應理論， 並且在大學中不時開出代數幾何學課程， 還同代數幾何學界保持密切接觸， 例如後來的代數幾何的領袖人物 O. 查瑞斯基 (Zariski) 在 1929 − 1937 年間不斷地往返於巴爾的摩 [他當時在約翰斯・霍普金斯 (Johns Hopkins) 大學任教] 與普林斯頓之間， 向萊夫謝茨求教並同他討論問題， 得到他的熱情鼓勵與幫助， 但是萊夫謝茨這時的主要研究方向， 已轉向代數拓樸學。 在普林斯頓， 兩位拓樸學前輩同他過從密切， 一是維布倫， 一是 J.W. 亞歷山大 (Alexander)。 他特別佩服亞歷山大， 在研究不動點理論及對偶定理方面兩人有過頻繁的討論。 不過亞歷山大後來脫離開數學界深居簡出， 使得萊夫謝茨深爲難過。 實際上， 從二十年代末到四十年代初， 萊夫謝茨是美國代數拓樸學的主要傳人， 許多後來的大家出自他的名下。 他的兩本著作《拓樸學》(*Topology*， 1930) 和《代數拓樸學》(*Algebraic topology*， 1942) 是英語拓樸學文獻中最主要的參考書， 特別是後者在相當長的一段時期內是代數拓樸學的標準著作， 並且是第一本以 “代數拓樸學” 命名的書。

1945 年， 他被任命爲普林斯頓大學數學系主任， 從此開始他的新的活動。 1945/1946 年度以及 1947 年他作爲交換教授到國立墨西哥大學工作， 其後他多次訪問這裡， 特別是從普林斯頓大學退休之後。 他的熱情以及他的組織能力使得墨西哥大學從無到有建立起一個數學學派。 爲了表彰他對墨西哥數學的貢獻， 墨西哥政府授予他阿茲台克 (Aztec) 雄鷹獎章。

第二次世界大戰期間， 他曾任美國海軍部的顧問， 這時， 他接觸到蘇聯在非線性振動以及穩定性方面的研究工作， 他馬上認識到這些工作的重大意義。 他知道 J.H. 龐加萊 (Poincaré) 和 A. M. 李雅普諾夫 (Ляпунов) 工作在微分方程幾何理論的重要性， 看出這門學科在美國 “太長時期受到忽視”。 他不顧一些同事的勸阻 (認爲聯邦政府的支持會危及學術研究的自由氣氛)， 毅然接受海軍研

究局的資助， 於 1946 年在普林斯頓大學組織一個微分方程研究項目， 它後來發展成爲美國研究常微分方程的領導中心， 他任這個項目的主任直到 1953 年退休。 其後五年間， 普林斯頓中心逐漸停止活動。 他多次試圖在另一所美國大學建立一個研究機構。 但沒有成功。 他退休後， 馬丁公司在巴爾的摩建立一個高等研究院 (Research Institute for Advanced Studies， RIAS)， 作爲工業對基礎研究的支持， 他被任命爲該院的顧問。 1957 年 11 月馬丁公司總裁及董事會全權委託他在高等研究院建立一個微分方程研究中心， 要求它成爲 “世界上這類中心的典範”， 在萊夫謝茨的領導下， 這個中心果然在微分方程及最優控制和穩定性的數學理論的研究方面獲得國際聲譽。 1964 年高等研究院的微分方程研究中心的主體部分搬遷到羅德島普羅威登斯的布朗 (Brown) 大學， 在其中應用數學部建立起萊夫謝茨動力系統中心。 布朗大學聘請他爲訪問教授。 從 1964 − 1970 年六年間， 他每週乘飛機往返於普林斯頓及普洛威登斯， 在布朗大學講課， 指導研究， 培養出許多後起之秀。

在這期間他以非凡的熱情和努力， 集結一批年輕數學家研究和開拓動力系統、 控制理論等新方向。 他還組織翻譯蘇聯的著作， 講課、 寫綜述及評論並組織會議。 雖然他的工作由於這些領域的飛速發展現在看來已經落後， 但正是他奠定了美國的研究基礎， 使美國從六十年代末在動力系統理論以及從六十年代初起在控制理論方面在世界居於領先地位。

由於他在數學創造以及教育、 組織方面的工作， 他在美國國內外享有崇高的榮譽。 早在 1925 年他就被選爲美國國家科學院院士， 1935 − 1936 年被選爲美國數學會主席。 1964 年被美國總統約翰遜授予國家科學獎章。 他被授予布拉格大學、 巴黎大學、 普林斯頓大學、 布朗大學和克拉克大學的名譽博士學位， 還被選爲法國巴黎科學院、 西班牙馬德里科學院、 義大利米蘭的倫巴底科

學院國外院士以及英國倫敦皇家學會國外會員和倫敦數學會榮譽會員， 這些都是一位科學家所能取得的最高國際榮譽。 為了表揚他的貢獻， 1954 年在普林斯頓大學召開慶祝萊夫謝茨七十歲壽辰代數幾何學和拓樸學國際會議， 1984 年在墨西哥召開紀念萊夫謝茨百年誕辰大會， 世界上百餘位數學家參加了大會。

萊夫謝茨的數學研究工作大致上可以分為有些許重疊的三個時期： (1) 代數幾何學， 1911 − 1929 年； (2) 代數拓樸學， 1923 − 1942 年； (3) 微分方程、 動力系統及控制論， 1943 − 1972 年。

1. 代數幾何學

代數幾何學主要研究一個或多個複數係數多項式的零點 − 代數簇的性質。 早期主要是作為複變函數論的一部分 − 代數函數論來研究的。

近代代數幾何學來源於 B. 黎曼 (Riemann) 的工作， 其後， 沿著多個不同的方向， 特別是分析 (也稱超越) 方向、 幾何方向以及算術 − 代數方向發展。 十九、 二十世紀之交， 兩個方向成為萊夫謝茨的代數幾何的思想來源： 一個是皮卡為主的分析方向； 另一個是 G. 卡斯特努沃 (Costelnuovo)、 F. 恩瑞克斯 (Enriques) 以及 F. 塞韋里 (Severi) 為首的義大利代數幾何學派所代表的幾何方向。 皮卡在 1883 − 1906 年主要研究代數曲面上的單積分與二重積分， 另外龐加萊也做出自己的貢獻， 他們把黎曼的研究由複代數曲線 $f(x,\ y) = 0$ 推廣到複代數曲面 $f(x,\ y,\ z) = 0$ 及至更高維代數簇上 (這裡的 f 均表示多項式)。 但是， 黎曼深刻發現與複代數曲線相聯繫的黎曼面及其基本的拓樸結構， 而他們的工作卻很少有相應的拓樸，因為當時的組合拓樸學還處於萌芽階段。 義大利幾何學家用的較不嚴格的直觀方法， 他們是用線性系及連續系 (今稱代數系) 的語言來表述的， 塞韋里證明代數曲面的曲線的參模具有一個基， 它由 ρ 個有效曲線 C_1、 C_2、 $\cdots$、 C_ρ 構成， 其它任

何曲線 C 都和它們代數相關， 即

$$\lambda C=\lambda_1 C_1+\cdots+\lambda_\rho C_\rho,$$

其中 λ_1 、 λ_2 、 $\cdots$ 、 λ_ρ 爲整數， $\lambda\neq 0$。 這裡的 ρ 後來稱爲皮卡數。

萊夫謝茨對代數幾何學一開始主要研究外在的幾何學， 1915 年以後， 轉向內在的幾何學， 用拓樸方法證明並推廣了以前的結果。 他的一系列著作的頂峰是 1921 年發表的論文 “論代數簇的某些數值不變量及其在阿貝爾簇上的應用，” (*On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to Abelian varieties*) 後來擴大成專著《 位置分析及代數幾何學 》。 由於其劃時代的重要性， 1921 年發表的論文榮獲巴黎科學院 1919 年度設立的波爾丁 (Bordin) 獎以及 1924 年度美國數學會博歇 (Bôcher) 獎。

他所解決的主要問題是決定 n 維非奇異代數簇 V^n 上的各種獨立的亞純 p 階微分形式的數目 (這些一般是雙有理不變量) 並得出這些數目與 V^n 的拓樸不變量， 特別是整數係數同調群的貝蒂 (Betti) 數的關係。 據他後來回憶， 當時的 n 維代數族是射影空間 S^{n+k} 中幾個複超曲面的不可約交截， 其中 V^n 沒有奇點， 因此 V^n 是緊的實 $2n$ 維流形。

古典的代數幾何學討論代數曲線的黎曼曲面上的阿貝爾積分， 其後， 黎曼研究阿貝爾微分， 並分成三類， 他證明複域上線性獨立的全純微分 (第一類阿貝爾微分) 的數目等於曲線的虧格 (拓樸不變量)。 萊夫謝茨把這種亞純微分形式推廣到 V^n 上的 p 階微分形式， 也分成三類， 第一類在 V^n 上處處全純， 第二類在 V^n 上有有限多極點， 第三類有對數型極點。 一個 p 階微分形式 ω^p 稱爲封閉的， 如 $d\omega^p=0$； ω^p 稱爲正合的， 如果 $\omega^p=d\omega'^{p-1}$， 這裡 ω'^{p-1} 是 $p-1$ 階微分形式。 兩個 $p-1$ 階微分形式稱爲等價， 如它們相差一個正合微分形式。 這樣， 所有相互等價的 p 階封閉的微分形式構成一個複向量空間 W， 問題是求 W 的維數。

對於代數曲面 V^2 上的微分形式，皮卡與龐加萊已證明第一類閉微分形式形成 q 維空間 W^q，$q=\dfrac{R_1}{2}$，其中 R_1 爲 V^2 的一維貝蒂數，q 是不正則數。而萊夫謝茨不僅直接從拓樸方法出發證明上述結果，還得出他在代數曲面上的主要結果 − 第二類封閉微分形式構成 ρ_0 維空間，且

$$\rho_0 = R_2 - \rho。$$

其中 R_2 是二維貝蒂數，ρ 爲獨立的代數 2 − 閉鏈的數目，即皮卡數。

萊夫謝茨不僅搞清楚代數曲面的雙有理不變量與拓樸不變量的關係，還把結果推廣到一般代數簇。他得出：對於 V^n 中超曲面，在 V^n 中代數等價與同調是等價關係。

對於一般代數族 V^n 的拓樸，他得出一般結果：對於代數簇 V^n，所有奇維貝蒂數均爲偶數，且對於 $2 \le p \le n$，有 $R_p \ge R_{\rho-2}$。

由此，他推出許多經典的結果。例如，不是所有緊、可定向四維流形都是代數曲面。另外他還完整地證明了 M. 諾特 (Noether) 定理：三維複射影空間中 $d \ge 4$ 次一般型代數曲面上每條代數曲線均爲該曲面與另一曲面的完全交截。

萊夫謝茨對阿貝爾簇有許多研究，特別是提出決定黎曼矩陣的所有複數乘法的方案，這後來爲 A.A. 阿爾貝特 (Albert) 用代數方法完全解決。但萊夫謝茨的一些結果很重要，如在一個阿貝爾簇上，一閉鏈可用代數曲線表示當且僅當第一類二重積分在其上具有零週期，這導致他對於皮卡的消沒閉鏈 (vanishing cycle) 的推廣，設 V 是 n 維非奇異連通代數簇，W 爲 V 由一般超平面 H 構成的截面，則有下列兩定理成立：(1) 弱萊夫謝茨定理：對於 $0 \le i \le n-2$，自然同態 $H^{2n-i}(V,\ C) \to H^{2n-i-2}(W,\ C)$ 是同構，且對於 $0 \le i \le n-1$，$H_i(V,\ W,\ C) = 0$。(2) 強

萊夫謝茨定理：設 ξ 是對應超平面截面 W 的 $H^2(V,\ Q)$ 的上同調類，L 是由 ξ 的上積所定義的同態，則對於 $i \le n$，L^{n-i} : $H^i(V,\ C) \to H^{2n-i}(V,\ C)$ 是同構。萊夫謝茨的證明是不完全的，完全的證明後來由 W.V.D. 霍奇 (Hodge) 給出，把係數由通常上同調推廣到 l－adic 上同調對於韋伊 (Weil) 猜想的證明是至關重要的。

最後，他對於代數簇的對應理論有重大發展，他不僅證明 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 代數曲線的對應的基本定理，而且推廣到高維。這個方向，引導他到一般的交截理論，開闢了他在代數拓樸學的研究方向。

2. 代數拓樸學

萊夫謝茨是通過代數簇的對應理論經由不動點理論進入純代數拓樸學的。他的研究，除來自義大利幾何學家對代數對應的研究之外，還有拓樸學家的工作。不動點定理首先是荷蘭數學家 L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 提出的，他研究 n 維胞腔或 n 維球面到自身映射的不動點，另外，美國拓樸學家亞歷山大研究過二維流形的拓樸映射，他的工作就是對這些結果進行大規模的漂亮的推廣，推廣的重要一步是把代數的交截理論轉換成拓樸的交截理論。一開始他在定向封閉流形上考慮，1923 年他已經得到可定向封閉流形上連續自映射的不動點定理，設 f 爲定向封閉流形 X 到自身連續映射，對每一維 n，f 誘導 X 的有理係數 R 的同調群 $H_n(x)$ 的自同態 f_n，由於這時 $H_n(x)$ 是 R 上向量空間，如果 f_n 的秩有限，可以算出 f_n 的矩陣表示的跡 $T_r(f_n)$。定義 f 萊夫謝茨數 $L(f)$ 爲

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T_r(f_n)\ ,$$

萊夫謝茨證明，$L(f)$ 是整數，且如 $L(f) \neq 0$，則 f 至少有一個

不動點。

其後萊夫謝茨對他的不動點定理進行一系列推廣，先是推廣到有邊界流形 (1926)，在 H. 霍普夫 (Hopf) 推廣到 n 維複形的特殊情形 (1928) 之後，萊夫謝茨又在 1930 年推廣到具有有限貝蒂數的有限維緊度量空間，在 1933 年對有限維複形給出簡單而漂亮的證明，最後他推廣到所謂廣義流形及局部連通空間。

以不動點定理爲中心，萊夫謝茨把代數拓樸學推進到一個新階段。對於交截、乘積和上同調，對於對偶定理、相對同調和奇異同調以及局部連通集都做出系統的發展。

原始的萊夫謝茨不動點定理不能包括布勞威爾不動點定理。爲了把不動點定理推廣到有邊界流形 (相對流形)，他引入了相對同調群，並把龐加萊對偶定理推廣到相對情形，得出萊夫謝茨對偶定理。這不僅是一種推廣，而且把以前兩個互不相關的龐加萊對偶定理和亞歷山大對偶定理統一在一起。

爲了進一步推廣到複合形，他在 1930 年引進僞閉鏈 (pseudocycle)，這是上閉鏈的一種形式，還得出僞同調群。這實際上是原始的上同調群。但他沒有進一步考慮環結構及其拓樸不變性，在 1935 – 1939 年，上同調環的概念成熟之後，他在《代數拓樸學》一書中把他的交截理論翻譯成上同調的語言。

萊夫謝茨在 1925 – 1935 年完成的從組合位置分析到代數拓樸學過渡的另一項工作是與其他人一起把數值的拓樸不變量擴展爲同調群，以及引進整係數，模 p 係數，有理係數的同調群，特別是在《拓樸學》(1930) 中首先正式定義奇異同調群的概念，它具有許多優越性。

不動點定理在數學中佔有重要地位，它在無窮維空間被推廣成爲分析的重要工具，M.F. 阿蒂亞 (Atiyah) 及 R. 鮑特 (Bott) 把萊夫謝茨不動點定理推廣到橢圓複形。江澤涵和姜伯駒等對不動點理論亦有重大發展。

3. 微分方程與控制理論

萊夫謝茨的主要貢獻是運用代數幾何學及拓樸學思想於微分方程及控制理論方面。他研究在弧立奇點附近解析微分方程解的行爲，運用代數曲線論對於在弧立臨界點附近二維方程組的所有通過該臨界點的解曲線，給出完全的刻畫以及具體的構造步驟，從而大大改進了經典的 I. 本迪克遜 (Bendixson) 的工作。對於二維解析方程組弧立奇點的線性變分方程的係數矩陣，如果兩特徵根爲 0 但不恆等於 0，他證明最多只有一個卵形軌道套；對於 n 維方程組，當弧立平衡點的線性變分方程組中係數矩陣的特徵根有 n 個爲 0 時，討論了穩定性問題；對於二階及高階非線性微分方程組，討論了週期解的存在性。他的重要專著《微分方程幾何理論》(*Differential equations*： *Geometric theory*)，是這方面的系統總結。

對於控制理論，他特別注意用李雅普諾夫理論來發展非線性控制理論。他研究過 A.I. 魯里耶 (Lurie) 提出的工程問題，對動力系統

$$\dot{X} = Ax - b\xi$$

具有間接或微分控制

$$\dot{\xi} = \varphi(CX - \rho\xi)\text{，}$$

求它絕對穩定的條件。萊夫謝茨於 1964 年給出了明顯的穩定性判據，當

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\text{，}\lambda_n < 0$$

時，萊夫謝茨判據可寫爲

$$\rho > \sum_{h=1}^{n} \left| \frac{b_h C_h}{\lambda_h} \right| 。$$

文　　獻

原始文獻

[1] S. Lefschetz, *Selected papers*, Chelsea, New York, 1971。

[2] S. Lefschetz, *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier–Villars, Paris, 1924 (重印於 [1] 中)。

[3] S. Lefschetz, *Topology*, New York, Amer. Math. Soc., 1930。

[4] S. Lefschetz, *Algebraic topology*, New York, Amer. Math. Soc., 1942。

[5] S. Lefschetz, *Topics in topology*, Princeton University Press, 1942

[6] S. Lefschetz, *Lectures on differential equations*, Princeton University Press, 1946。

[7] S. Lefschetz, *Introduction to topology*, Princeton University Press, 1949。

[8] S. Lefschetz, *Algebraic geometry*, Princeton University Press, 1953。

[9] S. Lefschetz, *Differential equations*；*Geometric theory*, New York, Interscience, 1957。

[10] S. Lefschetz, J. P. Lasalle, *Stability by Liapunov's direct method*, New York, Academic Press, 1961。

[11] S. Lefschetz, *Stability theory of nonlinear control systems*, New York, Academic Press, 1964。

研究文獻

[12] R.H. Fox etc ed, *Algebraic geometry and topology*, Princeton University Press, 1957。

[13] L. Markus, *Solomon Lefschetz, An appreciation in memoriam*, Bull, Amer. Math. Soc., 79(1973), 663－680。

[14] W. Hodge, *Solomon Lefschetz*, Bull, London Math. Soc., 6(1974) 198－217。