# 外　爾

外爾，H. (Weyl，Hermann) 1885 年 11 月 9 日生於德國的埃爾姆斯霍恩 (Elmshorn)；1955 年 12 月 9 日卒於瑞士蘇黎世 (Zürich)。數學、數學物理。

外爾之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Weyl.html`

# 外 爾

張 奠 宙

(華東師範大學)

外爾， H. (Weyl， Hermann) 1885 年 11 月 9 日生於德國的埃爾姆斯霍恩 (Elmshorn)； 1955 年 12 月 9 日卒於瑞士蘇黎世 (Zürich)。 數學、 數學物理。

外爾出生在鄰近漢堡的一個小鎮上， 父親路德 (Ludwig) 是銀行家， 母親安娜 (Anna) 在家裡照料孩子。 外爾在鄉鎮上度過了少年時代， 並在阿爾托納的一所文法中學讀書。 雖說鄉下的孩子往往比較閉塞， 見識不廣， 但外爾在中學時已讀過 I. 康德 (Kant) 的《純粹理性批判》(*Critique of Pure Reason*， 1781)。 他回憶說：“這書立即打動了我的心。”

1904 年， 外爾從這所中學畢業。 當時的校長是德國大數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert) 的表兄弟， 遂將外爾介紹到希爾伯特所在的格丁根大學攻讀數學。 從此， 外爾踏上了數學之路， 並成爲日後希爾伯特的繼承人。

在格丁根的第一年， 外爾讀了許多課程， 其中包括希爾伯特的課 “化圓爲方與數的理論”。 新世界的門向他打開了。 1905 年夏天， 外爾帶著希爾伯特的輝煌作品 “數論報告” (*Der Zahlbericht*) 回家去。 他回憶說：“整個暑假我在沒有初等數論和 E. 伽羅瓦 (Galois) 理論這些預備知識的情況下， 自己盡力搞懂它。 這幾個月是我一生中最快樂的幾個月， 經歷了我們共同分擔的疑慮和失敗的許多歲月之後， 它的光輝仍撫慰著我的心靈。” 外爾曾這樣描述希爾伯特對青年人的影響：“他所吹奏的甜蜜的蘆笛聲， 誘惑了許多老鼠追隨他跳入數學的深河”。 外爾自己就是這些 “老鼠” 中的一個。

在格丁根讀了一年書之後， 外爾按慣例要到另一所大學求學一年。 他到了慕尼黑大學。 1906 年重返格丁根。 1907 年， 外爾投入積分方程的研究。 一年之後， 以 “奇異積分方程” (*Equtions intégrales singwlières*) 的論文獲得博士學位。 他在格丁根一直呆到 1913 年。 1910 年起任無薪講師 (privatdozent)， 在講授函數論等課程的同時， 他開拓了新領域 “黎曼面”。

1913 年， 外爾和 J. 海倫 (Joseph Helen) 結婚。 海倫是格丁根大學哲學系的著名才女。 他們有兩個兒子， 其中 J. 外爾也是數學家。 父子曾合著《亞純函數解析曲線》(*Meromorphic functions and analytic curves*， 1943)。

就在結婚的同一年， 外爾受聘爲位於蘇黎世城的瑞士聯邦工學院的教授。 這時， 大物理學家 A. 愛因斯坦 (Einstein) 也在那裡執教， 他們經常交談。 愛因斯坦的物理學新思想給外爾留下了深刻的印象。

1915 年， 正值第一次世界大戰， 外爾服了一年兵役。 1916 年重返蘇黎世。 此後的十餘年， 是外爾數學創造的全盛時期。 外爾在蘇黎世的生活是幸福的； 他曾說， 那時打擾他平靜生活的最糟糕的事是外國大學請他去執教的一連串邀請。 但是在內心深處， 外爾仍然嚮往格丁根大學， 希望回到希爾伯特身邊， 因爲他的 “根” 在那裡， 他要到那裡攝取營養， 獲得新的動力。 1923 年， 格丁根大學邀他回去接替退休的 F. 克萊因 (Klein)。 當時德國政治形勢動盪， 經濟一團糟。外爾躊躇再三， 拿著 “接受邀請” 的電文到電報局， 可到了拍發時， 又改變了主意， 辭謝了邀請。 1930 年夏天， 格丁根大學又邀他回去接替希爾伯特。 儘管這時德國政治、 經濟形勢仍然不好， 但外爾終於接受了邀請。 他寫信給老師：“應召作爲你的繼任， 我內心的欣喜和自豪是無法用言詞來形容的”。

但是外爾在格丁根沒有呆很長時間。 三十年代的德國， 法西

斯的濁流在到處蠢動， 排猶的風潮越演越烈。 外爾本人雖不是猶太人， 可是他的妻子海倫是半個猶太人。1933 年 1 月， 希特勒上台， 局勢極度動盪， 大批猶太科學家離開德國。 作爲格丁根大學數學研究所的領導人， 整個春天和夏天， 外爾寫信， 去會見政府官員， 但什麼也改變不了。 夏日將盡， 人亦如雲散。 外爾去瑞士度假， 仍想回德國， 希望通過自己的努力來保住格丁根的數學傳統。 可是美國的朋友極力勸他趕快離開德國：“再不走就太晚了!” 美國普林斯頓高級研究院爲他提供了一個職位。 早在那裡的愛因斯坦說服了外爾。 從此， 他和海倫在大西洋彼岸度過了後半生。

到普林斯頓時， 外爾已經四十八歲， 數學家的創造黃金時期已經過去， 於是他從 “首席小提琴手” 轉到 “指揮” 的位置上。 他像磁石一樣吸引大批數學家來到普林斯頓， 用他淵博的知識、 深邃的才智給年輕人指引前進的方向。 普林斯頓取代格丁根成爲世界數學中心， 外爾的作用顯然是舉足輕重的。 無數的年輕人懷念外爾對他們的幫助， 用最美好的語言頌揚他的爲人， 其中有一個是中國學者陳省身。 1985 年， 陳省身回憶他和外爾的交往時寫道：

“我 1943 年秋由昆明去美國普林斯頓， 初次見到外爾。 他當然知道我的名字和我的一些工作。 我對他是十分崇拜的。 ······ 外爾很看重我的工作， 他看了我關於高斯 (Gauss) – 博內 (Bonnet) 公式的初稿， 曾向我道喜。 我們有很多的來往， 有多次的長談， 開拓了對數學的看法。 歷史上是否會再有像外爾這樣廣博精深的數學家， 將是一個有趣的問題。”

外爾在美國也繼續做一些研究工作。 他寫的《典型群， 其不變式及其表示》(*The classical group， their invariants and representations*， 1939) 以及《代數數論》(*Algebraic theory of numebers*， 1940) 使希爾伯特的不變式理論和數論報告在美國生根開花。 他的 “半個世紀的數學” (*A half-century of mathematics*， 1951) 更成

爲二十世紀上半葉數學的最好總結。他還在凸多面體的剛性和變形 (1935)、$n$ 維旋量黎曼矩陣、平均運動 (1938 – 1939)、亞純曲線 (1938)、邊界層問題 (1942) 等方面作出貢獻。

外爾的妻子於 1948 年逝世。1950 年，他又和 B. 愛倫 (Ellen) 結婚。外爾在 1951 年退休，但他在普林斯頓的職位仍然保留著。以後他在普林斯頓和蘇黎世兩地居住。1954 年，外爾在第十二屆國際數學家大會上講話，介紹費爾茲獎獲得者小平邦彥 (Kodaira Kunihiko) 和 J.P. 塞爾 (Serre) 的工作。第二年，七十壽辰的祝壽活動之後不到一個月，外爾在郵局寄信時突然心臟病發作，於 1955 年 12 月 9 日與世長辭。

外爾的著作生前出版過選集。1968 年，施普林格 (Springer) 出版社發行外爾的《論文全集》(*Gesammelte abhandlungen*)，包括 166 篇文章，但不包括他的十幾本書。

外爾一生的科學工作，可以被分爲四個時期：格丁根時期 (1904 – 1913)；蘇黎世時期 (1913 – 1930)；第二格丁根時期 (1930 – 1933)；普林斯頓時期 (1933 – 1955)。他的數學工作幾乎遍及整個數學，其中包括奇異積分方程、微分方程、數學物理方法、希爾伯特空間、吉布斯 (Gibbs) 現象、狄利克雷原理、模 1 等分佈、概週期函數、亞純曲線變分學等分析課題，凸體的表面的剛性、拓樸學、微分幾何中的聯絡、黎曼面等幾何課題，李群的不變量、李群的表示、代數理論、邏輯等代數課題，以及相對論、量子論、哲學、科學史等課題。他的許多工作成爲二十世紀一系列重要數學成就的出發點。外爾的研究足跡緊緊追隨著整個科學的進展，從廣義相對論到量子力學，一直在科學的前沿上弄潮。許多人認爲，時至今日，通曉整個數學的數學家似乎已經沒有了。外爾也許是能做到這一點的最後一人。

外爾在格丁根時期的初期研究工作，可以說完全在希爾伯特的影響下進行。他在格丁根的博士論文題目正是希爾伯特當時鍾愛的

研究課題：積分方程。

1910 年，外爾在爲獲得無薪講師職位發表就職演講時，作出了他在數學上第一個重要工作：二階線性微分方程的奇異邊界條件。衆所周知，經典的斯圖姆 (Sturm) - 劉維爾 (Liouville) 問題是求解自共軛微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)-(q(x)-\lambda)y(x)=0\text{，}\tag{1}$$

其中 $0\leq x\leq l$、$p(x)>0$、$q(x)$ 爲實值函數，解 $y(x)$ 必須滿足下列邊界條件：

$$y'(0)-wy(0)=0\text{，}\tag{2}$$

$$y'(l)-hy(l)=0\text{，}\tag{3}$$

這裡 $w$、$h$ 都是實數。這時，人們知道：當 $\lambda$ 取一列非負實數 $\lambda_n$ ($\lambda_n\to\infty$) 時，方程 (1) 存在非平凡解。這一數列稱爲方程的譜，每個 $\lambda_n$ 稱爲方程的特徵值 (本徵值)，相應的解 $y_n(x)$ 稱爲特徵函數 (本徵函數)。這時 $y_n(x)$ 好像 $\sin nx$、$\cos nx$ 一樣可以作爲正交基，使每個函數可以按 $y_n(x)$ 展爲級數，正像函數關於 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 展爲三角級數一樣。

外爾研究 $l=+\infty$ 的奇異情形。他的想法是令 $\lambda$ 取複數值。於是對給定的 $h$，會存在複數 $w(\lambda,h)$ 滿足邊界條件 (2)、(3)。當 $h$ 取遍一切實數值時，點 $w(\lambda,h)$ 在某圓 $C_l(\lambda)$ 上。此時，外爾看到，當 $l\to+\infty$ 時，$C_l(\lambda)$ ($\lambda$ 固定) 形成一族圓，其極限或者是圓或者是一點。這兩種情形的出現與 $\lambda$ 的選擇無關。如果有"極限圓"，那麼 (1) 的解都在 $[0,+\infty)$ 上平方可積，而在"極限點"情形，只有一個解 (差一常數因子) 是平方可積的。

在後來由馮 • 諾伊曼 (von Nenmann) 創立的無界對稱算子理論中，一個微分算子可以作自伴擴張的充要條件是兩個虧指數 $n_+$ 和 $n_-$ 相等。外爾在這裡提供了斯圖姆 - 劉維爾算子 $P(x,D)$ (對

稱算子) 進行自共軛擴張的第一個例子。 在 $a < x < b$ 情形， 如果 $a$ 、 $b$ 分別趨於 0 和 $\infty$ 都是極限點型， 則 $n_+ = n_- = 0$。 算子 $P(x, D)$ 已經是自伴的。 如果 0 和 $\infty$ 分別是極限圓型和極限點型， 則 $n_+ = n_- = 1$， 其自伴擴張用一個邊界條件得出。 若二者都是極限圓型， 則 $n_+ = n_- = 2$， 算子 $P(x, D)$ 可用兩個邊界條件決定其自伴擴張。 本世紀偏微分算子理論的長足進展， 外爾的這一結果可說是其先驅。

外爾並沒有停留在自伴擴張問題上。 他將關於與離散譜 $\lambda_n$ 相應的特徵函數 $y_n(x)$ 的級數展開， 推廣到連續譜 $\lambda$ 的特徵函數 $y_\lambda(x)$ 的積分展開， 從而爲卡萊曼 (T. Carleman) 積分算子理論開闢了道路。 更引人注目的是外爾對大物理學家 H.A. 洛倫茲 (Lorentz) 1910 年所提問題的回答。 1910 年， 洛倫茲在格丁根講演時提到， 能否由聽鼓聲推知鼓的形狀? 這等於由一個橢圓方程 $\Delta u + \lambda u = 0$ 的本徵值 $\lambda_n$ (即鼓膜振動的自然頻率) 未確定鼓膜的形狀。 外爾研究了更一般的問題， 提出了在希爾伯特空間 $H$ 上的緊自伴算子特徵值的直接計算方法 (即不必先求出 $\lambda_1$ 、 $\cdots$ 、 $\lambda_{n-1}$ 再來計算 $(\lambda_n)$， 後人稱之爲 “極大極小方法”， 這套本徵展開理論， 爲洛倫茲問題的解決提供了鑰匙。 人們要求知道當 $\lambda$ 很大時， 小於 $\lambda$ 的特徵值的個數 $N(\lambda)$， 其中

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi v}{v}}\ ,$$

$\nu$ 是本徵頻率， $v$ 是波在鼓膜中的傳播速度。 外爾證明了

$$N(\lambda) \to \frac{A}{4\pi}\lambda \quad (\text{當 } \lambda \to +\infty \text{ 時}),$$

這裡 $A$ 是鼓膜的面積。 這恰好證實了洛倫茲的猜想： 頻率在 $\nu$ 和 $d\nu$ 之間的充分高的諧波數目與邊界的形態無關， 僅和它圍成的面積成正比。

這項工作相當漂亮。 1954 年 5 月， 外爾在洛桑作演講。 當他

回憶這段往事時， 寫了如下的話：

“這個問題的結論雖然在前些時候已被物理學家猜想到。 然而對大多數數學家來說， 這一結果似乎是在很遙遠的將來才能作出證明的。 當我狂熱般地作出證明時， 我的煤油燈已開始冒煙。 我剛完成其證明， 厚厚的煤煙灰就像雨一樣從天花板上落在到我的紙上、 手上和臉上。”

這套 “聽音辨鼓” 的理論近幾年又出現新的高潮， 現在有了更精確的估計， 甚至可以決定表示鼓上孔的數目的拓樸參數。 將平面鼓膜推廣到高維的流形上去， 仍是成爲許多人追逐的課題。

外爾在追隨希爾伯特研究積分方程和微分方程之後， 從 1911 到 1912 年開闢了自己的新研究方向： 黎曼面。 這時， 外爾在格丁根大學講授函數論課程。 複值多值函數依靠黎曼面實行單值化。 如 $w=\sqrt{Z}$ 使一個 $Z$ 對應兩個 $w$。 黎曼將兩個 $Z$ 平面適當連接構成兩葉的面 $R$， 就使 $\sqrt{Z}$ 成爲 $R$ 到複平面上的單值函數了。 但是黎曼面的構造一直依靠直觀想像， 並用自然語言加以描述。 外爾一面授課， 一面構思嚴格的黎曼面理論。 年僅二十六歲的外爾爆出了天才的火花。 他將黎曼面 $R$ 看成 $R$ 中各點的鄰域 $U$ 所覆蓋， 而每一鄰域 $U$ 又附以從 $U$ 到複平面的映射 $\psi_U$。 外爾把所有由 $(U,\psi_U)$ 構成的全體記作 $\mathcal{U}$。 如果 $\mathcal{U}$ 滿足 (1) $\mathcal{U}$ 中所有 $U$ 的聯集即是 $R$， (2) 當 $V=U_1\cap U_2$ 非空時， $\psi_{U_1}(V)$ 和 $\psi_{U_2}(V)$ 都是複平面上集合， $\psi_{U_1}\circ\psi_{U_2}^{-1}$ 是複平面區域 $\psi_{U_2}(V)$ 到複平面區域 $\psi_{U_1}(V)$ 的複變函數。 我們假定 $\psi_{U_1}\circ\psi_{U_2}^{-1}$ 在各連通分支內都是保形映射。 這樣， 外爾就將 $(R,\mathcal{U})$ 看作黎曼面。 在二十世紀數學史上， 外爾的這一想法是劃時代的 (上面的敍述已採用現在常用的形式)。 首先， 他採用了鄰域思想， 無疑爲點集拓樸學的出現催生。 其次， 黎曼面用現在的眼光來看乃是複一維流形。 在二十世紀大放異采的複流形理論即導源於此。 第三， 外爾指出， 黎曼面的深入研究，“不只是使解析函數的多值性直觀化的手段， 而

且是這個理論的本質部分，是解析函數能在其上生長和繁榮的唯一土壤”。它開創了現代函數論。第四，黎曼面的虧格、分類等導向同調和同倫論，爲代數拓樸的誕生指引了方向。外爾這一工作，幾乎影響了二十世紀的整個純粹數學。1913 年《黎曼面的觀念》(*Die Idee der Riemannschen Fläche*) 出版。從中人們可以看到希爾伯特的鄰域公理化方法，L.E.J. 布勞威爾 (Brouwer) 使用的單純形方法，H. 龐加萊 (Poincaré) 的基本群觀念以及曲面的指向等嚴格理論。

外爾結束了格丁根大學的函數論教學工作。

外爾在蘇黎世時期 (1913 − 1930) 的工作是極其輝煌的。他在 1914 年完成了關於模 1 等分佈的研究，人們將它看作解析數論的新篇章。這一工作的發表因第一次大戰而推遲到 1916 年。

所謂實數列 $\{x_n\}$ 以模 1 等分佈，是指 $x_n$ 的小數部分 $y_n$ 均勻地分佈在 $[0,1]$ 區間內，即對任何 $[0,1]$ 的子間區 $[\alpha,\beta]$，恆有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\nu(\alpha,\beta,n)}{n}=\beta-\alpha$，這裡的 $\nu(\alpha,\beta,n)$ 是指前 $n$ 個實數 $x_1$、$\cdots$、$x_n$ 的小數部分 $y_1$、$\cdots$、$y_n$ 落在 $[\alpha,\beta]$ 中的個數。$\{x_n\}$ 模 1 等分佈也可用積分描述爲：對任何在 $[0,1]$ 上有界的黎曼可積函數 $f(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=\int_0^1 f(t)dt，$$

這就使我們能用分析工具來研究數論問題。但是使外爾最值得驕傲的是下列基本定理：

$\{x_n\}$ 模 1 等分佈的充要條件是：對任何非零整數 $h$，當 $N\to\infty$ 時

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\exp(2\pi ikx_n)\to 0。$$

由此可以推出，若 $p(x)$ 是首係數爲無理數的多項式，則 $p(n)$ 是

等分佈的。 若 $\theta$ 是無理數， 則實數列 $\{n\theta\}$ 是等分佈的 (這結果早些時候爲 P. 博爾 (Bohl) 等數學家用純算術方法得到過)。 這一基本定理的證明藉助於對多項式指數和的一項估計， 現稱爲外爾不等式。 多項式指數和與調和分析緊密相連， 而外爾在研究微分算子譜論時成天與調和分析打交道， 因而他從分析學轉向數論研究乃是順理成章的。 多項式指數和問題與 E. 華林 (Waring) 問題 (任何正整數 $k$， 總存在 $g(k)$， 使 $k$ 可表示爲 $S(\geq g(k))$ 個 $k$ 次冪之和) 及 $\zeta$ 函數的黎曼猜想 ($\zeta$ 函數的非顯然零點全部都在直線 $\mathrm{Res}=\dfrac{1}{2}$ 上) 等密切相關。 這一工作後來爲蘇聯的 И. M. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 所改進， 用於堆壘質數論。 我國的華羅庚及其學生們在這一方向上有突出的貢獻。

1916 年， 當外爾從兵營回到工學院講台時， 愛因斯坦的廣義相對論問世不久， 一場物理學研究的浪潮席捲全球。 外爾毫不猶豫地投身其中。 1916 到 1917 年， 他在蘇黎世的聯邦工學院講授相對論課程時， 力圖把哲學思想、 數學方法以及物理學理論結合起來， 用自己的思想清晰而嚴格地闡述廣義相對論。 講稿在 1918 年以《空間、時間、物質》(*Raum*、 *Zeit*、 *Malerie*) 的書名正式出版， 五年之內再版五次， 成爲年輕人的心愛之物。 大物理學 W.K. 海森伯 (Heisenberg) 等都從此書中得到教益。

1917 - 1919 這幾年， 外爾在幾何學與物理學上作出了巨大貢獻。 他受到愛因斯坦在廣義相對論中研究引力場的鼓舞， 企圖提出一種既包括引力又包括電磁力的幾何理論， 即通過發展幾何學來完成 “統一場論” 的構想。 雖然 “統一場論” 經過努力 (包括愛因斯坦本人的努力) 至今仍未建立起來， 但是外爾一系列的研究成果卻深刻地影響著當代物理學的進展。

外爾首先對作爲相對論數學框架的黎曼幾何加以改造和擴

展。 黎曼幾何依賴於一種度量， 它是微分二次型：

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} ds_i d_{s_j} \text{。}$$

曲率就依這一度量而確定。 愛因斯坦的引力理論依賴於二次型， 而電磁理論只依賴於一次型。 外爾根據前人結果已看到曲率可以通過向量的平行移動而得到。 在特殊情形下， 這是容易理解的： $a$、 $b$ 是直線 $l$ 上兩點， $a$ 處向量 $P_a$ 沿 $l$ 平行移動到 $b$ 處爲 $P_b$， 此時 $P_a$ 與 $l$ 的夾角等於 $P_b$ 與 $l$ 的夾角， $P_a$ 沿 $l$ 且保持與 $l$ 夾角不變的移動稱爲平行移動。 $P_a$ 沿 $l$ 平行移動到 $b$ 再平行移動回到 $a$， 夾角一直不動， 夾角變化量爲 0， 所以直線的曲率也是零。 在半徑爲 $r$ 的球面上一點 $a$ 處有一向量 $P_a$ 與過 $a$ 的大圓 $l$ 夾角爲 $\theta$， 當 $P_a$ 沿大圓 (測地線) 作保持夾角不變的移動 (平行移動) 轉一圈回到 $a$ 時， 向量 $P_a$ 實際上轉了一圈， 增加了 $2\pi$ 的幅角， 這個數字便成爲確定大圓曲率的依據： $\dfrac{2\pi}{2\pi r} = \dfrac{1}{r}$。

在黎曼幾何中， 曲線 $x^i = x^i(t)$， $i = 1$、 $2$、 $\cdots$ 、 $n$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ 的長度 $S$ 由積分表出：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{j,i} g_{ij}(x(t)) \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^i}{dt}} dt \text{，}$$

這裡 $g_{ij}$ 是度量張量的共變分量。 使這積分取得極值的曲線， 即測地線滿足方程

$$\frac{d^2 x^h}{dS^2} + \sum_{ij} \left\{ \begin{matrix} h \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{dS} \frac{dx^i}{dS} = 0 \text{，}$$

這裡的 $\left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}$ 稱爲 E.B. 克里斯托弗 (Christoffel) 符號。

一個向量場 $v^h(t)$， 如滿足

$$\frac{dv^h}{dt}+\sum_{ji}\left\{\begin{matrix} h \\ ji \end{matrix}\right\}\frac{dx^j}{dt}v^i=0，$$

則定義爲 $v^h(t)$ 與曲線 $x^h=x^h(t)$ 平行。 由此可以看出： 測地線的切線 $\frac{dx^h}{dS}$ 沿測地線前進時總是平行地移動著。

外爾注意到上面的平行定義與度量張量 $g_{ij}$ 沒有直接關係， 只與克里斯托弗符號 $\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}$ 有關。 於是， 只要用一組函數 $\Gamma^h_{ij}$ 來代替 $\left\{\begin{matrix} h \\ ij \end{matrix}\right\}$ 就行了， 即沿曲線 $x^h(t)$ 走的向量場 $v^h(t)$ 滿足

$$\frac{dv^h}{dt}+\sum_{j,i}\Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}v^i=0$$

時稱 $v^h(t)$ 與 $x^h(t)$ 平行。

這樣一來， 黎曼幾何就從度量束縛中解脫出來， 而由一組函數 $\Gamma^h_{ij}$ 來決定向量的平行。 換句話說， 在 $n$ 維流形上引進一個無窮小的仿射結構， 也就是選取 $n^3$ 個函數 $\Gamma^i_{jk}$， 在給定坐標系之下， 在 $(x^i)$ 點處的向量 $(\xi^i)$ 與鄰近的點 $(x^i+dx^i)$ 的平行向量 $(\xi^i+d\xi^i)$ 之間的關係爲：

$$d\xi^i=-\sum\Gamma^i_{ij}\xi^r\xi^s 。$$

這樣一來， 沿測地線的曲率就可以用這種仿射結構所確定， $\Gamma^i_{ik}$ 稱爲仿射聯絡。 這種空間稱爲仿射聯絡空間， 黎曼空間只是其中的一個特例。 外爾的這一思想無疑是稍後的 E. 嘉當 (Cartan) 的一般聯絡理論的源頭。 聯絡概念已構成現代微分幾何的基礎， 其意義之重大正如分析學中的微分概念。

1918 年， 外爾發表了著名的論述統一場論的論文。 他寫道：
“如果黎曼幾何要與自然相一致， 那麼它的發展所必須基於的基本

概念應是向量的無窮小平行移動 ⋯ 。 但是一個眞正的無窮小幾何必須只承認長度從一點到它無限靠近的另一點作轉移的這一原則。 這就禁止我們去假定在一段有限距離內長度從一點轉移到另一點的問題是可積的。 ⋯ 一種幾何產生了。” 這樣， 外爾的不可積標量因子的想法就產生了。 電磁學在概念上可納入一個不可積量因子的幾何想法之中： 電磁場依賴於一次型 $d\phi = \sum \phi_\mu dx^\mu$， 不可標度因子是 $\exp\left(\int_\rho^Q d\phi\right)$， 將梯度 $d(\log\lambda)$ 加到 $d\phi$ 將不改變理論的物理內容， 由此得到

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial\phi_\nu}{\partial x_\mu}$$

有不變意義， $F_{\mu\nu}$ 可看成等同於電磁場， 其中 $\phi_\nu =$ 常數 $\cdot\, A_\mu$， $A_\mu$ 是電磁勢。

該理論在變換 $d\phi \to d\phi + d(\log\lambda)$ 下的不變性， 即今天稱爲 “規範不變性” 的最早形式。

愛因斯坦對外爾的論文預印本十分關注， 但後來明確表示反對這篇文章。 結果愛因斯坦的意見作爲按語加在外爾文章的後面， 外爾又寫了一個回答附在末尾。

愛因斯坦的異議是說， 不可積標度因子理論如果正確， 那麼從 0 出發的兩條路徑， 由於標度的連續變化， 一般將會有不同大小， 因而兩個鐘快慢將會不同， 時鐘依賴於每個人的歷史， 那就沒有客觀規律， 也就沒有物理學了。 外爾對此作了回答， 但未能消除愛因斯坦的異議。 1949 年， 外爾回憶當時的心情說： “在蘇黎世的一隻孤獨的狼 − 外爾， ⋯⋯ 很不幸， 他太易把他的數學與物理的和哲學的推測混在一起了。”

1929 年， 外爾又回到這一課題。 由於量子力學的推動， 福克 (Fock) 和 F.W. 倫敦 (London) 在 1927 年指出： 外爾的不可積標度因子應當是一個不可積的 “相” 因子。 外爾在 1929 年的文章中寫道： 我曾經希望規範不變原理將引力和磁力統一起來而未獲支

持，但這一原理在量子論的場方程中有一個形式上的等價物，用 $e^{i\lambda}\psi$ 代替 $\psi$，同時用 $\phi_a - \dfrac{\partial\lambda}{\partial x_a}$ 代替 $\phi_a$ 的變換下，定律不改變。這一不變性和電荷守恆定律的關係仍與先前一樣。$\cdots$ 規範不變性原理具有廣義相對論的特徵 $\cdots$ 。外爾的這些觀點對後世有許多影響，不可積 “相” 因子消除了愛因斯坦異議，並由實驗證實。不過 “統一場論” 始終未完成。外爾對自己的研究一直注視著，直到去世前幾個月，他在將 1918 年的規範理論的論文收入他自己的《論文全集》時，在 “跋” 中寫了下列的話：

“我的理論最強的證據似乎是這樣的：就像坐標不變性保持能量動量守恆一樣，規範不變性保持了電荷守恆。”

外爾的規範理論啓發了楊振寧：可以把規範理論從電磁學推出去。這就產生了楊振寧－米爾斯 (Miles) 在 1954 年提出的非交換規範場理論。這一規範場理論在粒子物理中顯示了強大的生命力，可惜那時外爾已退休，未曾注意及之。

外爾的數學研究總是和當代的物理學最新成就聯繫在一起。當 1925－1926 年量子力學剛剛產生的時候，外爾深入地從事李群及其表示的研究，並在 1927 年把這項研究與量子力學結合起來。1928 年，名著《群論和量子力學》(*Gruppentheorie Quantenmechanik*) 出版。差不多每一位在 1935 年之前出生的理論物理學家，都會在自己的書架上放上這本書。不過，幾乎沒有人去讀它。對物理學家來說，這本書太抽象了。

1930 年，在該書德文新版的前言中，外爾寫道：

“質子和電子的基本問題已經用其與量子定律的對稱性性質的關係來討論了，而這些性質與左和右、過去和將來以及正電和負電的互換有關。”

這裡的左和右是指宇稱守恆 (P)，過去和將來是指時間反演不變 (T)，正電和負電是指電荷共軛不變性 (C)。諾貝爾獎獲得者楊振

寧博士曾評論說：“在 1930 年， 沒有人， 絕對沒有人以任何方式猜想這些對稱性是彼此相關的， 僅僅在五十年代人們才發現他們之間的深刻聯繫。”

外爾非常喜歡對稱， 在 1952 年寫過《對稱》(*Symmetry*) 的精美小書。 也許因爲太醉心於對稱， 他拋棄了自己提出的不滿足左右對稱的二分量中微子理論 (1929)。 二十八年以後的 1957 年， 楊振寧和李政道發現了宇稱不守恆， 並由吳健雄等用實驗證實。 外爾的二分量中微子理論也得到重新肯定。 這時外爾去世已經兩年， 人們無法聽到這位理論物理先驅的評論了。

讓我們再回到數學上來。 外爾在本世紀二十年代從事李群和李代數及其表示的研究， 可說是外爾數學生涯中最光輝的篇章。

本世紀初， G.F. 弗羅貝尼烏斯 (Frobenius) 和 I. 舒爾 (Schur) 等已完成複 $n$ 階方陣構成的一般線性群 $GL(n,c)$ 的不可約有理線性表示的工作。 由此可知行列式爲 1 的特殊線性群 $SL(n,c)$ 的所有有理線性表示是完全可約的。 1913 年， 嘉當獨立地完成單複李代數不可約線性表示的工作， 並指出有限維半單李代數是完全可約的。

外爾創立一種新的方法， 將注意力集中於大範圍李群， 僅把李代數作爲一種工具。 1897 年 A. 胡爾維茨 (Hurwitz) 指出了一種對正交群或酉群構作不變量的途徑： 只須將有限群中普通的平均求和代之以緊群上關於不變測度的積分， 他不僅研究特殊酉群 $SU(n)$ 的不變量 (外爾稱之爲酉技巧)， 而且處理了特殊線性群 $SL(n,c)$ 的不變量問題。 舒爾於 1924 年藉助於在 $SU(n)$ 作用下該群的任何表示空間中一種對稱數量積不變量的存在性， 證明 $SL(n)$ 的完全可約性， 他又用酉技巧證明了 $SL(n,c)$ 連續線性表示的完全可約性和 $SU(n)$ 的特徵標的正交關係。

從這些結果出發， 外爾首先指出舒爾和嘉當的兩種表示之間的聯繫， 說明二者能一一對應的原因在於 $SU(n)$ 是單連通的。 其次

他研究了正交群的雙葉覆蓋群的存在性。 最後， 外爾轉入半單李群大範圍理論的研究。 這一工作之深刻令人嘆爲觀止。

外爾首先指出， 酉技巧不僅在典型群有用。 他證明， 每個半單複李代數 $\mathcal{G}$， 可從一個緊李群的實代數 $\mathcal{G}_u$ 經過複化 (complexification) 而得到。 嘉當曾逐類討論過這一問題， 外爾則用半單代數的根代數性質很快得出。 這樣， 外爾建立了 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}_u$ 的線性表示之間的聯繫。 但是要用酉技巧， 還必須證明確實存在以 $\mathcal{G}_u$ 爲李代數的緊李群 $G_u$， 而且是單連通的。 爲了繞過這個困難， 外爾證明了緊群 $G_u$ 的通用覆蓋群也是緊的。 可以說這一結果是外爾論文中最深刻最有活力的核心。

這一結果可以有極好的幾何解釋， 因而有外爾 "房" 和外爾 "牆" 的概念產生。 外爾證明： $G_u$ 的基本群是有限群， 因而 $G_n$ 是緊群。 極大環面 $T$ 在 $G_u$ 中的作用和對角線矩陣群在 $SU(n)$ 中的作用相似， 即每個 $G_u$ 中元素是 $T$ 中一個元素的共軛。 $G_u$ 的特徵標的正交關係是重要工具。 外爾最終提出一個大膽的想法： 由 "分解" $G_u$ 的無限維線性表示來求得半單群的所有不可約表示。

李群的研究和群上調和分析緊密相連。 他考慮 $G_u$ 上複值連續函數全體 $F$。 若按群 $G_u$ 上的不變測度定義積分， 則 $F$ 上可定義捲積

$$(f*g)(t)=\int_{G_u} f(st^{-1})g(t)dt\text{，}$$

$F$ 於是構成群代數。 如果考察算子 $R(f)$： $g\to f*g$， 則 $R(f)$ 是緊的自伴算子， 於是就可以用緊算子的譜分解理論加以研究了。 更一般地， 外爾研究了不變內積。 他證明： $n$ 維線性空間 $V$ 上的一般線性群 $GL(V)$ 中的緊子群 $G$ 、 $V$ 上必存在關於 $G$ 的不變內積：

$$(x,y)=\int_G f(g(x),g(y))dw,\quad x,y\in V\text{。}$$

利用這一定理， 可直接決定所有緊複連通李群。 即連通複緊李

群必可交換，因此是複環面。外爾還得到：緊李群的李代數必具有不變內積 (緊李代數)。

外爾的研究都有強烈的背景，豐富的思想和高度的技巧。他用自己的成果開闢了二十世紀純粹數學的新天地，並且表明 “抽象” 方法和傳統的 “硬” 分析方法完全可以相比美。

作爲希爾伯特的繼承者，外爾確實發揚了希爾伯特的傳統，且注入了時代精神。微分算子理論、模 1 等分佈論、仿射聯絡理論、連續群論都可以在希爾伯特的積分方程、數論、代數不變量、物理學研究等研究中找到淵源，而相對論、量子力學、拓樸學方法、代數拓樸工具等則使他發展並超越了希爾伯特的範圍。他們師生二人，可以說代表了二十世紀上半葉的數學。

然而，他們兩人並非完全一致。在數學基礎上，外爾擁護布勞外爾的直覺主義，不承認實無限，不准濫用排中律，不願用選擇公理，他的全部工作確實沒有用 G. 康托爾 (Cantor) 的超限數理論，而且說康托爾的那一套是 “霧中之霧”。外爾把布勞威爾的觀點介紹給希爾伯特，希爾伯特卻極力反對直覺主義。希爾伯特倡導 “形式主義”，企圖證明包含正整數系統的數學體系是無矛盾的和相容的。但是希爾伯特也小心翼翼地把有限步可以達到的結論認爲是最可靠的，所以外爾說希爾伯特 “從布勞威爾的直覺主義的啓示中獲益非淺。” 1931 年，K. 哥德爾 (Gödel) 擊破了希爾伯特的夢想。外爾平靜地和希爾伯特討論事情的前因後果，儘管兩人的意見並未統一。

1932 年，希爾伯特七十壽辰。外爾寫了生日祝辭，表達他對恩師的崇敬與深情。1943 年，希爾伯特去世，外爾在《美國數學會公報》(*Bulletin of American Mathematical Society*，50，612 − 654，1944) 上發表了 “大衛 • 希爾伯特及其數學工作” (*David Hilbert and his mathematical work*) 的長篇紀念文章 (中譯本見《數學史譯文集》，上海科學技術出版社，1981)。

外爾在美國繼續做過一些研究工作，例如凸體表面的剛性與形變 (1935)、$n$ 維的旋量、平均運動 (1938－1939)、亞純曲線 (1938)、邊界層問題 (1942) 等。作為二十世紀前半葉數學發展的見證人，他對克萊因、希爾伯特、諾特等大數學家的記述和評論，具有很高的歷史價值。1950 年，外爾在《美國數學月刊》(*Monthly AMS*) 發表論文 "半個世紀的數學"，是一篇極好的學術總結 (中譯本見《數學史譯文集續集》，上海科學技術出版社，1985)。

最後，我們應當提到外爾的哲學研究。外爾對哲學終生不渝。他早年追隨過的康德哲學，後來受 E. 胡塞爾 (Husserl) 的影響很深。他的《空間、時間、物質》就是一部物理學、哲學以及數學相結合的著作。他在哲學方面的主要作品是《數學和自然科學的哲學》(*Philosophie der Mathematik und Wissenschaften*，1927)。書中的數學部分包括數理邏輯、公理學、數及連續統、無窮，以及幾何學共三章，自然科學部分有空間時間與先驗的外在世界、方法論以及世界的物理圖景，也是三章。書中引用了一百多位哲學家、數學家和自然科學家的原著，對整個問題作了詳盡而清楚的闡述。

而在數學哲學方面，外爾早在 1910 年就寫過論文 "關於數學概念的定義" (*Über die Definitionen der mathematischen Grundbegriffe*)。他將數學看作 "一棵自豪的樹，它自由地將枝頭長入稀薄的空氣，同時又從直覺的大地和真實的摹寫中吸取力量"。在同一文章中，外爾認為 "連續統的勢的問題，必須從嚴密地建立集合論原理的途徑去解決"。到了 1918 年，他出版了《連續統》(*Das Kontinuum*) 一書，成為一場集合論爭辯的導火線之一。

進入二十年代，外爾站在布勞威爾一邊，贊成直覺主義，反對希爾伯特倡導的形式主義。這在前面已經有所提及。但是外爾在晚年似乎力圖調和這兩方面的衝突。"數學中的公理方法與構

造程序” (*Axiomatic versus constructive procedures in mathematics*) 是外爾用英文寫的遺作， 大約寫於 1953 年以後， 1985 年才公諸於世 (*The Mathematical Intelligencer*， vol. 7， No.4)。 文中說：“現代數學研究的大部分建立在構造程序和公理方法的巧妙結合之上。” 例如他從域公理出發， 用 $1a$ 記 $a$、 $2a$ 記 $1a+a$、 $3a$ 記 $2a+a$， 如此繼續， 就得出 $a$ 的倍數 $\nu a$， 即正整數全體。 然後看是否有 $\nu$ 使 $\nu a=0$， 表明域的特徵數爲有限 (質數) 或 $\infty$。

外爾曾設想， 數學證明必須是一步一步地可被人的直覺檢驗的程序。 現在四色問題的計算機證明已突破了外爾的要求， 但是構造主義觀點卻由於計算機的發展而倍受重視。 外爾說過：“哲學的反思伴隨著歷史的反思。” 數學基礎正以新的形式繼續著爭辯。 儘管外爾的 “調和” 並未得到公認， 可是歷史也許會再次注意他的數學哲學觀點。

外爾逝世已經六十年了， 但是整個國際數學界仍然時刻感到他的存在。 他所創立的深刻數學思想至今還在起著指路燈的作用。 他的工作一定會影響到下一個世紀。

## 文　　獻

### 原始文獻


[1] H. Weyl, *Gesamelte abhandlungen*, K. Chandrasekharan, ed., 4 vols., Springer–Verlag, 1968。

[2] H. Weyl, *Gruppen Theorie und Quantenmechanik*, S. Hirzel, Leipzi 1928。

[3] H. Weyl, *Raum-Zeit-Materie*, Springer, Berlin, 1923。

[4] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, B.G. Teubner, Leipzig 1913。

[5] H. Weyl, *Philosophie der mathematik und Wissenschaften*, R. Oldenbourg, München, 1926。

[6] H. Weyl, *A half–century of mathematics*, American Mathematical Monthly, 58(1951), 8, 523 − 553 (中譯本： H. 外爾， 半個世紀

的數學， 數學史譯文集續集， 上海科學技術出版社， 1985)

**研究文獻**

[7] C. Chevalley and A. Weil, *Hermann Weyl (*1885 − 1955*)*, Enseignement Mathematique, S2. Vol 3, 1957。

[8] J. Dieudonné, *Weyl Hermann, Dictionary of scientific biography*, XIV (1967)。

[9] 楊振寧， 外爾對物理學的貢獻， 自然雜誌， 9(1986)， 11 期

[10] 胡作玄， 赫爾曼•外爾： 數學家、 物理學家、 哲學家， 自然辯證法通訊， 1985， 第 3 期， 60。