柯 爾 莫 哥 洛 夫

柯爾莫哥洛夫，A. H.(Андрей Николаевич Колмогоров 英文名 Andrey Nikolaevich Kolmogorov) 1903 年 4 月 25 日生於俄國坦波夫 (Тамбов)；1987 年 10 月 20 日卒於蘇聯莫斯科。數學、大氣力學。

柯爾莫哥洛夫之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Kolmogorov.html

柯 爾 莫 哥 洛 夫

龔 光 魯

(清華大學)

柯爾莫哥洛夫，A. H.(Андрей Николаевич Колмогоров 英文名 Andrey Nikolaevich Kolmogorov) 1903 年 4 月 25 日生於俄國坦波夫 (Тамбов)；1987 年 10 月 20 日卒於蘇聯莫斯科。數學、大氣力學。

柯爾莫哥洛夫的父親卡塔也夫 (Николай Матвеевич Катаев) 是農藝師兼作家，母親柯爾莫哥洛娃 (Мария Яковлевна Колмогорова) 出身貴族。他們並沒有辦結婚手續，所以柯爾莫哥洛夫從母姓。十月革命後，卡塔也夫主持農業人民委員部教育部門，在 1919 年 A. И. 鄧尼金 (Деникин) 進攻時死於南方戰線。柯爾莫哥洛夫生後十天母親就去世，他由姨媽薇拉 (Вира) 與娜捷日達 (Надежда) 撫育，生活在沿伏爾加河的雅洛斯拉伕爾 (Ярославль) 下游約 20 公里的圖諾斯那村 (Туношна)。她們都有民主思想，卒於五十年代初。在柯爾莫哥洛夫幼年，兩個姨媽努力引導他對書本和自然的興趣，開拓他的好奇心，帶他去田野、森林，給他講花草樹木的知識、星星與宇宙演化的故事、安徒生的童話……。她們辦了一個有十個不同年齡的孩子組成的家庭學校，以適應當時新的教育模式。五、六歲的他負責家庭雜誌《春燕》(Весенние Ласточки) 的數學部分。在 1963 年發表的文章《我是如何成爲數學家的》(Как Я стал математиком) 中寫道："在

五、六歲時我就領受到數學‘發現’的樂趣，我觀察到

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2, \\ 1+3 &= 2^2, \\ 1+3+5 &= 3^2, \\ 1+3+5+7 &= 4^2, \end{aligned}$$

等等。我的發現被刊在《春燕》上，在那裡還發表了我發明的算術問題 (其中例如：要固定一個有四孔的鈕子至少要用線縫合兩個孔，問有多少不同的固定辦法?)。”孩子們還參加農莊勞動、收集柴火、自己縫鈕子等等。1910 年他進入莫斯科列普曼 (Лепман) 文法學校預班。該校崇尚自由，著重因材施教，學生可以自由選聽高年級的課程，還採用了很多試驗教學。在女性環境中成長的他特別珍視男孩特點的培養，諸如淘氣、嬉鬧、大膽、果敢、靈巧等。在該校他結識了 А. Д. 葉戈洛娃 (Анна Демитриевна Егорова)。她是通訊院士、歷史學家 П. Н. 葉戈洛夫 (Егоров) 之女，後於 1942 年在莫斯科與柯爾莫哥洛夫成婚，她卒於 1988 年。少年時他對生物、物理、歷史、社會學、數學、俄國藝術、林業學都有濃厚的興趣，在十四歲就自習高等數學，還夢想在荒漠中創建法律至上的公社，並爲此起草了憲法。

1920 年他畢業於第二十三高中 (即前列普曼文法學校)。他曾經嚮往學冶金，因爲在那時候的人們認爲工程比純科學更爲重要和必需。他同時在國立莫斯科大學物理數學系和門捷列夫 (Менделеев) 化工學院冶金系註册。但是不久以後他就下決心以數學爲職業。他在莫斯科大學學習的同時又在門捷列夫化工學院數學部學習了一段時間，還參加了莫斯科大學歷史系教授 C.V. 巴赫羅欣 (Бахрушин) 的討論班。十七歲的他對歷史發生了興趣，他曾對俄國的諾夫格勒 (Новгород) 地區在十五至十六世紀房地產登記的資料，用數理統計進行科學分析並寫出論文，得到了巴赫羅欣的讚賞。但是當他問能否發表時，得到的回答是：只有一個論據是

不夠的， 必須有五個不同的論據。 以後他專心致力於數學， 因爲數學問題只需一個證明就足夠了。

在進入大學之前， 他已有相當多的數學知識， 他從《數學的新概念》(Новые идей в мате матике) 一書中知道了集合論基礎， 他從《勃洛克豪斯與傑弗朗百科全書》(*Brockhaus and Jefron encyclopedia*) 中學了很多專題， 並用自己的語言改寫了這些過於濃縮的內容。 進入莫斯科大學後， 他立刻通過了集合論和射影幾何的免修考試。 當時的魯金學派正處於頂峰時期， 1921 年他在 H. 魯金 (Лузин) 的解析函數論課上， 對魯金的一個猜測舉出了反例， 得到 П. С. 烏里松 (Урысон) 的讚揚， 成爲烏里松的學生。 在聽了 П. С. 亞歷山德羅夫 (Александров) 課後， 他發表了 “作用於集合上的算子的理論” (Теории операний над множествами)， 推廣了 E. 波萊爾 (Borel)、 R. 貝爾 (Baire)、 H. 勒貝格 (Lebesgue)、 亞歷山德羅夫和 M. 蘇斯林 (Суслин) 等人的研究。 1921 年秋， 他參加了 B. B. 斯捷班諾夫 (Стенпанов) 的三角級數討論班， 這對他以後的事業有特殊的重要性。 1922 年他解決了魯金提出的構造一個係數收斂到零的任意慢的傅里葉級數問題。 此後他又定期向魯金學習， 從而又成爲魯金的學生。 在三角級數討論班上， 他還與 Д. Е. 門曉夫 (Менщов) 建立了友誼。 1922 年， 他取得了突出的成果， 構造了幾乎處處發散的傅里葉級數， 它立刻使這位大學三年級的學生揚名世界 (到 1926 年他進而構造了一個處處發散的傅里葉級數)， 並開始了他長達六十多年的高強度與高創造性的時期。 1925 年他畢業於莫斯科大學後成爲魯金的研究生， 並開始與魯金的另一個學生 А. Я. 辛欽 (Хинчин) 一起從事概率論的研究。 1929 年研究生學習結束後， 他成爲莫斯科大學數學力學研究所助理研究員。 1934 年在蘇聯首次建立了博士學位制度， 翌年他被授予數學物理學博士學位。 1930 年 1 月他與亞歷山德羅夫一起對德國和法國進行了十個月的訪問。 格丁根在當時是數學的 “麥

加聖地”，研究人員少而精，只有 D. 希爾伯特 (Hilbert)、E. 朗道 (Landau)、R. 庫朗 (Courant) 與 S.N. 伯恩斯坦 (Bernstein) 四位教授，那裡的助教有 K.O. 弗里德里希 (Friedrichs)，F. 雷列希 (Rellich)。H. 萊維 (Levy) 和 E. 諾特 (Noether) 的學生 B.L. 范德瓦爾登 (van der Waerden) 等。希爾伯特時已六十六歲，即將退休，H. 外爾 (Weyl) 已內定取代他的位子。柯爾莫哥洛夫與這些人廣泛交往，與庫朗探討了極限定理的領域，與外爾討論了直覺邏輯，與朗道交換了對函數論領域的看法。繼而，他前往慕尼黑與 C. 卡拉西奥多里 (Carathéodory) 交談自己關於測度論與積分論的思想。後者對前者的測度論思想很喜歡，堅持要他盡快發表，但是對他的推廣的積分論反應冷淡。在法國，他與 M. 弗雷歇 (Fréchet) 討論了馬爾科夫鏈，與 P. 萊維 (Lévy) 進行了長時間的科學討論，並與老一輩數學家勒貝格、波萊爾等建立了聯繫。

1931 年柯爾莫哥洛夫任莫斯科大學教授，開始指導研究生。1933 年任莫斯科大學數學力學研究所所長 (至 1939 年 1 月，後來在 1951 – 1953 年又任此職)。他在數學力學系創建了如下教研室：概率論 (1935 年，任主任至 1966 年)，數理統計 (1976 年，任主任至 1980 年)，數理邏輯 (1980 年，任主任至逝世)，概率統計方法 (1960 年，任顧問至 1966 年，任主任從 1966 年到 1976 年)。他對數學教學結構的形成起了很大作用，他創建了許多新課程，如數學分析 III、概率論、數理邏輯等。他教過的課程有數學分析、常微分方程、複函數與概率論、數理邏輯、信息論等。在這些課程中有的附有非常有趣的實踐練習，如用多項式逼近函數、范特波爾 (van der Pol) 型方程的積分、微分方程的奇點、最小二乘法、用網絡來研究偏微分方程的積分等。他於 1953 年任莫斯科大學數學會名譽會員，後任理事長 (1964 – 1966，1973 – 1985)。1954 – 1958 年任莫斯科大學數力系主任。1939 年，他被選爲蘇聯科學院數理部院士、主席團委員、數理部科學

秘書 (1939 – 1942)、 科學院斯捷克洛夫 (Стеклов) 數學研究所所長 (1939 – 1958， 1980 到逝世)。

在三十年代末至四十年代初， 他研究湍流， 隨後在蘇聯科學院地球物理研究所創建了大氣湍流實驗室 (1946 – 1949)， 以後該室發展成該所的主體部門。

在衛國戰爭中， 他與 M. B. 凱爾迪希 (Келдыш) 一起研究槍炮的火力與轟炸的理論。

1949 年， 柯爾莫哥洛夫任《大百科全書》數學部主任與編委。 他長期任期刊《數學科學的進展》(Успехи Матемдтических наук， *Russian Mathematical Surveys*) 的主編。 他創辦了期刊《概率論及其應用》(Теории Вероятностии и её пременении) 及以中學生爲對象的雜誌《量子》(Квант)。 他還主持撰寫了數理系列叢書。

從 1963 年至逝世， 他主要致力於文法學校的數學教學改革： 編寫教科書、 編制教學大綱。 1963 – 1968 年， 他任科學院科教委員會數學部主任。 1968 – 1978 年任教育部中學教科書委員會委員及數學部主任。 他是莫斯科大學物理數學寄宿學校的創建人之一 (1963)， 而第十八寄宿學校則以他命名。

他與辛欽關於隨機過程的研究成果在 1941 年獲國家獎， 他與 A. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 關於經典力學的研究在 1965 年獲列寧獎。 他兩次獲得科學院獎 – 1951 年與 Б. В. 格涅堅科 (Гнеденко) 一起獲切比雪夫獎， 1986 年獲羅巴切夫斯基獎。 1963 年， 他榮獲蘇維埃勞動英雄稱號。 他還曾被授予十月革命勳章 (1983)、 勞動紅旗勳章 (1940)、 七枚列寧勳章 (1944 – 1975) 及 “在偉大的愛國戰爭中英勇勞動” 獎章、 金星獎章 (1963) 等。

他獲得的國際榮譽稱號有： 巴黎大學名譽博士 (1955)、 羅馬科學院通訊院士 (1956)、 波蘭科學院外國院士 (1956)、 國際統計研究所名譽成員 (1957)、 波士頓美國藝術與科學院名譽院

士 (1959)、斯德哥爾摩大學名譽科學博士 (1960)、加爾各答印度統計研究所名譽科學博士 (1962)、荷蘭皇家科學院外國院士 (1963)、倫敦皇家科學院外國院士 (1964)、羅馬尼亞科學院名譽院士 (1965)、匈牙利科學院名譽院士 (1965)、美國國家科學院外國院士 (1967)、法國科學院外國院士 (1968)、匈牙利 "榮譽事業"(Honoris causa) 科學博士 (1973)、歷史科學國際科學院名譽院士 (1977)、民主德國科學院外國院士 (1977)、聯邦德國 "有成就" (Pour le Mérite) 勳章學會外國會員 (1977)、芬蘭科學院外國院士 (1983)、··· 等等。

他得到的國際獎有：國際巴爾桑 (Balzan) 獎 (1963)、美國氣象學會獎章、民主德國科學院亥姆霍茲 (Helmholtz) 獎章 (1976)、匈牙利旌幟獎章 (1975)，1980 年鑒於他 "在調和分析、概率論、遍歷論和動力系統深刻而開創性的發現" 而獲得沃爾夫 (Wolf) 獎。

二十世紀初以來，由於採用了集合論觀點研究函數，從而推廣了測度與積分、函數構造等概念，這就大大擴大了數學家們的視野。波萊爾、勒貝格等人為此都做出了重大貢獻。蘇聯的Д. Т. 葉戈洛夫 (Егоров)、魯金、蘇斯林進一步把函數與集合的研究推向新的高潮。柯爾莫哥洛夫正是在二十至三十年代魯金學派的頂峰時期成長的。魯金學派造就了蘇聯舉世聞名的一批數學大師，柯爾莫哥洛夫是其中最傑出的代表。在這個時期，數學領域還出現了大量極有挑戰性的問題，新思想、新方法、新探索、新成就相繼出現，其中包括：H. 龐加萊 (Poincare) 關於太陽系發展的永恆性問題 (龐加萊稱它為動力學基本問題) 的提出，引導到哈密頓 (Hamilton) 系統在微擾下的穩定性的研究；L. 巴歇列埃 (Bachelier)、A. 愛因斯坦 (Einstein)、M.V. 斯莫盧霍夫斯基 (Smoluchowski)、N. 維納 (Wiener) 及勒維等長期研究的布朗運動的數學特徵，揭示了隨機過程的基本規律；大氣物理的研究提出了湍流的統計規律刻劃；格丁根學派領導人希爾伯特在二十世紀初

提出了 23 個對數學發展具有決定性影響的問題；當時函數論的研究正從有限維擴展爲無窮維，這就須要把函數論、拓樸與代數等結合起來以產生新概念、新學科。以上種種背景是柯爾莫哥洛夫從學生時代開始在數學上面臨的一些客觀使命。

他一生共寫學術論文 (包括合作) 488 篇，給《大百科全書》寫 114 條，給科普報刊撰寫 57 篇文章。

他是本世紀蘇聯最有影響的數學家，也是本世紀世界上爲數極少的幾個最有影響的數學家之一。他所有的開創性工作是俄羅斯民族的驕傲，也是世界人民的寶貴財富。他研究的領域非常廣泛，幾乎遍及一切數學領域，包括：函數的距離理論、描述集合論、數理邏輯與數學基礎、概率論及隨機過程、數理統計及其應用、幾何、泛函分析、拓樸、微分方程、湍流理論、(武器的) 火力理論、演算學與自動機、動力系統與經典力學、函數的迭合理論、信息論、算法概率論、遍歷論、詩韻中的統計學等。他在這些領域的研究成果不僅被應用於數學本身的發展和開闢新的領域，而且在物理、化學、生物、地球物理、冶金學、結晶學、人工神經網絡等學科中都有極重要的應用。

他的開創性研究可分三個時期。

第一個時期開始於 1921 年秋。大學二年級的他開始研究三角級數與集合上的算子等一系列複雜問題。1926 年他構造了處處發散的一個傅里葉級數，直到 1966 年瑞典數學家 L. 卡萊松 (Carleson) 及 1967 年美國數學家 R. 亨特 (Hunt) 又證明了對 $p>1$，L_p 函數的傅里葉級數處處收斂到這個函數，這就徹底解決了三角級數的發散問題 (魯金問題)。他於 1922 年定義的在集合上的 δS 運算是描述集合論中的基本運算。他對三角級數和正交級數的興趣貫徹終生，不時地返回到這個領域，並安排年輕人繼續進行研究，在這方面他發表的十篇文章中的每一篇都是延續至今的研究的起點。在這時期他在微分、積分、可測集等方面都做了重要的工作。此後

他又轉向數理邏輯與數學基礎。 二十世紀以來， 數學家對邏輯律的適用性、 數學本質及集合論悖論發生了無休止的爭論， 產生了直觀主義者， 他們否認排中律在超限歸納中的有效性。 柯爾莫哥洛夫在 1925 年證明： 超限地使用排中律所得到的有限結論都是對的， 而且都可以不用排中律來證明。 他還構造了他的直觀演算系統， 從而創造了直觀邏輯的另一種解釋。 1925 年他證明了希爾伯特變換的一個切比雪夫型不等式， 這是 M. 里斯 (Riesz)、 A. 濟格蒙德 (Zygmund)、 G.H. 哈代 (Hardy) 等著名數學家關於奇異算子弱型概念研究的起點。 作爲柯爾莫哥洛夫開創性成果的核心部分之一是概率論與隨機過程。 這一研究起始於他大學的第四年 (1924 年)， 他與辛欽一起研究獨立隨機變量組成的級數的收斂性， 得到了以後被稱爲柯爾莫哥洛夫三級數定理的成果， 其中他首次使用了以後用他命名的不等式以及相應的下限估計， 開創了概率論研究中的新方法。 1928 年他得到了獨立隨機變量列遵從大數律的必要且充分的條件。 1930 年他又得到了獨立機變量列遵從強大數律的一個非常一般的充分條件。 這些結果至今是概率論教科書中的標準內容。 1929 年他又得到了獨立同分佈隨機變量列的重對數律。 他的結果和創用的方法是許多作者用來作爲研究的泉源， 其中如 J. 馬辛凱維茨 (Marcinkiewicz) 和濟格蒙德 1937 年證明了柯爾莫哥洛夫的結果中的一個小 o 條件不能改爲大 O； 1941 年 P. 哈特曼 (Hartman) 與維納改進了柯爾莫哥洛夫的條件； 1965 年 V. 斯特拉森 (Strassen) 將其推廣爲泛函類型的重對數律。 二十世紀初， G. 波爾曼 (Bohlmann) 曾企圖給概率論建立一個公理系統。 爲此， 波萊爾、 A. 羅姆尼斯基 (Lomnicki)、 維納相繼在概率論中運用測度論， 伯恩斯坦、 R. 馮米賽斯 (von Mises) 也都企圖建造概率論的公理化基礎， 但是都不很成功。 柯爾莫哥洛夫在他 1929 年發表的文章 “概率論與測度論的一般理論” (*General measure theory and calculus of probabilities*)， 首次給出了測度論

基礎的概率論公理結構。五年以後該文編寫成單行本，即如今在數學界衆所周知的經典著作《概率計算的基本概念》(*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung*)。概率論的公理化是他的巨大貢獻，它使概率論從自然哲學領域眞正轉到數學的範圍，使概率論被確認爲數學的一個分支，並且日漸與其它數學分支相互滲透。著名日本數學家伊藤寫道“讀了柯爾莫哥洛夫的小册子《概率論基本概念》，我信服地認爲概率論可以用測度論來發展，並且它也與其它數學分支一樣地嚴格”。柯爾莫哥洛夫在這單行本的序言中還列出了無窮維空間的概率分佈、條件期望，指出這些都源自物理問題。事實上它們也是隨機過程論的必要基礎。在五十多年以後的今天，它的意義就更明顯的，它是概率論劃時代的著作，柯爾莫哥洛夫在 1930 年夏完成的小册子《概率論中的解析方法》(*Über die analytischen Methoden in Wahrscheinlichkeitrechnung*) 開創了無後效隨機過程 (以後辛欽建議改名爲馬爾科夫過程) 的一般理論的研究，把物理學家 M. 普朗克 (Planck)、愛因斯坦、A. 福克 (Fokker) 等在特殊情形得到的關於轉移函數的一個積分方程一般化 [以後稱爲查普曼 (Chapman) − 柯爾莫哥洛夫方程]，並且由此導出了時間向前與向後的兩個偏微分方程 (稱爲柯爾莫哥洛夫方程)。在馬爾科夫過程的發展中，他把傅里葉的傳熱理論、愛因斯坦與斯莫盧霍夫斯基的布朗運動理論、馬爾科夫等人關於可幾隨機徘徊的描述與首次構造隨機過程例子的巴歇列埃與維納的思想結合在一起，抽象出了馬爾科夫過程的一般模型。這個工作標誌著概率論發展及其在物理、化學、生物、工程等方面的應用的新時期。在這個時期，他的另一文章“拉普拉斯 − 李雅普諾夫定理的推廣” (*An extention of Laplace-Lyapunov theorem*，1931)，給出了獲得獨立隨機變量和的上、下界概率的漸近展開的基本方法。

柯爾莫哥洛夫開創工作的第二階段始於 1931 年他被任爲教授之後。這時期持續了四分之一個世紀，在此期間他的的研

究興趣極其廣泛。 1932 年他發表了兩篇關於幾何的文章 “射影幾何證法” (Кобоснованиюпроективной геометри) 和 “拓樸幾何” (Топологической геометрии)， 用拓樸、 群的觀點研究幾何。 在他建議下， Л. 龐特里亞金 (Понтрягин) 證明了具有可數基的連通局部緊拓樸域一定是實數域、 複數域或四元數廣域之一。 在代數拓樸領域中上同調群一個核心的概念。 1936 年柯爾莫哥洛夫與美國數學家 J.W. 亞歷山大 (Alexander) 相互獨立地構造了上同調群， 並在其上定義了乘積運算， 使之成爲環， 這在以後的研究 (特別是連續映射) 中極爲重要。 他在拓樸學上的第二個貢獻是給出了局部緊空間閉集的對偶律。 1937 年， 他給出了一個從一維緊集到二維緊集的開映射， 引起了蘇聯拓樸學家對開映射的興趣。

這時期， 概率論仍舊是他的主要專業之一， 他非常重視隨機過程的應用。 1932 年他積極地參與了著名生物學家 Д. Д. 羅瑪曉夫 (Ромащов) 領導的生物微演化的實驗室。 由於馬爾科夫過程是動力系統在隨機情形的對等物， 兩者互相滲透會產生很多新的概念和現象， 所以馬氏過程始終是許多研究的重點。 1935 年他又提出了可逆 (對稱) 馬氏過程的新模型， 並給出了刻劃其特徵的充要條件。 四十多年後的今天， 可逆馬氏過程已成爲統計物理、 排隊網絡、 模擬退火、 人工神經網絡、 蛋白質結構等領域中十分常見的重要模型。 在二十年代末三十年代初 B. 德菲乃蒂 (de Finetti) 提出了 “無窮可分律”， 指出了具有特徵函數

$$f(t) = \exp\left\{iat - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + c\int(e^{iut}-1)dF(u)\right\}$$

的隨機變量 ξ_t 有無窮可分律， 即對 $\forall n \geq 1$ 、 ξ_t 與 n 個獨立同分佈隨機變量的和同分佈， 柯爾莫哥洛夫在 1932 年對具有二階矩的隨機變量給出了它具有無窮可分律的充分條件。 以後， 勒維證明了有限方差這個限制可以取消， 隨後辛欽又證明了這一結果仍可用柯爾莫哥洛夫的方法得到 (最終的表達式稱爲無窮可分律的勒維－辛

欽典型形式)。

柯爾莫哥洛夫還解決了一系列生物學問題， 由此得到了十分有意義的純數學的成果。 他與 И. Г. 彼得洛夫斯基 (Петровский) 及 Н. С. 比斯庫諾夫 (Пискунов) 合作的有關生物學的文章 (1937)， 首次構造了非線性擴散的行波型穩定解。 他在其中的貢獻是從物理方面定性地描述現象的圖像， 並把它表示爲公式。 生物學問題導致他提出了分枝過程的模型， 並研究了它的滅絕概率 (1947 年)。 1939 年， 他由分析統計資料驗證了基因遺傳的 “孟德爾 (Mendle) 律” (當時基因與孟德爾律在蘇聯生物界被批判爲 “唯心主義”、 “反科學” 的)。

1937 年， 他給出了在金屬隨機結晶過程中一個給定的點屬於結晶團的概率與平均結晶的數目， 這一結果在金屬結晶化理論中至今仍是基本的結論。

1933 年， 他與 M. A. 列沃托維奇 (Леотович) 給出了 A. K. 伏拉索夫 (Власов) 提出的二維布朗質點爲中心、 半徑爲 ρ 的圓盤在 t 時刻前掃過的平均面積的漸近估計。

1936 − 1937 年， 他給出了可數狀態馬爾科夫鏈的狀態分類。

在數理統計方面， 1933 年他定義了度量經驗分佈與理論分佈最大偏差的 (以後以他命名的) 統計量， 並推導了它的分佈函數。 這是分佈擬合理論中擬合度的基本檢驗， 已成爲數理統計教科書的基本內容。

1935 年他首次給出了巴拿赫空間上概率測度的特徵泛函這一概念， 並指出它在發展非線性量子理論中的重要性。

他在平穩隨機過程方面的成就與維納的成就並列爲該領域最基本的成果。 具連續譜的元阻尼隨機運動是平穩過程的豐富源泉， 平穩過程是概率特徵不隨時間變化的隨機過程， 常出現在無線電工程、 自動控制等應用領域， 是大量隨機自然現象 (大氣、 海洋等) 的理想化。 其中的一個重要問題是用過去的資料預測將來， 他早

於維納 (1941) 得到了預測與內插的公式。 維納指出柯爾莫哥洛夫的研究是與控制學有關的信息統計理論相聯繫的。 在柯爾莫哥洛夫的研究中應用了希爾伯特空間的幾何理論。

平穩過程與平穩增量過程的研究使他得到了局部迷向湍流的近似表達式。 流體有確定性的規律， 但是其運動特徵又極端複雜， 可以把它看成隨機過程。 二十世紀著名的工程師 G.L. 泰勒 (Taylor) 與 T. 馮卡門 (von Kármán) 引進了迷向湍流， 然而其結論與實驗不符， 柯爾莫哥洛夫用局部迷向湍流得到了著名的 "柯爾莫哥洛夫 $\frac{2}{3}$ 次律"： 在特定條件下， 湍流中距離爲 r 的兩點的速度差的平方平均與 $r^{\frac{2}{3}}$ 成正比。 這個 $\frac{2}{3}$ 律至今還被大氣物理界公認爲是關於湍流的所有結果中最與實際相近的。 1962 年他又作了更爲精確的修正。

他在概率論、 隨機過程與數理統計方面的貢獻， 說明他是隨機數學領域的領導人。 他不僅是一個多方面的數學家， 而且是一個有驚人洞察力的應用數學家。

1949 年格涅堅科與他一起發表的《獨立隨機變量和的極限分佈》(Предельные теолемы для сумм независимых случайных величин) 一書， 總結了莫斯科學派當時在弱極限理論方面的世界領先的成果， 成爲弱極限理論的經典著作。

在逼近論方面， 1935 − 1936 年他研究了光滑性與逼近度的關係， 引進了一種逼近的度量 (以後稱爲柯爾莫哥洛夫直徑)， 開創了逼近論領域中的新方向。 六十年代以後柯爾莫哥洛夫直徑受到了更大的重視。

在泛函分析方面， 他在 1931 年得到了 L_p 空間中集合爲緊的判別法。 在 1934 年定義了線性拓樸空間與其中的有界集和凸集， 得到了可正規化的經典判別法 (存在 0 點的一個有界凸鄰域)。 1938

年柯爾莫哥洛夫與 И. М. 蓋爾范德 (Гельфанд) 合作的文章是後者以後開創賦範環理論的源泉。 他們證明了兩個滿足第一可數公理的拓樸空間的同胚性與在它們上的連續函數環間的代數同構性等價。

他的第三個開創性研究時期開始於五十年代中期。 這時, 他的研究方向轉向經典力學哈密頓系統、 信息論、 動力系統的遍歷論、 信息論與函數論的關係 (ε 熵)、 希爾伯特第 13 問題和函數的迭合、 有限自動機與複雜性理論等領域。

五十年代中期他與 В. А. 烏斯賓斯基 (Успенский) 對算法與自動機理論的基本對象給出了廣泛的定義。

在這時期他在動力系統方面的工作可分爲兩個系列。 第一個系列是經典力學方面的。 太陽系能否永恆發展而不會引起災變? 簡單行星系是否只有三體系統才能穩定地運動? 這個問題歸結於研究近似可積系統的運動體系。 龐加萊稱它爲哈密頓系統在微擾下的發展問題。 它是動力學基本問題, 可溯源到 I. 牛頓 (Newton)、 P.S. 拉普拉斯 (Laplace) 的研究。 柯爾莫哥洛夫在五十年代中期對具大量初始條件的情形解決了這個問題, 開創了哈密頓系的微擾理論。 從他的定理可推出: 圍繞木星作圓軌道轉動的衛星, 在經受沿橢圓軌道的木星運動的干擾下, 並不能影響木星的橢圓軌道。 他的理論還可用到大量力學、 物理學問題中, 解決了不對稱剛體繞定點高速旋轉的穩定性、 托卡馬克 (Токамак) 型系統中磁面的穩定性等問題。 他的思想後來被 А. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 與 J. 莫爾斯 (Moser) 所發展, 成爲以他們三人命名的 KAM 理論。

他研究動力系統的第二系列是把信息論應用於研究系統的遍歷性質。 G.E. 仙農 (Shannon) 用直觀定義的熵有深刻的內涵, 柯爾莫哥洛夫給出了嚴格的數學定義及推廣, 他引入了距離空間的 ε 熵及 ε 容度作爲逼近論中的嶄新工具, 1958 年又進一步把熵參數引進動力系統的研究。 三十年代馮•諾伊曼證明了具有純點譜並有相同譜點的兩個動力系統 (動力系統是指測度空間及其上的一個保測自

映射) 是同構的。 柯爾莫哥洛夫和他的學生 Ю. Г. 希那依 (Синай) 定義了一個熵型不變量 (以後稱爲柯爾莫哥洛夫－希那依熵或 K－S 熵)， 用它來證明不同參數 p $(0 < p < 1)$ 的伯努利模型雖然具相同的譜點， 但是它們彼此並不同構， 從而徹底回答了馮・諾伊曼問題 (即具有相同譜的兩個動力系統是否同構問題)。 K－S 熵至今是動力系統中最爲成功的不變量 (雖然它並不完備)， 它的發現標誌著動力系統理論有了嶄新的開始。

希爾伯特第 13 問題是要證明方程 $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ 的解 $f(x, y, z)$ 不能表成兩變量函數的疊合。 柯爾莫哥洛夫在 1956 年證明： 任意一個四變量連續函數都能表成三變量連續函數的疊合 (這是他認爲技巧性最複雜的成就， 是他花費了一生中最長的連續思考時間所完成的)。 翌年春， 他的學生－三年級的大學生 А. И. 阿諾爾德 (Арнолд) 徹底解決了這個問題， 推翻了希爾伯特的猜測。 不久， 柯爾莫哥洛夫又簡化爲如下的精美構造： 任意整數 $n \geq 2$， 必有 $[0, 1]$ 上的連續函數族 $\{\psi_{ij}(\cdot)\}$， 使 $[0, 1]^n$ 上任意連續函數 f 都能表成

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{n} \psi_{ij}(x_j) \right),$$

這裡 $\varphi_i(\cdot)$ 是實數上連續函數。 這個定理在如今已成爲人工神經網絡設計的理論基礎。

這一時期柯爾莫哥洛夫繼續保持著研究概率論的興趣。 1956 年， 他得到了用無窮可分律去一致逼近獨立同分佈隨機變量的和的階爲 $n^{\frac{-1}{5}}$。 1963 年他又改進爲 $n^{\frac{-1}{3}}$。 1983 年又被 Т. В. 阿拉克 (Арак) 和 А. Ю. 沙以切夫 (Заицев) 改進爲最佳 $n^{\frac{-2}{3}}$。 這個結果比經典正態近似的貝萊－艾森 (Berry-Essen) 界 $n^{\frac{-1}{2}}$ 精確得多。

1956 年他與 Ю. В. 普羅霍洛夫 (Прохоров) 合作的關於距離空間上概率的弱收斂的文章總結了他們所開創的取值於函數空間的概率測度的弱極限理論， 這些理論和 1955－1956 年 А. В. 斯格羅霍

特 (Скороход) 引進的 D 空間理論構成了弱極限理論中具劃時代性的成果。

六十年代，柯爾莫哥洛夫又開創了兩個新的數學分支－演算信息論和演算概率論。對一個 n 位二進列定義 “複雜度” 似乎很難避免某種任意性，他與 R.J. 索洛莫若夫 (Solomonoff) 的基本發現是利用演算論可以不計有界項的差別的意義下定義 “複雜度”，並使其任意性受到限制。在演算概率論中的一個重要問題是如何判斷一個二進列爲隨機的，如果它對一類按某種容許選擇規則選定的子列都有相對穩定的 0 出現率。柯爾莫哥洛夫在 1963 年拓廣了這種選擇規則 (稱之爲頻率法)。隨後又與他的學生 P. 馬丁－洛夫 (Martin-Löf) 和 L.A. 列溫 (Levin) 用極大複雜度來定義隨機性的新概念。1986 年他和烏斯賓斯基在伯努利協會首屆國際會議上作了 “演算和隨機性” 的大會報告，這是隨機性演算方法的極爲重要的綜述。

從六十年代開始至 1985 年，柯爾莫哥洛夫一直保持著對語言學統計研究的興趣。他引入了語言的熵，並把它分成語義信息與語言信息 (剩餘熵)，開創了語言統計學的新領域。

柯爾莫哥洛夫的開創性工作在數學的一系列重要領域中提供了新方法，打開了新思路，開闢了新方向，揭示了不同數學領域間的本質聯繫，並廣泛地提供了它們在物理、化學、氣象、生物、力學、工程、人工神經網絡、金屬結晶學、控制論、計算機、比較語言學等學科中的應用前景。他創造的大量構造方法和基本引理至今在不同領域中經常引用，其中絕大部分都已成爲教科書和專著中的經典內容。

他的選集已出版了三卷：第一卷《數學與力學》，致力於確定性現象，也可以說是涉及 “序” 的領域；第二卷《概率論與數理統計》涉及隨機過程與混沌現象；第三卷《信息論與算法論》，其基本思想是：序和隨機及混沌之間並無明確界限。把隨機性的思

想歸結爲算法複雜性，力圖揭示“序”與“混沌”的本質，是他開創生涯的統一源泉。在這觀念下，他所研究的所有方面似乎都能融化爲一體，統一的思想聯繫著概率論思想、算法論與數理邏輯結構、信息論方法與概念、動力系統與遍歷論，以及研究自然現象的試圖。而他的許多早期工作，包括函數論、描述集合論等都可視爲他實現這一宏圖的的前奏。

他的主要貢獻可以概括爲：繼承了牛頓、拉普拉斯、龐加萊的路線，試圖解釋太陽系運動永恆性的奧秘，並在這個問題上得到了滿意的成果；解決了關於多變量函數基本結構的希爾伯特第13問題；開創了無後效過程的理論研究，在此基礎上統一了傅里葉、普朗克、愛因斯坦、斯莫盧霍夫斯基的思想；發現了新的湍流統計規律，本質上發展了泰勒與馮•卡門理論；與辛欽、維納一起給出了弱平穩過程的構造，並解決了信號濾波問題 (現已成爲石油探測數據處理中的重要數學方法)；引進了大量十分重要的數學概念 (如線性拓樸空間、上同調、動力系統的熵、柯爾莫哥洛夫複雜性等)；對許多重要的基本概念作出了精闢的解釋 (如測度、積分、導數等)；研究了數學邏輯的基本結構；開創了十多個新的研究方向，並給出新方法。

柯爾莫哥洛夫進行科學研究的特點是：幾乎在他所關心的所有領域，都首先創建了幾個基本原理，接著讓他的學生繼續進行研究，達到深入完備的程度，最後吸引大量研究人員加入，寫綜合報導，出專集，開交流會議，形成科學方向和學派。他是他的學生領導的許多學派的奠基人。

對於學生，柯爾莫哥洛夫爲他們創造了要求嚴格而且神聖的科學研究氣氛。他具有激發他們創造力的能力，發現適合每個人的特點的問題和任務。他與他們分享自己的思想，這些都使他的學生銘刻終生。

從三十年代起，他就致力於領導全國數學奧林匹克，定時地

給學生講課。 但是， 他認爲它的意義不僅在於體育式的競賽， 更重要的是發現數學天才並給他們以較爲全面的數學知識訓練而不是只教他們作一些特殊問題以便奪取冠軍。 他指出： 奧賽的成功固然值得高興與驕傲， 但是失敗了也不必傷感到看不見自己的能力，“在非常局限的時間內解答問題常使許多人感到困惑， 而有些數學問題只可能在經長時間的孜孜不倦地冥思苦索， 並引進新概念後才能得到解決。 蘇聯著名拓樸學家亞歷山德羅夫就解決了很多這類問題， 這並非偶然。 亞歷山德羅夫多次說， 他年輕時幸而沒有數學奧賽， 否則就很可能使他不能成爲數學家。 亞歷山德羅夫在數學上的成就絕非智慧火花的閃爍， 而是長期深思熟慮的成果。” 柯爾莫哥洛夫認爲奧賽優勝者常會停留在對類似於奧賽的問題作精細加工， 而並未達到解決那些須要冗長的推理和研究的數學問題的水準。 爲了補救這個不足， 他及其他教授們就給優勝者舉辦暑期學校， 給他們講課 (如有限域與布爾代數、 集合論、 群論、 力學、 數論等)， 並在莫斯科大學附近設數理學校， 讓學生做大量習題， 解決實際問題， 還伴以音樂、 文學、 體育等活動。

他具有發現重要數學概念的能力， 亞歷山德羅夫詼諧地說過， 數學天才有敏捷型與遲緩型兩種， 柯爾莫哥洛夫屬於前者， 而希爾伯特屬於後者。 然而柯爾莫哥洛夫的思想還不如他自己的洞察力與掌握問題的能力更敏捷， 一些模糊而粗線條的 “輪廓” 常引起他的注意， 並且立即被他納進他的有次序而完備的系統中去， 以求得到最終的解決。 他對經典力學、 遍歷論、 函數的迭合等基本問題的模糊思想在三十年代中期就已開始醞釀， 直到五十年代中期才達到最終的確切形式。

柯爾莫哥洛夫把創造性才能分爲演算性的、 幾何性的與邏輯性的。 他非常關於與學生們交往， 並把他們自己未意識到的能力發揮出來。

他喜愛旅行、 滑雪、 俄國詩與美術， 尤其熱愛油畫與建築。

他與亞歷山德羅夫的交往是互補的， 後者是音樂 、 戲劇的鑒賞家。 柯爾莫哥洛夫從不誇談自己的成就 、 頭銜與地位， 並不看重金錢與物質條件， 他把巴爾桑獎的獎金捐給了學校圖書館， 而沃爾夫獎金他未曾去領取。 柯爾莫哥洛夫爲科學事業無私地貢獻了他的光輝的一生。

文　　獻

原始文獻

[1] А. Н. Колмогоров, Математика и механика, Наука, Москва, 1985 (選集第一卷)。

[2] А. Н. Колмогоров, Теория вероясности и математическая статистика, Наука, Москва, 1986 (選集第二卷)。

[3] А. Н. Колмогоров, Теория информатия и теория алгоризма, Наука, Москва, 1987 (選集第三卷)。

[4] A. N. Kolmogorov, V.A. Uspenskii, *Algorithms and randomness*, Theory Probab. Appl., 32(1987), 389－412。

研究文獻

[5] P.S. Aleksandrov, *A few words about A.N. Kolmogorov*, Russian Mathematical Surveys, 38(1983), 7－9。

[6] N.N. Bogolyubov, V.V. Gnedenko, S.L. Sobolev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (On the occasion of his eightieth birthday)*, Russian Math. Surveys., 38(1983), 9－27。

[7] I.M. Gelfand, S. M. Nikol'skii, S.L. Sobolov et al, *A life in the name of science*, Teacher's News, No. 141, 1987。

[8] D. Kendall, G.K. Bathelor, K. Moffat, *Obituary*：*Dr. Andrei Kolmogorov, Giant of mathematics*, The London Time, October, 1987。

[9] S.P. Novikov, *Memories of A.N. Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6. 41－42。

[10] V.I. Arnol'd, *A few words on Andrei Nikolaevoch Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 43－44。

[11] V.M. Tikhomirov, *The life and work of Andrei Nikolaevich Kolmogorov*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 1－39。

[12] R.L. Dobrushin, Yu.M. Sukhov, J. Fritz, *A.N. Kolmogorov–the founder of the theory of reversible Markov processes*, Russian Math. Surveys, 43(1988), 6, 157－182。

[13] V.M. Tikhomirov, *A.N. Kolmogorov and approximation theory*, Russian Math. Surveys, 44(1989), 1, 101－152。

[14] J.L. Doob, *Kolmogorov's early work on Convergence theory and foundations*, Annals of Probability, 17(1989), 815－821。

[15] E.B. Dynkin, *Kolmogorov and the theory of Markov processes*, Annals of Probab., 17(1989), 822－832。

[16] Ya.G. Sinai, *Kolmogorov's work on ergodic theory*, Annals of Probab., 17(1989), 833－839。

[17] Thomas M. Cover, Peter Gacs, Robert M. Gray, *Kolmogorov's contribution to information theory and algorithmic complexity*, Annals of Probab., 17(1989), 840－865。

[18] A.N. Shiryaev, *Kolmogorov–Life and creative activities*, Annals of Probab., 17(1989), 866－944。

[19] A.N. Shiryaev, *Publications of A.N. Kolmogorov*, Annals of Probab., 17(1989), 945－964。

[20] A.N. Shiryaev, *Andrei Nikolaevich Kolmogorov (in memoriam)*, Theory of probability and its applications, 34(1989), 1－99。