惠　特　尼

惠特尼， H. (Whitney， Hassler) 1907 年 3 月 23 日生於美國紐約； 1989 年 5 月 10 日卒於普林斯頓。 數學、 數學教育。

惠特尼之圖像請參閱 The MacTutor History of Mathematics archive 網站

`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Whitney.html`

惠　特　尼

胡 作 玄

(中國科學院系統科學研究所)

惠特尼， H. (Whitney， Hassler) 1907 年 3 月 23 日生於美國紐約； 1989 年 5 月 10 日卒於普林斯頓。 數學、 數學教育。

惠特尼的祖父是語言學家， 外祖父是著名天文學 S. 紐康門 (Newcomb， 1897 − 1898 年曾任美國數學會主席)， 父親是位法官。 他少時喜歡製作機械玩具， 並沒有數學上的偏愛。 據他自己講， 唯一與數學家生涯有關的是在九歲時思考能被 9 整除的數的公式， 認爲與 10 有關， 而且據此推出被 11 整除的數的公式。 小學、 中學期間只學一點點數學， 1921 − 1923 年他到瑞士上學， 他學一年法文、 一年德文之外就學爬山。 1924 年上耶魯大學學習物理， 其間也沒聽過數學， 所用的微積分是他自修的， 學完也就忘了。 1928 年取得物理學的學士學位後， 又繼續專攻音樂， 會彈奏鋼琴， 演奏小提琴、 中提琴、 雙簧管等樂器， 曾擔任普林斯頓交響樂團首席小提琴手。 還愛好爬山， 《全集》中有他十四歲時站在險峻的瑞士阿爾卑斯山峰頂端的照片。 大學畢業後， 由於對四色問題感興趣， 去哈佛大學考 C.D. 伯克霍夫 (Birkhoff) 的博士研究生。 但第一次考沒有通過， 這使伯克霍夫極爲惱火。 不過伯克霍夫還是收留了這位後來決不遜於自己的學生， 而且在自己不專攻的領域指導他。 不久， 惠特尼的論文就一篇接一篇地出來了， 在他 1932 年拿到博士學位時， 他寫了近十篇論文， 完全是論的。 博士論文的題目是 “圖的著色”(*The coloring of graphs*)， 其中定義及計算 “色數”。 由於他工作出色， 1931 − 1933 年任美國國家研究委員會研究員， 1933 年在哈佛大學數學系任講師， 1946 年

升爲教授。 這時， 他的方向也從圖論改爲拓樸， 1935 年 9 月參加在蘇聯莫斯科舉行的國際拓樸學大會。 而這次大會成爲拓樸學史的里程碑， 用他最後一篇論文的題目來說是 “莫斯科 1935： 拓樸學移向美國” (*Moscow* 1935： *Topology moving toward America*)。 文中寫道， 會上 H. 霍普夫 (Hopf) 成爲他最喜歡的拓樸學家， 當時所有大人物都去了， 拓樸學的面貌正在改變： 四個人不約而同地引進上同調， 同倫論也正式出現， 在向量場問題上的應用導致纖維叢概念的產生， 而這種大改變與惠特尼的工作密不可分， 也決定了惠特尼後來十年的工作方向。

第二次世界大戰期間， 他參與戰時研究工作， 1943 − 1945 年在科學研究發展局國防研究委員會應用數學組作研究。 戰後， 他在美國數學會作 1946 年度大會講演， 題目是 “光滑流形的拓樸學”， 1948 − 1950 年任美國數學會副主席， 1944 − 1949 年任《美國數學雜誌》(*American Journal of Mathematics*) 的編輯， 1949 − 1954 年任《數學評論》(*Mathematical Reviews*) 的編輯。 1950 年他任在哈佛召開的國際數學家大會程序委員會委員， 在大會上作 “n 維空間中的 r 維積分” 的報告。

1952 年他被任命爲普林斯頓高級研究院教授， 1977 年退休。 這個時期他曾任美國國家科學基金會數學組第一任主席， 1966 − 1967 年任國家研究委員會支持數學科學研究委員會委員。

1967 年起， 他的興趣便完全轉向數學教育， 特別是中小學教育。 他親自深入課堂， 了解學生的思想及感覺， 發現數學教學中許多問題。 他指出小孩的直覺方式與數學家的方式十分接近。 當時的學校教學目標狹窄， 語言貧乏， 學生碰到問題只會代公式， 沒有學會思考。 教學是灌輸莫名其妙的概念以及應付標準化的考試， 學生只能被動接受。 爲此他制訂了教師進修計劃， 寫了教師指導教材。 他是美國、 英國、 比利時、 巴西等國的數學教學的顧問。 1979 − 1982 年任國際數學教育委員會中心主席。

由於他的非凡貢獻，他獲得很多榮譽。1945 年他被選爲美國科學院院士，1976 年被授予美國國家科學獎章，1982 年獲沃爾夫 (Wolf) 獎，1985 年以其一生成就獲美國數學會斯蒂爾 (Steele) 獎。

惠特尼一生發表近八十篇論文，三種專著，即《幾何積分論》(*Geometric integration theory*，1957)、《複解析簇》(*Complex analytic varieties*，1972) 以及《數學活動》(*Math activities*，1974)。他是一系列新概念、新理論的開創者，其中最主要是擬陣、上同調、纖維叢、示性類、分類空間、分層等。

1. 圖論

惠特尼一生對四色問題感興趣，他最早和最後的數學論文都是關於四色問題的。他給出四色問題的等價命題並研究可約性問題。從四色問題出發他研究一般圖論，特別是得出兩圖同胚的條件：如 G 和 G' 是兩連通圖，均不含三個形如 ab、ac、ad 的弧。若存在任意具有公共頂點的兩弧到另一圖的具有公共頂點的兩弧之間的一一對應，則兩圖同胚。他定義圖的連通度，並給出 n 重連通的充分必要條件 (所謂 n 重連通是指至少 $n+1$ 個頂點的圖不可能因去掉 $n-1$ 個或更少的頂點以及連接它們的弧而使所得的圖不連通。如果圖 G n 重連通但不 $n+1$ 重連通，則稱連通度爲 n)。他還定義圖 G 的對偶 G'，證明圖 G 可嵌入平面的充分必要條件是 G 具有對偶圖 G'，從而給著名的 K. 庫拉托夫斯基 (Kuratowski) 不可嵌入平面圖的定理一個直接的組合證明。

他的博士論文是關於圖的著色問題，其中證明 $M(\lambda)$ 的公式並進行計算，這裡 $M(\lambda)$ 是用 λ 種顏色給一圖不同著色方法數，他引進一組數 m_{ij}，它們不僅可用來計算 $M(\lambda)$，還可定義圖 G 的拓樸不變量：

$$P_i = \sum_j (-1)^{i+j} m_{R-j,N-i}$$

其中 R 爲圖 G 的秩、 N 爲 G 的零度。 他利用這些不變量研究圖的分類問題。

惠特尼在組合論方面的最大成就是他引進擬陣 (matroid) 理論， 這是一種抽象的線性相關性理論， 它不僅包含圖論爲其特例， 而且還包括網絡理論、 綜合幾何以及橫截 (transversal) 理論等。 他的出發點很簡單， 考慮矩陣 M 的列 C_1、 C_2、 $\cdots$、 C_n， 這些列的子集或者線性獨立或者線性相關， 從而所有子集可劃分爲兩類， 這些類並非任意， 它必須滿足下面兩個條件：

(1) 一個獨立集的任何子集也是獨立的；

(2) 如果 N_p 及 N_{p+1} 分別是 p 個列及 $p+1$ 個列的獨立集， 則 N_p 加上 N_{p+1} 中的某個列構成一個獨立的 $p+1$ 集。

他把滿足這兩個條件的系統稱爲擬陣， 並把許多圖的性質推廣到擬陣上。

2. 可微映射和奇點理論

(1) *可微函數的解析延拓* 惠特尼對拓樸學的主要貢獻是建立微分拓樸學， 爲此， 必須將拓樸學考慮的連續映射推廣到可微情形。 惠特尼在他早期工作中 (1932 − 1942) 就爲此奠定基礎。

1925 年蘇聯數學家 П. С. 烏雷松 (Улысон) 證明， 如 A 是 n 維歐氏空間 E 中的閉集 (有界或無界)， $f(x)$ 爲 A 中定義的連續函數， 則 f 可延拓成爲整個 E 上的連續函數 F。 惠特尼在 1932 年證明， 存在 F 不僅連續， 而且在 $E-A$ 上可微， 甚至解析； 如果 $f(x)$ 在 A 中屬於 C^m， 則在 A 中 F 與 f 相等， 且 F 的到 m 階的各階導數與 f 的各階導數對應相等。 其後他又考慮 A 爲任意子集合的情形。 此時在包含 A 的開集上可微階降 1。 他還研究泰勒展開的餘項的可微性問題， 這些對研究奇點理論很重要。

(2) *奇點理論* 奇點理論是惠特尼最重要的創造之一， 它來源於微分嵌入及浸入問題。 奇點是臨界點的推廣。 1942 年他首先研

究 n 維歐幾里得空間 E^n 到 E^{2n-1} 的微分映射 f 的奇點， 發現使 f 微小變化， 可得 f^*， 它的奇點是孤立奇點， 並可化爲標準型：

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2\text{，} \\ y_i &= x_i \quad (i = 2\text{、}\cdots\text{、}n)\text{，} \\ y_{n+i-1} &= x_1x_i \quad (i = 2\text{、}\cdots\text{、}n)\text{。} \end{aligned}$$

1955 年， 他首先對於平面 E^2 到 E 的奇點類型進行分類； 結果只有兩類， 一類是折點 (fold)， 其標準型爲

$$\begin{cases} u = x^2\text{，} \\ v = y\text{。} \end{cases}$$

另一種是尖點 (cusp)， 其標準型爲

$$\begin{cases} u = xy - x^3\text{，} \\ v = y\text{。} \end{cases}$$

通過這篇論文， 開創了奇點理論。 1956 年他又對 $E^n \to E^m$ 的微分映射奇點的一些情形進行分類並得出標準型， 其中包括 $n \geq m = 2$、3 以及 $(n, m) = (4, 4)$、$(5, 5)$、$(5, 4)$、$(n, 2n-2)$ 等情形。 而對於其它的 $E^n \to E^m$， 其中 $n = 3$、4， $m = 4$、$\cdots$、$2n-3$， 在當時所知甚少。 這個基本的奇點分類問題連同其它問題形成了奇點理論的熱門。 同年 R. 托姆 (Thom) 運用自己的横截理論以及普遍開折理論首先取得突破， 這項研究成爲後來他的突變理論的基礎。 其後 1968 – 1971 年 J. 麥澤 (Mather) 建立穩定性理論及決定性理論， 1967 年起以蘇聯數學家 B. И. 阿諾爾德 (Арнольв) 爲首的蘇聯學派在理論及應用方面取得輝煌的成就。

1948 年他還發表了 “論可微函數的理想” (*On ideals of differentiable functions*)， 這開闢了奇點理論另一個新方向。 後來 B. 馬格朗日 (Malgrange) 等對這方面有很大突破， 包括證明 “預備定理”。

(3) 分層理論　分層理論是惠特尼最後創造的理論，從某種意義上說，也是奇點理論的自然延續。通常研究的歐氏空間及流形均有很好的齊性結構 (局部具有相同的結構)，但這點即使對代數簇也不滿足，特別是由解析幾何延續下來的實代數簇一般存在奇點。從 1957 年到 1965 年惠特尼研究實代數簇的拓樸學，並討論把簇分解爲流形，1957 年引進惠特尼層化的概念，並且對代數簇及解析簇進行層化分解，這概念後來被托姆發展成分層集理論，在奇點的局部及大範圍研究中起重要作用。1965 年 S. 武雅謝維茨 (Lojasiewicz) 證明任何半解析集均有惠特尼分層。1965 年惠特尼對解析簇定義了切向量、切平面簇及切錐的概念，並考慮剖分時切集的協調問題。

3. 微分流形的拓樸學

雖然龐加萊甚至黎曼已研究微分流形的拓樸學，但是由於工具不足，眞正創立微分流形的拓樸學以及微分拓樸學的是惠特尼，他在 1936 年的論文 “微分流形” (*Differentiable manifolds*) 中，奠定了微分流形理論基礎。他給出微分流形的內蘊定義，定義其上的 C^r 結構 $(1 \leq r \leq \infty)$，他證明所有 C^r 流形的 C^r 結構都包含 C^∞ 坐標系，且其 C^∞ 結構唯一確定。這個 C^∞ 結構稱爲該流形的可微結構或微分結構或光滑結構，相應的流形稱爲可微流形或微分流形或光滑流形，微分流形與拓樸流形有本質的差別，即一個拓樸流形上可以不容許任何微分結構也可以容許多個微分結構，但是任何微分結構都容許實解析結構，而且還容許黎曼度量，這些也是惠特尼證明的。在這篇論文中，他證明了一些最基本的定理，特別是嵌入及浸入定理：任何 n 維微分流形均可微分嵌入在 R^{2n+1} ($2n+1$ 維歐氏空間) 中，均可微分浸入在 R^{2n} 中。1944 年他又改進爲 n 維微分流形可嵌入於 R^{2n} 中，可浸入於 R^{2n-1} 中。對於某些流形，這些結果已臻至善。這個工作開拓了

微分流形的一個重要領域，其後，吳文俊等許多拓樸學家做出了貢獻。

4. 纖維叢及示性類

惠特尼在 1935 年首次定義眞正的“纖維空間”，當時他稱爲“球空間”，1940 年他改稱爲“球叢”，在 1937 年及 1941 年他對此作兩個報告，包括許多根本的結果，他還打算對此寫一本書，始終沒有完成。他的興趣一直集中於“示性類” (Characteristic class) 上。他於 1936 年和瑞士數學家 E. 施蒂費爾 (Stiefel) 在 1935 年獨立地定義這種示性類，後來稱爲施蒂費爾－惠特尼示性類。他的目的是用示性類來研究微分流形的拓樸學。對此，纖維叢只是一個工具，所以他的定義並非每一細節都講得很清楚，但是他的定義是很一般的。1940－1950 年間，纖維叢成爲研究許多拓樸問題 (特別是同倫、同調及微分幾何問題) 的主要工具。1949/1950 年度的嘉當討論班以纖維叢爲專題進行系統討論，1951 年 N.E. 斯廷洛德 (Steenrod) 的專著《纖維叢的拓樸學》(*Topology of fiber bundles*) 的出版，標誌著纖維叢理論的成熟，其中惠特尼做出突出貢獻。

(1) 分類問題　從一開始，惠特尼就主要研究纖維叢的分類問題，1937 年他對球叢得出分類空間，即格拉斯曼流形 $G_{n,r}$，並斷言底空間爲 B、秩爲 r 的球叢同構類爲 $[B, G_{n,r}]$，即 B 到 $G_{n,r}$ 映射的同倫類 $(n \gg r)$，他給出證明概要，1943 年斯廷洛德完成了證明，後稱惠特尼－斯廷洛德定理。

惠特尼還知道以 B 爲底空間的球叢的叢空間只依賴於 B 的同倫型。這事實於 1939 年爲 J. 費爾德波 (Feldbau) 所證明，另一方面，惠特尼早在 1935 年，對纖維叢 ξ 及連續映射 $g: B' \to B$ 構造新纖維叢 $g^*(\xi)$ 並稱爲 g 的拉回 (pull-back)，在研究纖維叢的分類中至關重要。1959 年在和 A. 道爾德 (Dold) 合作的論文 (文獻 [1] 中 [69])，對四維複形上的定向球叢進行分類。

(2) 示性類　施蒂費爾只考慮微分流形的切叢的示性類，而惠特尼考慮的要廣得多，他考慮任意球叢 (E, B, P) 的底空間 B 也可以是任意局部有限的單純複合形。他把示性類定義爲施蒂費爾流形 $S_{n,m}$ 的整係數同調類。他指出，$S_{n,m}$ 的同調群

$$H_{n-m}(S_{n,m}) \cong \begin{cases} Z & m = 1 \text{或} n - m \text{偶，} \\ Z_2 & m \neq 1 \text{且} n - m \text{奇。} \end{cases}$$

1937 年，他改用上同調定義示性類。1940 年他指出，對於連續映射

$$g：B' \to B，$$

如果 $E' = g^*(E)$ 爲 E 的拉回，則

$$W_r(E') = g^*(W_r(E))。$$

同時他給出惠特尼的和公式：定義同一底空間上兩球叢 E'、E'' 的惠特尼和 $E' \oplus E''$，並指出其示性類 $W_r(E' \oplus E'')$ 滿足公式

$$W_r(E' \oplus E'') = \sum_i W_i(E') \cup W_{r-i}(E'')，$$

其中 $\cup$ 表上積，他指出當 $r \geq 4$，證明“極難”，1941 年他只給出 E 及 E' 都是線叢的證明。公開發表的第一個證明是吳文俊在 1948 年給出的。他還用向量叢取代球叢，同年陳省身也發表另一個證明。

惠特尼還給出示性類的形式冪級數以及偶示性類的概念。至此，施蒂費爾 − 惠特尼示性類的理論基礎正式建立。其後，J. 米爾諾 (Milnor) 以惠特尼提出的四個定理爲公理開展示性類理論，而且其它的示性類特別是 Л. С. 龐特里亞金 (Понтрягин) 示性類及陳省身示性類也是依據施蒂費爾 − 惠特尼示性類的模式定義及研究的。

(3) 示性類的應用　示性類在拓樸學及幾何學中起著極爲重要的作用，惠特尼本人主要應用示性類來研究浸入問題。例如，他

證明八維實射影空間 $P_8(R)$ 不能浸入到 R^{14} 中，但能浸入在 R^{15} 中，他的理論後來爲吳文俊等所發展。

5. 代數拓樸學

1935 年是代數拓樸學的轉折點，其主要標誌是上同調理論與同倫理論的建立。在龐加萊引入同調概念四十年後，有四位數學家幾乎同時獨立地引入上同調概念，他們分別是 J.W. 亞歷山大 (Alexander)、惠特尼、E. 切赫 (Čech)、A. H. 柯爾莫哥洛夫 (Колмогоров)。當其他三位在 1935 年莫斯科會議宣佈結果時，惠特尼的結果已經發表，上同調類由於有上積，從而有環結構，比同調包含更多的拓樸信息。

同倫論中，1937 年惠特尼用上同調來表述霍普夫－胡爾維茨 (Hurewicz) 判據，如果 X 是 n 維局部有限胞腔複形，Y 是 n 維 $(n-1)$ 連通空間，則 f，g：$X \to Y$ 同倫當且僅當

$$H^n(Y；Z) \to H^n(X；Z)。$$

由此推出

$$[X, x_0；Y, y_0] \to H^n(X；\pi_n(Y))$$

是一一對應。對於不同維的映射，這些條件不一定成立，惠特尼在 1936 年給出過二維複形到二維或三維射影空間的映射同倫的代數條件，但未發表。1941 年，H.E. 羅賓斯 (Robbins) 推廣到 2 維複形到任何空間的映射的同倫分類，後來 P. 奧蘭姆 (Olum) 又大規模地予以簡化及推廣。對三維複形，龐特里亞金在 1941 年考慮它到 S^2 的映射同倫分類，其中首先應用新出現的上積。其實惠特尼早在 1936 年已得出相應結果。1948 年，他研究單連通空間 R 的第二及第三同倫群的關係，並據此給出三維複形 k 到 R 中兩個連續映射同倫的充分必要條件以及映射擴張的阻礙類。還應該指出，1938 年惠特尼引進阿貝爾群的張量積概念，這對代數拓樸學及同調代數是必不可少的工具。

6. 圖論

1946 – 1957 年間，惠特尼建立幾何積分論。它是更一般的積分理論，例如 n 維空間中的 r 維積分。借此，他給上鏈、上閉鏈等一個解析的解釋，例如幾何上鏈是處於 “一般位置” 的奇異鏈上的函數。這樣，他把 E. 嘉當 (Cartan) 及 G. 德拉姆 (de Rham) 的外微分形式理論中的可微條件換成李普希茨 (Lipschitz) 條件得出的積分理論等價於代數上同調理論，對於更一般的李普希茨空間也成立，它包括多面體及絕對鄰域收縮核爲其特例，特別是把斯托克斯 (Stokes) 定理推廣到李普希茨空間上，他的理論總結在《幾何積分論》(1957) 一書中。

文　　獻

原始文獻

[1] *Hassler Whitney collected papers*, J. Eelles, D. Toledo(eds), Vol. I, II, Birkhäuser, Boston, 1992。

[2] H. Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1957。

[3] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, Reading MA., 1972。

[4] H. Whitney, *Math activities*, multi-lithed, Institute for Adv. Study, 1974。

研究文獻

[5] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology*, 1900 – 1960, Birkhäuser, Boston, 1989。