華　羅　庚

華羅庚，1910 年 11 月 12 日生於江蘇金壇；1985 年 6 月 12 日卒於日本東京。數論、代數與幾何、複分析。

華羅庚之圖像請參閱國立清華大學數位校史館網頁

http://archives.lib.nthu.edu.tw/history/about/3-02/3-02-12.htm

華 羅 庚

王 元

(中國科學院數學研究所)

華羅庚， 1910 年 11 月 12 日生於江蘇金壇； 1985 年 6 月 12 日卒於日本東京。 數論、 代數與幾何、 複分析。

華羅庚出生在江蘇省金壇縣。 他的父親華瑞棟經營一個家庭式的小雜貨店。 當他初中畢業時， 由於家貧未能進入高中繼續學習。 經過努力， 華羅庚考取了上海中華職業學校商科 (二年制)。 仍因家貧， 華羅庚僅差一學期未能畢業， 棄學回家幫助其父經營小店。 他只能利用業餘時間自修數學。

這時華羅庚已對數學產生了強烈的興趣， 而不能全力從事小店的工作。 他的父親對此很反感， 多次要撕掉他的 “天書”。 1928 年， 華羅庚就職於金壇初中。 1927 年， 他與金壇吳筱元女士結婚， 一年後他們有了一個女兒。 至 1951 年， 他們又依次有了三個兒子及兩個女兒。 1928 年， 華羅庚染上了流行瘟疫 (可能是傷寒)， 臥床半年， 後病雖痊癒， 但左腿卻殘廢了。

華羅庚的數學才能顯示得很早。 他的第一篇論文發表在上海《科學》雜誌上 (1929)。 他的第二篇文章 “蘇家駒之代數的五次方程解法不能成立的理由” 發表在 1930 年《科學》上。 這篇文章引起了當時清華大學數學系主任熊慶來的注意， 但熊慶來並不知道華羅庚其人。 後來熊慶來從系裡一個金壇籍教員唐培經那裡了解到華羅庚僅為一個初中畢業生， 現任金壇初中會計。 熊慶來深受感動並邀華羅庚到清華大學工作。 華羅庚於 1931 年到清華大學任數學系助理。 兩年後， 他被破格提拔為助教， 又晉升為教員。 1934 年， 又任 “中華文化教育基金會董事會” 乙種研究員。 在清華大學時， 華羅庚的同事中有以後成名的數學家陳省身、 許寶騄與柯

召。 他的最早研究領域爲數論中的華林問題。 他的工作曾得到清華大學數學系教授楊武之的指點與幫助。

1936 年， 經 N. 維納 (Wiener) 推薦， G.H. 哈代 (Hardy) 邀請華羅庚去英國劍橋大學訪問。 華羅庚到達英國時，哈代正在美國。 華羅庚很快掌握了英語並與一些在英國的年輕數學家如 H. 亥爾布朗 (Heilbronn)、 H. 達文波特 (Davenport)、 T. 埃斯特曼 (Estermann)、 R.A. 藍金 (Rankin) 與 E.C. 蒂奇馬什 (Titchmarsh) 等人結爲好友， 從他們那裡得到不少幫助。 華羅庚在劍橋期間至少發表了十五篇論文。

1937 年抗日戰爭爆發， 清華大學與北京大學、 南開大學遷至雲南昆明， 組成西南聯合大學。 華羅庚由劍橋回到昆明， 1938 年到 1945 年， 他執教於西南聯大。 這時， 華羅庚的研究興趣拓廣到矩陣幾何學、 自守函數論、 多複變函數論與群論。 他與其他數學家一起倡導並主持了各種討論班， 參加過他的討論班而以後成名的數學家有段學復、 閔嗣鶴、 樊\機與徐賢修等人。

1946 年 2 月到 5 月， 華羅庚應蘇聯科學院與蘇聯對外文化協會邀請， 對蘇聯作了廣泛的訪問。 他會見了 И. M. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 與 Ю. В. 林尼克 (Линник)。

1948 年， 華羅庚當選爲中央研究院院士。 1947 年至 1948 年， 華羅庚任普林斯頓高級研究院訪問研究員， 又在普林斯頓大學教授數論課。 1948 年至 1950 年， 華羅庚應依利諾伊大學之聘， 任正教授。 在依利諾伊期間， 他指導的幾個學生以後均成爲職業數學家 (R. 埃尤伯 (Ayoub)， J. 密席爾 (Mitchell) 與 L. 舍恩費爾德 (Schoenfeld))。 這期間， 除數論外， 華羅庚還涉足有限域上的方程論、 典型群與域論等領域。

1950 年， 華羅庚與他的妻子兒女一起回國， 參加建立中國科學院數學研究所的籌備工作， 1952 年被任命爲所長， 從此他即全力投身於建設研究所的工作。 按照華羅庚的意見， 研究所包

括純粹數學、應用數學與計算機技術的一些分科。他還對培養青年數學家工作給予特別重視。在青年數學家中，數論方面有陳景潤、潘承洞與王元，代數方面有萬哲先，複分析方面有龔昇與陸啓鏗。爲了他們及中國年輕數學家普遍受益，華羅庚寫了一系列書：《堆壘素數論》(中文版，1957)、《數論導引》(1957)、《多複變數函數論中的典型域的調和分析》(1958)、《指數和的估計及其在數論中的應用》(中文版，1963)、《高等數學引論》(1963) 與《典型群》(1963，與萬哲先合著)。1955 年，華羅庚當選爲中國科學院學部委員。

1966 年，發生了 “文化大革命”。華羅庚的家被 “紅衛兵” 抄過好幾次，手稿散失殆盡，至今沒有下落，他也遭到批判鬥爭，對他來說，這種情況至 1967 年才有明顯的好轉。這是由於他受到毛澤東主席與周恩來總理的特別保護，可以安靜地呆在家裡，甚至可以到工業部門去普及數學方法。

1958 年，華羅庚被任命爲中國科學技術大學副校長。他開始從事應用數學的研究工作，特別將數論用於高維數值積分法，他還到工廠和工業部門普及 “優選法” (斐波那契 (Fibonacci) 方法) 與 “統籌法”(CPM 與 PERT)。近二十年中，他與助手陳德泉、計雷走遍了二十多個省市自治區，向工人宣講並教會他們如何將這兩種方法用於他們自己的工作中去。從而，工廠的產量增加了，產品的質量也提高了。

從 1979 年開始，中國執行開放政策。華羅庚在他的學生的協助下，完成了專著《從單位圓談起》(1977) 及《數論在近似分析中的應用》(1978，與王元合著)。由 H. 哈貝斯坦 (Halberstam) 主編的《華羅庚論文選集》也在 1983 年由施普林格出版社出版。華羅庚在 1978 年被任命爲中國科學院副院長。1980 年被任命爲應用數學研究所所長。此外，他從 1950 年至 1983 年均被選舉爲中國數學會理事長。

華羅庚作爲訪問學者，多次訪問歐洲、美國與日本。儘管年邁體弱，他仍堅持數學研究及其應用工作。1985 年 6 月 12 日，他在日本東京大學作學術報告，當講完最後一句話時，由於心臟病突然發作而去世。

自從中國執行開放政策以來，華羅庚一共得到法國南錫大學 (1980)、香港中文大學 (1983) 與美國依利諾伊大學 (1984) 的榮譽博士學位。他還被選爲美國科學院 (1982)、第三世界科學院 (1983) 與德國巴伐利亞科學院 (1985) 院士。

華羅庚積極參加社會政治活動，熱愛祖國。1949 年以前，他同情並投身於爭取民主與自由的運動。建國後，擔任第一至第六屆全國人大常委會委員，第六屆全國政協副主席，他還是中國民主同盟副主席。

華羅庚的主要數學工作如下所述。

1. 數論

(1). 三角和估計　命 q 爲一個正整數及 $f(x)$ 爲一個整係數多項式

$$f(x) = a_k x^k + \cdots\cdots + a_1 x \text{，}$$

此處 $(a_k, \cdots, a_1, q) = 1$。考慮完整三角和

$$S(q, f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e(\frac{f(x)}{q}) \text{，} \ e(x) = e^{2\pi i x} \text{。}$$

若 $f(x) = x^2$，則 $S(q, x^2)$ 就是熟知的高斯和。C.F. 高斯 (Gauss) 證明了

$$|S(q, x^2)| = q^{\frac{1}{2}} \text{。}$$

關於 $S(q, f(x))$ 的估計是一個有悠久歷史的難題。在 1940 年華羅庚完全解決這個問題之前，僅對一些特殊多項式有些結果。華羅

庚用非常優美的方法證明了

$$|S(q, f(x))| = O(q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}) \text{，} \tag{1}$$

此處 ε 爲給定的正數有與 “O” 有關的常數僅依賴於 k 與 ε。 1938 年， 華羅庚曾得到式 (1)， 但與 “O” 有關的常數依賴於 $f(x)$ 的係數 a_i $(1 \leq i \leq k)$。 易見除一個可能改進的因子 q^ε 之外， 估計式 (1) 是最佳可能的 (例如 $|S(p^k, x^\varepsilon)| = p^{k(1-\frac{1}{k})}$， 其中 p 表示質數及 $p \not| k$)。

以後， 華羅庚又將 (1) 式推廣至任意次數爲 n 的代數數域 K。

關於不完整三角和， 華羅庚證明了

$$\sum_{k=1}^{p} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) = \frac{p}{q}\sum_{x=1}^{q} e\left(\frac{hx^k}{q}\right) + O(q^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \text{。} \tag{2}$$

這個結果對華林問題有重要應用。

華羅庚改進並簡化了維諾格拉多夫關於外爾和估計的方法， 他指出維諾格拉多夫方法的核心是下面的平均值定理： 命

$$f(x) = \alpha_k x^k + \cdots + \alpha_1 x$$

及

$$C_k = C_k(P) = \sum_{x=a+1}^{a+P} e(f(x)) \text{。}$$

命

$$t_1 = t_1(k) \geq \frac{1}{4}k(k+1) + lk \text{，}$$

則

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |C_k|^{2t_1} d\alpha_1 \cdots d\alpha_k \leq (7t_1)^{4t_1 l} P^{2t_1 - \frac{k(k+1)}{2}+\delta} (\log P)^{2l} \text{，}$$

此處

$$\delta = \delta(k) = \frac{1}{2}k\,(k+1)\left(1 - \frac{1}{k}\right)^l \text{。}$$

由此立即推出下面的定理：

假定 $k \geq 12$、$2 \leq r \leq k$ 及

$$\left|\alpha_r - \frac{h}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}、(h,\, q) = 1、1 \leq q \leq P^r，$$

則對於 $P \leq q \leq P^{r-1}$，我們有

$$S = \sum_{x=1}^{p} e(f(x)) \ll P^{1-\frac{1}{\sigma_k}+\varepsilon}，$$

此處 $\sigma_k = 2k^2(2\log k + \log\log k + 3)$。

在所有著名的解析數論專著中，幾乎都是按照華羅庚的辦法來敘述維諾格拉多夫方法的 (例如 R.C. 沃恩 (Vaughan) 著《哈代－李特爾伍德方法》(*The Hardy-Littlewood method*，Camb. Tracts，80，1981))。

關於特徵和，華羅庚在 1942 年證明了估計式

$$\frac{1}{A+1}\left|\sum_{a=1}^{A}\sum_{n=-a}^{a} x(n)\right| \leq \sqrt{p} - \frac{AH}{\sqrt{p}}，1 \leq A < p$$

對於模 p 的所有非主特徵均成立。這使得他改進了模 p 的最小原根估計及佩爾方程最小解估計。

(2) 華林問題及其有關問題　1770 年，華林猜想對於每個整數 $k \geq 2$，皆存在一個僅依賴於 k 的整數 $s = s(k)$，使每一個正整數均可以表爲 s 個非負整數的 k 次方冪之和。華林猜想直到 1900 年才被 D. 希爾伯特 (Hilbert) 證明。本世紀二十年代，哈代與 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 創始並發展了堆壘數論中一個非常強有力的新解析方法，即通常所稱的“圓法”，由這一方法可以得到華林問題更精緻的結果。命 $G(k)$ 表示最小整數 s，使每個充分大的整數 N 均可以表示爲

$$N = x_1^k + \cdots + x_s^k，\tag{3}$$

此處 x_i $(1 \leq i \leq s)$ 爲非負整數。哈代與李特爾伍德證明了 $G(k) \leq (k-2)2^{k-1}+5$；他們實際上證明了更強的結果：當 $s \geq (k-2)2^{k-1}+5$ 時，(3) 式的解數 $r_{s,k}(N)$ 有一個漸近表達式

$$r_{s,k}(N) = \mathcal{S}(N)\frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})}N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1))\text{，} \tag{4}$$

此處 $\mathcal{S}(N)$ 稱爲奇異級數，它有一個與 N 無關的正下界。華羅庚在 1938 年將哈代與李特爾伍德的結果改進爲

$$G(k) \leq 2^k+1\text{，}$$

而且他證明了當 $s \geq 2^k+1$ 時，$r_{s,k}(N)$ 的漸近公式即成立。關於這項工作，他用到被後人所稱的華氏不等式

$$\int_0^1 \left|\sum_{x=1}^{p} e(\alpha x^k)\right|^{2k} d\alpha \ll P^{2k-k+\varepsilon}\text{。} \tag{5}$$

值得指出的是對於小的 k，使 (4) 式成立的條件 $s \geq 2^k+1$ 直到近年才分別由沃恩與 D.R. 希斯－布朗 (Heath-Brown) 改進爲 $s \geq 2^k$ $(k \geq 3)$ 及 $s \geq \frac{7}{8}2^k+1$ $(k \geq 6)$。無論如何，當 $k > 10$ 時，維諾格拉多夫對哈代與李特爾伍德關於華林問題的結果給予巨大的改進，他證明了 (4) 式當 $s \geq [10k^2 \log k]$ $(k > 10)$ 時成立。華羅庚將這個結果改進爲 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ $(k > 10)$。基於 Л. Г. 施尼雷爾曼 (Шнирельман) 關於正整數列密度的方法，林尼克於 1943 年給予希爾伯特定理一個新的 “初等” 證明。誠如達文波特指出：“這一證明的想法無疑來自哈代－李特爾伍德方法的某些特性，特別是華氏不等式。”

本世紀三十年代，很多數學家研究如何將華林問題中的 x^k 推廣爲 k 次多項式。華羅庚用其結果 (1) 克服了這個問題的主要困難。希爾伯特定理的一個非常廣的形式是屬於華羅庚的。命 $_i(x)$ $(1 \leq i \leq s)$ 是 s 個首項係數爲正的 k 次整值多項式，華羅

庚在 1937 年至 1940 年間證明了當 $s \geq 2^k + 1$ $(1 \leq k \leq 10)$ 及當 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ 時， 方程

$$N = f_1(x_1) + \cdots + f_s(x_s)$$

的解數有一個漸近公式。 注意在此關於奇異級數的正下界問題並未加以考慮。 命 $f(x)$ 爲一個整值多項式及 $G(f)$ 表示最小的整數 s 使對所有充分大的整數 N， 方程

$$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$$

皆可解。 命 $\partial^0 f$ 表示 f 的次數。 華羅庚在 1940 年證明了

$$\begin{aligned} G(f|\partial^0 f = k) &\leq (k-1)2^{k+1}, \\ G(f|\partial^0 f = 3) &\leq 8 \end{aligned}$$

與

$$\max G(f) \geq 2^k - 1,$$

此處 f 過所有 k 次整值多項式， 其中 $k \geq 5$。

圓法的要點可以敍述於下： (3) 的解數可以表示成積分

$$\begin{aligned} r_{s,k}(N) &= \textstyle\int_0^1 T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha, \\ T(\alpha) &= \textstyle\sum_{x=1}^{p} e(\alpha x^k), \end{aligned}$$

此處 $P = [N^{\frac{1}{k}}]$。 將單位區間 (0, 1] 分成諸優弧與諸劣弧， 它們的聯集分別記爲 $\mathcal{M}$ 與 m。 粗略言之， $\mathcal{M}$ 包含諸分母較小的分數 $\dfrac{k}{q}$ 爲中心的互不相交的小區間， 其餘則爲 m。哈代與李特爾伍德證明了， 當 $s \geq 2k+1$ 時， 漸近公式

$$\int_m T(\alpha)^s e(-N\alpha)d\alpha = \mathcal{S}(N)\frac{\Gamma^s(1+\frac{1}{k})}{\Gamma(\frac{s}{k})} N^{\frac{s}{k}-1}(1+o(1))$$

成立。華羅庚將這個結果改進爲 $s \geq k+1$。這是最佳可能結果， 其證明基於他的估計式 (2)。

本世紀三十至四十年代， 華羅庚系統地研究了所謂華林－哥德巴赫問題，即研究限制諸 x_i $(1 \leq i \leq s)$ 爲質數時，(3) 及

其推廣的可解性問題。 例如他證明了當 $s \geq 2^k + 1$ $(k \leq 10)$ 及 $s \geq 2k^2(\log k + \log\log k + 2.5)$ $(k > 10)$ 時， 方程

$$N = P_1^k + \cdots + P_s^k$$

的解數有一個漸近公式， 此處 P_1 表示質數。 他亦得到上述諸結果以質數爲變數的類似結果。 他的結果總結在他的名著《 堆壘素數論 》之中。

塔利問題。 命 $N(k)$ 表示最小的整數 t， 使方程組

$$x_1^k + \cdots + x_t^k = y_1^h + \cdots + y_t^h\text{，}\ 1 \leq h \leq k \tag{6}$$

有一個非尋常解， 即諸 x_i 、 y_i 爲正整數， 但 x_1 、 $\cdots$ 、 x_t 不是 y_1 、 $\cdots$ 、 y_t 的置換。 命 $M(k)$ 爲最小的整數 t 使 (6) 可解及

$$x_1^{k+1} + \cdots + x_t^{k+1} \neq y_1^{k+1} + \cdots + y_t^{k+1}\text{。}$$

顯然， 我們有

$$k + 1 \leq N(k) \leq M(k)\text{。}$$

華羅庚在 1938 年證明了

$$M(k) \leq (k+1)\left(\left[\frac{\log[\frac{(k+2)}{2}]}{\log(1+\frac{1}{k})}\right] + 1\right) \sim k^2 \log k\text{，}$$

這是對 E.M. 賴特 (Wright) 較早結果 $M(k) < 7k^2(k-11)\cdot(k+3)/216$ 的改進。 華羅庚所用的方法是初等與直接的。

華羅庚還在 1952 年指出可以用維諾格拉多夫方法來處理塔利問題。 他證明了下面的結果： 命 t_0 由下表給出

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_0	3	8	23	55	120	207	336	540	885
k	$k \geq 11$								
t_0	$[k^2(3\log k + \log\log k + 9)]$								

命 $R_{k,t}(P)$ 表示式 (6) 適合條件

$$1 \leq x_i\text{、}\ y_i \leq P\text{、}\ 1 \leq i \leq t$$

的解數，則當 $t > t_0$ 時，

$$\lim_{p\to\infty} P^{\frac{1}{2k(k+1)}-2t} R_{k,t}(P) = c(k,\, t)\text{，}$$

此處 $c(k,\, t)$ 爲一個僅依賴於 k、t 的正常數。

(3) 對數論的其它貢獻 命 $q(n)$ 爲將正整數 n 分拆成不同整數 (或奇整數) 之和的分拆個數。華羅庚在 1942 年利用哈代與拉馬努金方法及拉德馬赫爾的無窮級法裡分割法證明了：

$$q(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{k=1 \\ 2\nmid k}}^{\infty} \sum_{\substack{(h,k)=1 \\ 0<h\le k}} \omega_{h,k} e\left(-\frac{hn}{k}\right) \cdot \frac{d}{dn} J_0\left(\frac{i\pi}{k}((n+\frac{1}{24})\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}\right)\text{，}$$

此處 $J_0(x)$ 爲 $0-$ 級貝塞耳函數。

命 $A(x)$ 表示圓 $u^2+v^2 \le x$ 內的格子點 $(u,\, v)$ 的個數。高斯圓問題爲尋找最小的 θ 使關係式

$$A(x) = \pi x + O(x^{\theta+\varepsilon})$$

對於任意 $\varepsilon > 0$ 皆成立，此處與 "O" 有關的常數依賴於 ε。高斯本人證明了 $\theta = \dfrac{1}{2}$。1942 年華羅庚使蒂奇馬什方法更精密，並將他的結果由 $\theta = \dfrac{15}{46}$ 改進爲 $\theta = \dfrac{13}{40}$。而且在這篇文章中，華羅庚還指出維諾格拉多夫關於這個問題的結果的證明是有錯的。

華羅庚還研究了歐氏除法 (EA) 問題。考慮實二次域 $Q(\sqrt{d})$，此處 d 爲一個無平方因子數。華羅庚在 1944 年證明了，當 $d > e^{250}$ 時，則不存在 (EA)，他並指出 250 可以降低爲 160。

1959 年，華羅庚與王元寫了一篇數值積分的短文，他們證明了若 $\dfrac{\partial^2 f(x,\, y)}{\partial x \partial y}$ 在 $0 \le x$、$y \le 1$ 上連續，則

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,\, y)dxdy - \frac{1}{F_n} \sum_{k=1}^{F_n} f\left(\frac{k}{F_n}, \left\{\frac{F_{n-1}k}{F_n}\right\}\right)$$

$$\leq \frac{c \log 3F_n}{F_n}\ , \tag{7}$$

此處

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \quad (n = 1 、 2 、 \cdots)$$

表示斐波那契序列。除常數 c 還可能改進外,(7) 式是最佳可能的,在以後的一系列論文中,他們將自己的方法推廣到 $s-$ 維的情況,其中 $s>2$。易知 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ $(n = 1 、 2 、 \cdots)$ 爲 $(\frac{\sqrt{5}-1)}{2} = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$ 的最佳有理逼近。他們所使用的方法是在於利用分圓域 $Q(2\cos(\frac{2\pi}{m}))$ $(m \geq 5)$ 的一組獨立單位來構造域的一組基底的聯立有理逼近。他們及其他人在這個領域中的貢獻,包括 2 維至 18 維的數値信息,均包含在他們的專著《數論在近似分析中的應用》(1978) 之中。

1953 年至 1957 年,華羅庚在中國科學院數學研究所組織領導了 "哥德巴赫問題" 討論班。哥德巴赫問題是哥德巴赫致 L. 歐拉 (Euler) 的信中提出來的,即:(A) 每一個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和;(B) 每一個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。顯然 (B) 是 (A) 的推論。1937 年,對於充分大的奇數,維諾格拉多夫解決了問題 (B)。1956 年,王元首先證明每個大偶數都是一個不超過 3 個質數的乘積及一個不超過 4 個質數的乘積之和,簡記爲 (3, 4),這改進了 A.A. 布赫夕塔布 (Бухштаб) 的結果 (4, 4)。1957 年王元又將其結果改進爲 (2, 3)。1963 年潘承洞證明了 (1, 4)。最後陳景潤證明了 (1, 2),這是哥德巴赫問題 (A) 的最佳記錄。

2. 代數與幾何

(4) 體論 自從 W.R. 哈密頓 (Hamilton) 發現第一個非交換的可除代數－四元數代數以來， 可除代數甚受重視。 相比之下， 無限維可除代數， 即體， 卻被忽略的。 直到 1950 年左右， 華羅庚以極其簡單與直接的方法， 接連證明了這個領域的幾條定理。

若命 K 是一個體， 且 σ 是 K 到它自身的一個一一映射： $a \to a^\sigma$。 如果 σ 滿足

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \text{ 、 } (aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma \text{ 、 } 1^\sigma = 1$$

則稱 σ 爲半自同構。 熟知的半自同構的例子爲同構： $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$ 與反自同構： $(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$。 著名的問題爲除自同構與反自同構外， 是否還存在其它半自同構? 華羅庚在 1949 年解決了這個問題， 他證明：

每一個半自同構或爲自同構或爲反自同構。

由此可以推出特徵 $\neq 2$ 的體上的一維射影幾何的基本定理：

任何將特徵 $\neq 2$ 的體上的射影直線映射到自身的一一變換， 如果保持調和關係不變， 則必爲一個自同構或半自同構誘導的半線性變換。

過去 G. 安柯溪雅 (Ancochea) 與 I. 卡普蘭斯基 (Kaplansky) 都僅能在某些限制之下研究半自同構問題。 由於他們所用的方法基於線性代數的構造理論， 所以他們都未能完全解決問題。

1949 年， 華羅庚給出下面結果的一個直接證明：

體的每一個眞正規子體均包含在它的中心之中。

這個定理在後來的文獻中被稱爲 “嘉當 (H. Cartan)－布勞爾 (R. Brauer)－華氏定理”。 在華羅庚與布勞爾的證明出現之前， 嘉當用了體的伽羅瓦理論的複雜技術僅能對可除代數證明這一結果。 華羅庚的證明只須要一個初等恆等式： 若 $ab \neq ba$， 則

$$a = b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)(a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)^{-1})$$

1950 年， 華羅庚還證明了 “若一個體不是域， 則它的乘法群不是亞阿貝爾群”。

(5) *群論與矩陣幾何學* 早在 1946 年，華羅庚就發表了第一篇關於典型群自同構的論文。在這篇論文裡，他確定了實辛群的自同構。1948 年，他又確定了特徵 $\neq 2$ 的任意域上辛群的自同構。他用來確定辛群自同構的方法也可以用來確定其它類型典型群的自同構。鑒於 J. 迪厄多內 (Dieudonné) 於 1951 年發表了關於典型群自同構的專著，華羅庚只在迪厄多內的書後寫一篇附錄，發表了用他自己的方法解決的迪厄多內遺留下來沒有解決的若干問題。華羅庚確定了 $GL_2(K)$、$SL_4(K)$ 與 $PSL_4(K)$ 的自同構，此處 K 是特徵 $\neq 2$ 的體及 $O_4^+(K, f)$ 的自同構，此處 K 為特徵 $\neq 2$ 的域，而 f 是指數為 2 的二次型。以後華羅庚又和萬哲先確定了 $SL_2(K)$ 和 $PSL_2(K)$ (K 為特徵 $\neq 2$ 的體)。$SL_4(K)$ 與 $PSL_4(K)$ (K 為特徵 $\neq 2$ 的體) 的自同構。同時，他們還證明了某些線性群是不同構的。華羅庚在他所寫的迪厄多內專著的附錄中，論述了他的方法與迪厄多內方法的比較，他寫道：“迪厄多內方法對 n 大時頗有效，並可對個別小的 n 加以應用。恰如他以前曾指出，當 n 減小時，困難就加大了。迪厄多內方法對於較小的 n，變得很笨拙，有時不能解決最小 n 時的情況。另一方面，筆者的方法從儘可能小的 n 開始，這常常是最困難的情況。而讀者不難用筆者曾用過的方法從本文的特殊結果出發，用歸納法得出一般的結果。進而言之，相比於迪厄多內方法，筆者只用了矩陣計算。”

華羅庚與 I. 賴納 (Reiner) 確定了 $GL_n(Z)$ 和 $PGL_n(Z)$ 的自同構，這是環上典型群自同構工作的開端。他們還證明了，如果 $n \geq 2$，則 $GL_n(Z)$ 由三個元素生成，$SL_n(Z)$ 由兩個元素生成，而 $SP_{2n}(Z)$ 由四個元素生成。在他們之前，R.R. 布拉哈拉 (Brahara) 僅能證明 $SP_{2n}(Z)$ 的每個元素均可表為某有限矩陣集合中的元素之積。

1940 年，華羅庚與段學復引進 $p-$群秩的概念。假定 $p-$群 G

的階是 p^n，若它的元素的最大階爲 $p^{n-\alpha}$，則稱 G 的秩爲 α。例如他證明了，若 G 的秩爲 α，其中 $p \geq 3$、$n \geq 2\alpha+1$，則 (i) G 含一個且僅含一個 p^m 階而秩爲 α $(2\alpha+1 \leq m \leq n)$ 的群，(ii) G 含 p^α 個 p^m 階循環群 $(\alpha < m < n-\alpha-1)$，(iii) G 中階 $\leq p^m$ $(\alpha \leq m \leq n-\alpha)$ 的元素個數等於 $p^{m+\alpha}$，其中 (ii)、(iii) 分別改進了 H.A. 米勒 (Miller) 與 A. A. 庫拉科夫 (Кулаков) 的結果。

矩陣幾何學是華羅庚於 1945 年首先創始的研究領域。它與 C.L. 西格爾 (Siegel) 關於分式線性變換的工作相關。在矩陣幾何中，空間中的點是某類矩陣，例如同樣大小的長方矩陣、對稱矩陣或斜對稱矩陣。在這個空間中，有一個運動群。主要問題之一是如何用儘可能少的幾何不變量來刻劃運動群。華羅庚發現僅不變量 “粘切” 即足以刻劃空間的運動群。他在 1951 年證明了長方形矩陣仿射幾何的基本定理：

假定 $1 < n \leq m$，則從體 K 上 $n \times m$ 矩陣集合到自身的一一映射保持粘切者 (若 $M-N$ 的秩爲 1，則稱矩陣 M 與 N 粘切)，必爲以下形狀：

$$Z_1 = PZ^\sigma Q + R, \tag{8}$$

其中 $P = P^{(n)}$、$Q = Q^{(m)}$ 爲可逆方陣，R 爲 $n \times m$ 矩陣，而 σ 爲 K 的一個自同構。當 $m = n$ 時，則除式 (8) 之外，還要添加

$$Z_1 = PZ'^\tau Q + R,$$

其中 τ 是 K 的反自同構。

由這個定理，華羅庚推出了長方矩陣射影幾何的基本定理，特徵 $\neq 2$ 的體上全陣環的喬丹同構，及特徵 $\neq 2$、3 的體上全陣環的李同構。

華羅庚對矩陣幾何的研究跟他對多複變函數論的研究密切相關。這促使他研究矩陣的分類問題。華羅庚在 1944 年至 1946 年

確定了在酉群下複對稱矩陣和斜對稱矩陣的分類， 一對埃爾米特矩陣在合同下的分類， 及在正交群下， 埃爾米特矩陣的分類。

1955 年， 華羅庚在數學研究所領導了一個代數討論班， 並與萬哲先發表了他們合著的書《典型群》， 總結了他們關於典型群及其有關問題的成果。 討論班的成員除繼續發展由華羅庚開闢的領域外， 還在其它方面， 特別是代數編碼方面做出過貢獻。

3. 複分析

(6) *典型域* 1935 年， E. 嘉當 (Cartan) 證明了， 在解析映射之下， 只有六類不可約、 齊性、 有界對稱域， 其中兩類是例外域， 分別爲 16 維與 27 維， 其餘四類稱爲 “典型域， 可以用矩陣將它們表示如下：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\mathrm{I}} &= \{m \times n \text{ 矩陣 } Z\text{， 滿足 } I^{(m)} - ZZ^* > 0\}\text{，}\\
\mathcal{R}_{\mathrm{II}} &= \{n \text{ 階對稱方陣 } Z\text{， 滿足 } I^{(n)} - ZZ^* > 0\}\text{，}\\
\mathcal{R}_{\mathrm{III}} &= \{n \text{ 階斜對稱方陣 } Z\text{， 滿足 } I^{(n)} - ZZ^* > 0\}\text{，}\\
\mathcal{R}_{\mathrm{IV}} &= \{\underline{\underline{Z}} = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \text{ 滿足}\\
&\qquad |\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{Z}}'|^2 + 1 - 2\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{Z}}' > 0\text{，} |\underline{\underline{Z}}\,\underline{\underline{Z}}'| < 1\}\text{，}
\end{aligned}
$$

其中 Z 的元素爲複變數， $I^{(m)}$ 表示 m 階單位方陣， 及 Z^* 表示 Z 的轉置 Z' 的複共軛矩陣。

典型域可以看作普通複平面上單位圓與其它區域在高維空間的類似。 此外， 典型域理論在微分方程及複幾何也有應用。

1943 年， 西格爾發表了他關於辛幾何的重要文章， 該文用矩陣方法研究了 $\mathcal{R}_{\mathrm{II}}$。 1944 年， 華羅庚指出， 典型域的研究可以歸結爲矩陣幾何的研究。 獨立於嘉當及西格爾， 華羅庚給出四類典型域及其運動群的矩陣表示。 華羅庚的文章中關於與西格爾工作有重複的部分， 只是簡單概述了一下。 在該編者序中寫道：“由於美國與中國之間郵件阻滯， 在編者同意之下， 由華羅庚的的朋友段學復與西格爾教授對該文作了一系列微小修改。” 華羅庚還在

他的文章中感謝 H. 外爾 (Weyl)、 唐培經與陳省身分別送給他西格爾、 G. 吉羅 (Giraud) 與嘉當的文章。

1953 年， 華羅庚用群表示論方法得出四類典型域的完整正交系。 粗略地說， 這類似於在普通複平面上， 找到了完整正交系 $e(n\theta)$ ($n = 0$、 ± 1、 $\cdots$)， 由這組正交系， 人們易得出單位圓的柯西核、 西格爾、 伯格曼核及泊松核等。 華羅庚的方法特點爲具體與直接， 並對複雜計算的掌握。 利用典型域的柯西核可以證明只要解析函數值在某個低微流形 (特徵流形) 上給出， 函數在典型域中的值就確定了。 華羅庚將上述工作與其它結果總結在他的專著《多複變函數論中的典型域的調和分析》之中。 該書英文版編者強調這本書對李群表示論、 齊性空間理論與多個複變數自守函數理論的重要性。 該書的另一重要特點爲華羅庚發展的數學技巧， 例如一類代數恆等式與矩陣變元函數的積分的計算， 均具有獨立興趣。

利用典型域的泊松核， 華羅庚與陸啓鏗建立了典型域的調和函數論， 並解決了對應的拉普拉斯 − 貝爾特拉米方程的狄利克雷問題。 他們發現一些奇異現象： (i) 若一個函數適合一個微分方程， 則必適合一個微分方程組。 (ii) 只要函數值在典型域邊界的一個低微流形 (特徵流形) 上給出， 則狄利克雷問題就解決了。

華羅庚還發現一組具有與調和算子類似性質的微分算子， 國際上稱爲 “華氏算子”。 陸啓鏗研究了典型域的邊界性質、 幾何結構與最大原理， 並證明了 C^n 中有界區域的施瓦茲引理。

由於一些典型群可以看作典型域的特徵流形， 華羅庚證明了酉群上的傅里葉級數可以阿貝爾求和。 這是典型群上傅里葉分析研究的開端。 這項工作由龔昇的研究而得到很大豐富。 龔昇研究了酉群上傅里葉級數的阿貝爾求和、 E. 蔡查羅 (Cesàro) 求和、 L. 費耶爾 (Fejér) 求和及各種求和。 鍾家慶將酉群的傅里葉級數的某些結果推廣到旋轉群。

1954 年，華羅庚用初等方法證明了：有界域的 S. 伯格曼 (Bergman) 度量的黎曼曲率 R 滿足：(i) $2 - R$ 爲平方和；(ii) 在某些限制下有 $R \geq -n$。這是對 B.A. 富克斯 (Fuchs) 定理的改進。作爲黎曼共形映照定理的推廣，華羅庚證明了每一個常曲率全純域均可以解析映照爲單位超球。

由他關於多複變函數論的研究所引起，華羅庚研究了偏微分方程論的一些問題。他的結果總結在他的著作《從單位圓談起》(1977) 及與林偉、吳茲潛合著的書《二階兩個自變數兩個未知函數的常係數線性偏微分方程組》(1979) 之中。

華羅庚是本世紀最富傳奇性的數學家之一。將他與另一位自學成才的印度天才數學家 S.A. 拉馬努金 (Ramanujan) 相比較，正如 P. 貝曼 (Batman) 所說，“兩人主要都是自學成才的，都得益於在哈代領導之下，在英國從事過一段時間的研究工作。……。他們之間又有截然不同之處。首先，拉馬努金並沒有全部完成由一個自學天才到一個成熟的、訓練有素的數學家的轉變，他在某種程度上保留了數學的原始性，甚至保留了一定程度的猜謎性質。然而華羅庚在其早期數學生涯中，就已是居主流地位的數學家了。其次，拉馬努金與哈代的接觸更直接，更有決定性意義。……。雖然華羅庚在英國工作時得益甚大，但他與哈代在數學方面的接觸顯然不是這樣特別集中的”。華羅庚“成功地從自學數學的天才青年成爲造詣高深、有多方面創造的數學大師”。這一切靠的是華羅庚非凡的努力與驚人的毅力。

文　　獻

原始文獻

[1] 華羅庚 (Hua Loo-Keng), *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983

[2] 華羅庚，堆壘素數論，科學出版社，1957。

[3] 華羅庚，數論導引，科學出版社，1957。

[4] 華羅庚， 多複變數函數論中的典型域的調和分析， 科學出版社， 1958。

[5] 華羅庚， 指數和的估計及其在數論中的應用， 科學出版社， 1963。

[6] 華羅庚、 萬哲先， 典型群， 上海科學技術出版社， 1963。

[7] 華羅庚， 高等數學引論， 科學出版社， 第一卷， 1963； 第二卷 1981； 餘篇， 1984。

[8] 華羅庚、 王元， 數論在近似分析中的應用， 科學出版社， 1978。

[9] 華羅庚， 從單位圓談起， 科學出版社， 1977。

[10] 華羅庚、 林偉、 吳茲潛， 二階兩個自變數兩個未知函數的常係數線性偏微分方程組， 科學出版社， 1979。

[11] 華羅庚， 優選學， 科學出版社， 1981。

[12] 華羅庚， 華羅庚科普著作選集， 上海教育出版社， 1984。

研究文獻

[13] S. Kung and K.H., Look (S. Gong and K.Q. Lu),*Function theory*, 見 Hua Loo-Keng, *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983, 634－635。

[14] H. Davenprot, *Analytic methods for Diophantine equations and Diophantine inequalities*, Ann. Arbor Publishers, 1962, 8。

[15] H. Halberstam, *Loo-Keng Hua*： *Obituary*, Acta Arith., *L*1 (1988), 99－117。

[16] S. Salaff, *A biography of Hua Loo-Keng, Science and technology in East Asia*, Sivin Nathan edited, Watson Acad. Publ. Inc., 1977

[17] I.M. Vinogradov, *Selected works*, Springer-Verlag, 1984。

[18] Z.X. Wan, *Algebra and geometry*, 見 Hua Loo-Keng, *Selected papers*, Springer-Verlag, 1983, 281－284。

[19] P. Batman, *Review on selected papers of Loo-Keng Hua*, Math. Monthly, 1, 1986。