陳 景 潤

陳景潤，1933 年 5 月 22 日生於福建福州；1996 年 3 月 19 日卒於北京。解析數論。

陳景潤之圖像請參閱百度百科網站

http://baike.baidu.com/subview/2125/6436962.htm

陳 景 潤

張 明 堯

(海南大學)

陳景潤， 1933 年 5 月 22 日生於福建福州； 1996 年 3 月 19 日卒於北京。 解析數論。

陳景潤的父親陳元俊係郵局職員， 生母潘氏於 1947 年去世。 由於父親收入低微， 加上兄弟姐妹多， 因而家境十分貧寒。 陳景潤於 1938 – 1948 年先後在福州市三一小學、 三元縣小學、 三元縣立初中、 福州市三一中學及英華中學就讀。 其間由於受到一些數學教師的影響， 他對充滿奇妙問題的數論產生了濃厚的興趣。 1949 年他進入廈門大學數學系學習， 1953 年以優異成績畢業， 並被分配到北京市第四中學任教。 由於他性格十分內向， 極不善與人交往， 因而對中學教師這一工作很不適應。 當時的廈門大學王亞南校長了解到陳景潤的處境和他希望獻身於數論研究的志向後， 即於 1954 年通過有關部門將陳景潤調回廈門大學擔任助教。 就在這裡他訂出了研究哥德巴赫猜想的計劃。 經過幾年的刻苦鑽研， 陳景潤對我國數學家華羅庚及蘇聯數學家 И. М. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 等人的專著及一些重要的數論方法有了深刻的了解， 很快便寫出了第一篇有關塔利問題的論文， 這篇論文引起了華羅庚教授的注意。 1957 年， 經華羅庚的推薦， 陳景潤被調到中國科學院數學研究所任實習研究員。 1962 年任助理研究員， 1977 年升任研究員， 1988 年提升爲一級研究員。 從 1978 年開始， 他參加了培養碩士及博士研究生的工作。 先後受聘擔任貴州民族學院、 河南大學、 廈門大學、 青島大學、 華中工學院、 福建師範大學等校兼職教授。 還曾當選爲第四、 五、 六屆全國人民代表大會代表， 並任《 數學季刊 》主編， 國家教委數學小組成員及中國

科學院學部委員。

爲了追求自己的理想，多年來，陳景潤始終過著普通人難以忍受的艱苦生活，踏踏實實、堅持不懈地從事著解析數論及應用數學等方面的研究工作。無論是在“文化大革命”中遭受批鬥打擊的時候，還是在遭受疾病折磨的時候，他都沒有停止自己的追求。他關於哥德巴赫猜想的著名成果，就在是“文化大革命”這場浩劫中艱苦磨煉出來的。直到 1980 年 8 月他才結束獨身生活，組織了自己的家庭。他的夫人由昆女士在北京某部隊醫院工作，倆人有一個活潑可愛的男孩。多年的營養不良及艱苦工作，嚴重損害了陳景潤的健康，經先後在北京市一些醫院住院治療，身體有所恢復。但他仍患有帕金森氏綜合症，這種疾病經治療得到控制，但無法根除，因而對他的生活和工作仍有不利的影響。

從 1958 年至 1990 年，陳景潤共發表研究論文五十餘篇，出版專著四部。由於他關於哥德巴赫猜想等問題的傑出研究成果，於 1982 年榮獲國家自然科學一等獎，並於 1978－1979 年應美國普林斯頓高級研究院等的邀請先後去美國、法國及英國講學。

在近代解析數論的許多重要問題的研究中，陳景潤都作出過重要的成果及貢獻。

在《算術研究》(*Disquisitiones arithmeticae*) 一書的第 302 篇中，C.F. 高斯 (Gauss) 對判別式爲 $-d<0$ 的正定型類數均值給出一個漸近公式

$$\sum_{d=1}^{n} h(-d)=\frac{4\pi}{21\zeta(3)}n^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\pi^2}n+R(n)\text{，} \tag{1}$$

其中

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\text{，}\ s>1\text{。}$$

高斯既未給出餘項 $R(n)$ 的估計，也未給出證明。1917 年維諾格拉多夫首次用他的新方法給出 (1) 式的證明及餘項估計。1963 年維

諾格拉多夫得到

$$R(n)=O(n^{\frac{2}{3}}(\ln n)^6)\text{，}$$

陳景潤則獨立地得到幾乎同樣的估計

$$R(n)=O(n^{\frac{2}{3}+\varepsilon})\text{。}$$

1963 年， 維諾格拉多夫對球 $u^2+v^2+w^2\leq x$ 內整點數 $P(x)$ 得到

$$P(x)=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}+O(x^{\frac{2}{3}}(\ln x)^6),$$

而陳景潤同年得到幾乎相同的估計式

$$P(x)=\frac{4}{3}\pi x^{\frac{3}{2}}+O(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon})\text{，}$$

這些仍是目前最好的結果。 在其它整點問題中陳景潤也有重要的貢獻。

在華林問題中， 1958 年陳景潤得到

$$G(k)=\leq k\,(3\ln k+5.2)\text{，}$$

直到 1977 年， R.C. 沃恩 (Vaughan) 才將它改進爲

$$G(k)\leq k(3\ln k+4.2)\text{。}$$

1964 年， 陳景潤證明了 $g(5)=37$， 1974 年他又得到 $g(4)\leq 27$。 1985 年， R. 巴拉蘇不拉馬連 (Balasubramanian) 利用陳景潤證明 $g(5)=37$ 的方法加以改進得到 $g(4)\leq 20$。 1986 年， 巴拉蘇不拉馬連、 J.M. 戴舍爾 (Deshouillers) 及 F. 德萊斯 (Dress) 最終完成了 $g(4)=19$ 的證明。

自 1859 年 B. 黎曼 (Riemann) 首次引入並研究複變數 $s=\sigma+it$ 的函數 (現稱爲黎曼 ζ 函數)

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

以來， 尋求使

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\alpha})$$

成立的最小 α 一直是個重要的問題。 如果黎曼猜想成立， 則容易推出對任給 $\varepsilon>0$ 有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\varepsilon})$$

成立， 此爲著名的林德勒夫猜想。

利用 J.G. 范德科爾普特 (van der Corput) 估計三角和的方法不難證明

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(|t|^{\alpha}(\ln|t|)^{\beta})\text{，}$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{6}$、$\beta=1$。 1949 年閔嗣鶴得到 $\alpha=\dfrac{15}{92}+\varepsilon$。 1964 年 W. 漢克爾 (Haneke) 在一篇 74 頁的長文中證得可取 $\alpha=\dfrac{6}{37}$ 及 $\beta=1$。 1965 年， 陳景潤經過對二維三角和的精密研究， 僅用十多頁篇幅就證明了可取 $\alpha=\dfrac{6}{37}$ 及 $\beta=0$。 這個問題目前最好的結果是 M.N. 哈斯利 (Huxley) 與 N. 瓦特 (Watt) 於 1988 年得到的 $\alpha=\dfrac{9}{56}$ 和 $\beta=2$。

1837 年， G.L. 狄利克雷 (Dirichlet) 利用二元二次型的分類證明了： 如果 l 與 $k\geq 1$ 是兩個互質整數， 則在算術級數 $kn+l$， $n=1$、2、$\cdots$ 中必有無窮多個質數。 求其中最小 (正) 質數 $p(k,l)$ 也是一個著名的數論問題。 1934 年， S. 周拉 (Chowla) 曾猜測： 對任給 $\varepsilon>0$ 及充分大的 k， 有

$$p(k,l)\leq k^{l+\varepsilon}\text{。}$$

1944 年， Ю. В. 林尼克 (Линник) 第一個證明了： 存在絕對常數 $c>0$ 使

$$p(k,l)=O(k^{c})\text{。}$$

1957 年潘承洞首次定出 $c\leq 10^4$ 及 $c\leq 5448$。 1965 年陳景潤得到

$c \leq 777$。 此後， 他又不斷改進這一結果， 先後得到 $c \leq 168$、 17、 15。1989 年， 他與劉健民合作得到 $c \leq 13.5$。 關於這個問題目前已知的最好結果是王煒於 1991 年得到的 $c \leq 8$。

關於區間中質數與殆質數的分佈問題， 人們曾猜測對充分大的 $x > 0$， 區間 $(x - \sqrt{x}, x)$ 中至少有一個質數。 1921 年， H. 克拉默 (Cramér) 在黎曼猜想爲眞的假設下證明了： 對任給 $\varepsilon > 0$， 當 $x > 0$ 充分大時， $(x - x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, x)$ 中至少有一個質數。 A. 盛澤爾 (Schinzel) 甚至猜想： 對任給 $\varepsilon > 0$， 當 $x > 0$ 充分大時， $(x - x^{\varepsilon}, x)$ 中至少有一個質數。 以下用 P_m 表示至多有 m 個質因子的正整數 (即所謂的 “殆質數”)， 1920 年 V. 布龍 (Brun) 證明了： x 充分大時必有 $P_{11} \in (x - \sqrt{x}, x]$。 1969 年 H.E. 里歇特 (Richert) 用加權篩證明了： x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{\frac{6}{11}}, x]$。 1975 年， 陳景潤首先對加權篩中的餘項採用三角和估計方法， 得到如下的重要結果： 當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - \sqrt{x}, x]$。 1979 年， 他從不同的組合公式出發進一步得到： 當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{0.477}, x]$。 他的思想成爲這方面後來許多重要工作的出發點。 這一問題目前已知最好的結果屬於 H. 伊萬尼斯 (Iwaniec) 和 M. 拉包德 (Laborde)， 他們於 1981 年得到： 當 x 充分大時必有 $P_2 \in (x - x^{0.45}, x]$。

此外， 在三角和估計、 圓內整點、 三維除數及三質數定理中的常數估計等問題中， 陳景潤都做出過重要的貢獻。 其中尤以他對哥德巴赫及孿生質數兩大猜想的貢獻最爲突出。

1742 年， 德國數學家 C. 哥德巴赫 (Goldbach) 在與瑞士數學家 L. 歐拉 (Euler) 的幾次通信中提出了整數表爲質數和的兩個猜想， 用現代語言說就是：

(A) 每個 ≥ 6 的偶數都是兩個奇質數之和；

(B) 每個 ≥ 9 的奇數都是三個奇質數之和。

此即著名的哥德巴赫猜想。(A) 通常稱爲關於偶數的哥德巴赫猜

想， (B) 稱爲關於奇數的哥德巴赫猜想。

1857 年， 俄國數學家 B. 布尼亞科夫斯基 (Буняковский) 提出一個猜想， 它的一個特例是如下著名的孿生質數猜想：

(A_1) 存在無窮多個質數 p， 使 $p+2$ 也是質數。

1920 年前後， 英國數學家 G.H. 哈代 (Hardy)、 J.E. 李特爾伍德 (Littlewood) 及印度數學家 S. 拉馬努金 (Ramanujan) 提出的圓法對解決這些猜想作出了重大貢獻。 1937 年， 維諾格拉多夫利用改進的圓法及他本人獨創的三角和估計方法， 給出了猜想 (B) 近乎完全的證明。 然而， 利用圓法研究猜想 (A) 的努力卻收效甚微。

我們把不能表爲二奇質數之和的偶數稱爲哥德巴赫例外數， 用 $E(x)$ 表示不超過 x 的哥德巴赫例外數的個數。 1937 年前後， 華羅庚、 H. Г. 邱達可夫 (Чудаков)、 H. 亥爾布朗 (Heilbronn)、 范德科爾普特及 T. 埃斯特曼 (Estermann) 利用維諾格拉多夫證明猜想 (B) 的思想， 幾乎同時證明了： 對任給正數 A 有

$$E(x)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right)。$$

由此推出： 幾乎所有的偶數皆可表爲二奇質數之和。 其中華羅庚的結果比其他四人的更強一些。 1972 年沃恩證明了： 存在常數 $c>0$ 使

$$E(x)=O(xe^{-c\sqrt{\ln x}})。$$

1975 年， H.L. 蒙哥馬利 (Montgomery) 與沃恩把大篩法及 L 函數零點分佈的重要結果用於研究這個問題， 證明了存在常數 $\delta>0$ 使

$$E(x)=O(x^{1-\delta})。$$

1979 年， 陳景潤與潘承洞首次定出 $\delta>0.01$。 1990 年， 陳景潤又進一步得到 $\delta>0.04$ 及 $\delta>0.05$。

迄今研究猜想 (A) 最有效的方法是篩法。 最古老的篩法爲兩千多年前希臘學者埃拉托塞尼 (Eratosthenes) 所創， 這種篩法與高速計算機相結合， 可以有效地編造出很大的質數表。 但這一篩法對

解決其它重要的數論問題沒有什麼理論價值， 在很長時間裡沒有得到進一步的發展。

以下用 $\{a, b\}$ 表示如下的結論： 每個充分大的偶數都可以表爲 $P_a + P_b$ 的形狀。 這時 $\{1, 1\}$ 就代表猜想 (A)。

就在一些著名數學家嘆息當代數學界對猜想 (A) 力不能及的時候， 挪威數學家布龍於 1920 年前後首先對埃拉托塞尼篩法作出有重要理論價值的改進， 由此他證明了以下兩個驚人的結果： (1) 命題 $\{9, 9\}$ 成立； (2) 若用 p' 表示使 $p'+2$ 也爲質數的質數 (也稱 “孿生素數”)， 則級數 $\sum_{p'} \dfrac{1}{p'}$ 收斂。

1947 年， 另一位挪威數學家 A. 塞爾伯格 (Selberg) 利用求二次型極值這一簡單思想得到埃拉托塞尼篩法的另一重大改進。 一般來說， 塞爾伯格篩法比布龍篩法更簡單， 而且常能獲得更好的結果。 1941 年， P. 庫恩 (Kuhn) 提出了加權篩法， 這種方法可以加強其它篩法的效果。 當今有關篩法的許多重要結果都與這一思想有關。

爲了逼近猜想 (A)， 並且保證偶數分成二整數之和時其中必有一個是質數， 即爲了證得形如 $\{1, b\}$ 的結果， 在估計餘項時須要對形如

$$\mathcal{R}(x, \eta) = \sum_{d\le x^r\eta} \mu^2(d) \max_{y\le x} \max_{(l,d)=1} \left|\varphi(y\;;\; d, l) - \frac{y}{\varphi(d)}\right|$$

的和給出適當的上界估計， 這種結果通常稱爲算術級數中質數分佈的均值定理。 在許多問題中， 如果廣義黎曼猜想 (Generalized Riemann Hypothesis， 簡記爲 GRH) 可以導出該問題的解， 那麼一個適當的均值定理可以取代 GRH 導出同樣的結果。

1932 年， 埃斯特曼在 GRH 成立的假定下證明了 $\{1, b\}$。 1948 年， 匈牙利數學家 A. 瑞尼 (Rényi) 用林尼克創造的大篩法證明了： 存在常數 $\eta_0 > 0$， 使對任意正數 $\eta < \eta_0$ 及對任意的 $A > 0$ 皆

有

$$\mathcal{R}(x,\,\eta)=O\left(\frac{x}{(\ln x)^A}\right)\,,$$

由此他用布龍篩法無條件地證明了 $\{1,\,b\}$， 然而他未能定出 b 的值。

1962 年， 潘承洞證明了可取 $\eta_0=\dfrac{1}{3}$， 由此他得到 $\{1,\,5\}$。 同年， 王元用經過改進的篩法及 $\eta_0=\dfrac{1}{3}$ 得到 $\{1,\,4\}$， 他還導出 η_0 與 b 之間一個非顯然的關係。 此外， 王元還在 GRH 成立的條件下證明了 $\{1,\,3\}$。 潘承洞與 M. Б. 巴爾班 (Барбан) 先後於 1962 年及 1963 年相互獨立地證明了可取 $\eta_0=\dfrac{3}{8}$， 由此他們用較簡單的篩法就證明了 $\{1,\,4\}$。

1965 年， A. A.. 布赫夕塔布 (Бухштаб) 利用 $\eta_0=\dfrac{3}{8}$ 及他所獨創的迭代法得到 $\{1,\,3\}$； E. 邦別里 (Bombieri) 與 A. И. 維諾格拉多夫 (Виноградов) 相互獨立地證明了可取 $\eta_0=\dfrac{1}{2}$ (其中邦別里的結果略強一些)， 由此他們也得到 $\{1,\,3\}$。

1966 年， 陳景潤宣佈他證明了 $\{1,\,2\}$， 但僅敍述了幾個引理的結論， 沒有給出詳細證明。 當時這個結果沒有得到國際數學界的承認。 1973 年， 他發表了 $\{1,\,2\}$ 的詳細證明並改進了 1966 年宣佈的數值結果， 這就立即在國際數學界引起了轟動， 被公認是對猜想 (A) 的重大貢獻， “篩法理論光輝的頂點”， 並被國際數學界稱爲陳氏定理。 由於這個定理的重要性， 人們曾先後對它給出至少五個簡化證明， 其中潘承洞、 丁夏畦及王元所給出的證明尤爲簡潔。

陳景潤在證明 $\{1,\,2\}$ 中的主要貢獻在於他創造性地提出並且巧妙地實現了一種新的加權篩法。 在他的加權篩法中出現一個和式

Ω，通常的邦别里－維諾格拉多夫均值定理無法對 Ω 中出現的餘項給出合適的估計。潘承洞、丁夏畦及王元曾明確指出：估計 Ω 的關鍵實質是須要建立一類新型的均值定理。

在和式 Ω 的估計中，陳景潤巧妙地把估計某種集合中元素個數的問題轉化爲計算另一種集合中元素個數的問題。這個極其簡單的思想加強了篩法的威力，被國際數學界稱爲轉換原理 (switching principle)。1972 年，伊萬尼斯也曾獨立地提出並運用過這一思想。這一原理與各種均值定理相結合，得到了許多重要的結果。

我們用 $\{a：\cdots\cdots\}$ 表示滿足省略號中所述條件的正整數 a 組成的集合，$|\{a：\cdots\cdots\}|$ 表示此集合中元素 a 的個數，p 與 p' 均表示質數。定義

$$
\begin{aligned}
D(N) &= |\{a：a=N-p,\ a=p',\ p\le N,\ 2|N\}|，\\
H_k(N) &= |\{a：a=p+2k,\ p\le N,\ a=p'\}|，\\
D(N,r) &= |\{a：a=N-p,\ a=p_r,\ p\le N,\ 2|N\}|，\\
H_k(N,r) &= |\{a：a=p+2k,\ p\le N,\ a=p_r\}|。
\end{aligned}
$$

又對任一正整數 m 定義

$$
C(m)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\lambda<p|m}\frac{p-1}{p-2}，
$$

並規定

$$
C_0=C(1)=C(2)=\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)，
$$

則 1978 年陳氏定理的改進形式如下：

定理 1　對充分大的正整數 N 有

$$
D(N,\,2)>0.81C(N)\frac{N}{\ln^2 N}，\tag{2}
$$

$$
H_1(N,\,2)>0.81C_0\frac{N}{\ln^2 N}。\tag{3}
$$

近年來， 由於人們在加權篩、 均值定理等方面的研究取得了引人注目的新進展， 因而 (3) 式的係數有了較大的改進。 1986 年 E. 福尼 (Fouvry) 與 F. 格魯勃 (Grupp) 將 (3) 式中 0.81 改進爲 1.42， 劉弘泉又將它改進爲 2.03。 最近， 福尼與格魯勃又對陳氏定理給出一個不用轉換原理的新證明， 其下界係數 $\approx 0.00168\cdots$。 此外， 吳鈞生 (Eugene K.S. Ng) 與張明堯還把陳氏定理推廣到了更爲一般的情形中。

關於 $D(N)$ 的漸近公式， 最早是由 J.J. 西爾維斯特 (Sylvester) 於 1871 年提出的， 但他的公式有一些錯誤。 在 1922 年發表的有關圓法的系列文章 III 中，哈代與李特爾伍德指出了西爾維斯特的錯誤， 並猜想下式成立

$$D(N) \sim 2C(N)\frac{N}{\ln^2 N} 。 \tag{4}$$

此外， 圓法還可導出如下猜想的結果

$$H_k(N) \sim 2C(N)\frac{N}{\ln^2 N} 。 \tag{5}$$

1961 年 A. Ф. 拉夫里克 (Лаврик) 證明了： (4) 式對幾乎所有偶數 N 成立， 而 (5) 式對幾乎所有整數 k 成立。

1949 年， 塞爾柏格證明了下形之上界

$$D(N) \leq \alpha_0 C(N)\frac{N}{\ln^2 N} ， \tag{6}$$

他的方法還可以得到

$$H_1(N) \leq \beta_0 C_0\frac{N}{\ln^2 N} ， \tag{7}$$

其中 α_0、 $\beta_0 \leq 16+\varepsilon$， ε 是預先給定的任意小的正數。 1948 年， И. В. 邱拉諾夫斯基 (Чулановский) 應用塞爾伯格篩法得到與塞爾伯格幾乎相同的結果 (僅餘項略差)。 1964 年潘承洞得到 α_0、 $\beta_0 \leq 12+\varepsilon$。 1962 年， 王元在 GRH 爲眞的假定下證明了

$\beta_0 \leq 8+\varepsilon$。邦別里和 H. 達文波特 (Davemport) 以及 Л. Ф. 康達柯娃 (Кондакова) 和 Н. И. 克利莫夫 (Климов) 分別於 1966 年及 1969 年相互獨立地證明了 α_0、$\beta_0 \leq 8+\varepsilon$。1978 年，陳景潤發展了他在證明 $\{1, 2\}$ 時所提出的加權篩法，首次得到小於 8 的上界。

定理 2　對充分大的正整數 N 有

$$\alpha_0、\beta_0 \leq 7.8342+\varepsilon。$$

他證明這個結論的要點在於巧妙地應用布赫夕塔布恆等式進行反覆迭代並運用潘承洞、丁夏畦的新型均值定理。1980 年，潘承彪用較簡單的方法證得 α_0、$\beta_0 \leq 7.932+\varepsilon$，並對定理二的證明思想作了清楚的闡述。1983 年，福尼與伊萬尼斯得到 $\beta_0 \leq \frac{68}{9}+\varepsilon$；1984 年福尼得到 $\beta_0 \leq \frac{128}{17}+\varepsilon$；1986 年邦別里、J.B. 福里蘭德 (Friedlander) 與伊萬尼斯得到 $\beta_0 \leq 7+\varepsilon$；同年，福尼與格魯勃將這些方法與轉換原理相結合，證明了 $\beta_0 \leq 6.908+\varepsilon$。然而，他們的方法還不能用於改進 α_0 的上界。

文　　獻

原始文獻

[1] 陳景潤，初等數論，I，II，III，科學出版社，1978，1982，1989。

[2] 陳景潤，組合數學，河南出版社，1984。

[3] 陳景潤、邵品琮，哥德巴赫猜想，遼寧教育出版社，1987

[4] 陳景潤，組合數學簡介，天津教育出版社，1989。

[5] 陳景潤，華林問題中 $G(k)$ 的估值，《數學學報》，8 (1958)，2，第 253 − 257 頁。

[6] Chen Jingrun, *Waring's problem for* $g(5) = 37$, Sci. Sinica, 13 (1964), 1547 − 1568。

[7] 陳景潤，關於 $\zeta(\frac{1}{2}+it)$，《數學學報》，15 (1965)，2，第 159 − 173 頁。

[8] Chen Jingrun, *The lattice-points in a circle*, Sci. Sinica, 12 (1963), 633 − 649。

[9] Chen Jingrun, *Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions II*, Sci. Sinica, 12 (1963), 751 − 764。

[10] 陳景潤， 大偶數表爲一個質數及一個不超過二個質數的乘積之和，《科學通報》，17 (1966)，9，第 385 − 386 頁；《中國科學》，1973，2，第 111 − 128 頁；《中國科學》，1978，5，第 477 − 494 頁。

[11] Chen Jingrun, *On the distribution of almost primes in an interval*, Sci. Sinica, 18 (1975), 5, 611 − 627； ibid, 22 (1979), 3, 253 − 275

[12] Chen Jingrun, *On the Goldbach's problem and the sieve methods*, Sci. Sinica, 21 (1978), 6, 701 − 739。

[13] Chen Jingrun, *On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions*, Sci. Sinica, 20 (1977), 5,529 − 562； ibid, 22 (1979), 8, 859 − 889； ibid, 32 (1989), 6, 654 − 673。

[14] Chen Jingrun, *On the exceptional set of Goldbach numbers*, Sci. Sinica, 23 (1980), 4, 416 − 430 (與潘承洞合作)； ibid, 26 (1983), 714 − 731。

研究文獻

[15] 華羅庚， 指數和的估計及其在數論中的應用， 科學出版社， 1963

[16] 王元， 哥德巴赫猜想研究， 黑龍江教育出版社， 1987。

[17] 潘承洞、 潘承彪， 哥德巴赫猜想， 科學出版社， 1981。

[18] A. A. Карачуба, Офункции $G(n)$ в проблеме Варинга, ИАНСССР, сер. матем., 49 (1985), 5, 935 − 947。

[19] R. Balasubramanian, J.-M. Deshouillers and F. Dress, *Problème de Waring pour les bicarrés, I. Schéma de la solution*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 303 (1986), 4, 85 − 88；*II. Résultats auxiliaires pour le théorème asymptotique*, ibid, Sér I Math., 303 (1986), 5, 161 − 163。

[20] E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, Ann. Scnola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4) 13 (1986), 3, 449－472； ibid, (4) 13 (1986), 3, 473－486。

[21] E. Fouvry and F. Grupp, *On the switching principle in sieve theory*, J. Reine Angew. Math., 370 (1986), 101－126。

[22] M.N. Huxley and N. Watt, *Exponential sums and the Riemann zeta function*, Proc. London Math. Soc., 57 (1988), 3, 1－24。

[23] H. Iwaniec and C.J. Mozzochi, *On the divisor and circle problems*, J. Number Theory, 29 (1988), 1, 60－93。

[24] E. K.-S. Ng, *On the sequences* $N-p,\ p+2$ *and the parity problem*, Arch. Math., 42 (1984), 5, 430－438。

[25] Zhang Mingyao, *Goldbach conjecture and parity problem*, Kexue Tongbao, 33 (1988), 15,1238－1240。

[26] Zhang Mingyao, *Some new applications of mean-value theorem*, J. of China Univ. of Sci. & Tech., 19 (1989), 1, 38－50。

[27] Wang Wei, *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica, New Series, 7 (1991), 279－289