International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2003 春季賽 國中組 初級卷參考解答

1. **將 2003元放入N個錢包中，再把這些錢包放入M個布袋中。已知N大於在任何一個布袋中的總錢數。請問是否保證布袋的數量M一定會大於某一個錢包中的總錢數？（四分）**

參考解答：

假設N是錢包數而M是布袋數，令N個錢包中，錢數最少的那個錢包有y元，而x是M個布袋中錢數最多的那個布袋的總錢數。

由假設得知$Ny \le 2003 \le Mx$，又因為N大於在任何一個布袋中的總錢數，所以$N > x$，因此有$M \ge \dfrac{Ny}{x} > y$。這證明了：當N大於在任何一個布袋中的總錢數時，布袋的數量M一定會大於某一個錢包（錢數最少的那個錢包）中的總錢數。

2. **二人輪流將一個n邊形的邊塗上顏色。第一個人可以將和所有已經塗色的邊中有0個或2個公共點的邊塗上顏色；第二個人可以將和所有已經塗色的邊中恰有1個公共點的邊塗上顏色。首先無法再塗色者為輸家。試求所有的n值使得無論第一個人怎樣塗色，第二個人一定會贏。（四分）**

參考解答：

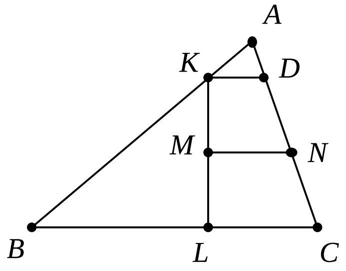
二人每次在n邊形上依題意選取一個邊來塗色。所以，在第一輪後，有一組二個相鄰的邊將會被塗上顏色，剩下$n-2$個尚未塗色的線段。

將這$n-2$個尚未塗色的線段看成新的遊戲區。在之後的每一輪遊戲中，第一個人可採取以下策略來塗色：選擇遊戲區的“第二段線段”來塗色。依題述，他可選擇從某一端開始操作，而這個第二段線段和所有已經塗色的邊沒有公共點，所以他可依題述規定塗色。這個方式將使得第二個人所面對的遊戲區變成是$k-2$段線段，k是這一輪操作開始時的遊戲線段數。這是因為第一段線段端點都連接著已塗色的線段，所以第二個人不能選擇此線段塗色。他只能選遊戲區線段的二個端點當中的某一段來塗色。

因此在第一輪後，第一個人必有一種方法可使每一輪塗色後，剩下可塗色的遊戲區邊數比前一輪少3個。所以，當遊戲進行到最後，可能剩下可塗色的遊戲區邊數為1，2或3個。若只剩下一個可塗色的邊留著，則因為這個邊和所有已經塗色的邊中有2個公共點，所以第一個人必可將它塗色，贏得此遊戲。若只剩下三個可塗色的邊留著，則第一個人可選擇中間那一段來塗色，因而贏得此遊戲。若剩下二個可塗色的邊留著，則第一個人必無法進行塗色，而輸掉此遊戲。

如此看來，除非$n=4$，否則第一個人都可依上述方式取得優勢，拿到最後勝利。所以，當n值為4時，無論第一個人怎樣塗色，第二個人一定會贏。

3. **在等腰三角形ABC的兩腰AB、BC上分別取K、L兩點，使得$AK+LC=KL$。過KL的中點 M 作 BC的平行線，交AC邊於點N。試求$\angle KNL$之度數。（五分）**



參考解答：

過點K作 BC的平行線交AC邊於D。所以，三角形AKD與三角形ABC相似，即有$AK = KD$。

因為$KM = ML$**，我們有**

$$MN = \frac{KD+LC}{2} = \frac{AK+LC}{2} = KM = ML$$

因此，點N落在以M為圓心，KL為直徑的半圓上，所以$\angle KNL = 90°$.

4. **在自然數中，依下列規則構造一個數列：**
   (i) **首項可以是任意自然數；**
   (ii) **第 $n+1$ 項的數是第n 項的數與第n 項的數中最大一個數字之和。**
   請問這樣構造出的所有數列中，最多能出現多少連續項都是奇數？（五分）

參考解答：

從數列$817, 825, 833, 841, 849$**可知這樣構造的數列有可能多達連續**5 **項都是奇數。我們宣稱，這樣構造的數列最多也只能有連續**5 **項都是奇數。**

首先，假設a_1是出現最多連續項都是奇數的那一段數列的第一項，k是這一項中最大的數字。為了使a_2也是奇數，那麼數字k必須是一個偶數。所以，數字k不會是a_1的個位數字。

如果a_2的最大一個數字不是k，因為這個最大數字如果不是a_2的個位數，就是等於數字 $k+1$。所以，它必定也是奇數。這是因為除了個位數字以外，所有的數字都不會在一次增加超過1**。因此，若出現第一項最大數字不是k時，那麼這一項必定是連續奇數項的最後一項。**

由偶數k與數字5**互質可知，數**$a_1, a_2 = a_1 + k, a_3 = a_1 + 2k, a_4 = a_1 + 3k$ **及** $a_5 = a_1 + 4k$ **的模** 5 **彼此不會同餘。又它們都是奇數，所以當中必有一個數的個位數字是**9**，而**9**是這些項數中出現的最大數字。這就是說這樣構造的數列最多也只能有連續**5 **項是奇數。**

5. **有一個**2003×2003**的棋盤和任意多個**1×2**及** 1×3**的矩形紙片，規定**1×2**的紙片只能沿著棋盤的格線水平地放置，而**1×3**的紙片只能沿著棋盤的格線鉛直地放置。請問是否可依上述規定取用一些紙片不重疊地蓋滿整個棋盤？（五分）**

參考解答：

先將棋盤的每一行黑白交錯塗色，即第一行，第二行，第三行，…，依次為黑色，白色，黑色，…。經過這樣塗色後，開始時棋盤的黑白方格數之差為2003**個。**

沿著棋盤的格線水平地放置1×2**的紙片，每放上一個**1×2**的紙片，就能蓋住黑白方格各一個，所以這個操作並不會改變黑白方格數之差；而每一個**1×3**的矩形紙片沿著棋盤的格線鉛直地放置，所覆蓋的三個方格都是同一顏色，所以每放置一片**1×3**的矩形紙片，棋盤的黑白方格數之差就增加**3 **個或減少**3 **個。**

因為2003**不是**3 **的倍數，所以，依題述規定取用一些**1×2**及** 1×3**的矩形紙片是不可能不重疊地蓋滿整個棋盤的。**

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2003春季賽 高中組 初級卷參考解答

1. **將**2003**元放入**N**個錢包中，再把這些錢包置入**M**個布袋中。已知**N**大於在任何一個布袋中的總錢數。請問是否保證布袋的數量**M**一定會大於某一個錢包中的總錢數？（三分）**

參考解答：

參見國中組初級卷1.

2. **是否存在**100**根木棒，它可以構造出一個**100**邊形，但是只用這**100**根木棒中的部份的木棒（少於**100**根）都無法構造出任何一個多邊形？（三分）**

參考解答：

假設這100**根木棒的前**99**根木棒長為**2^k**個單位，其中**$0 \le k \le 98$**，而最長的一根木棒為**$2^{99}-2$**個單位。所以，最長的一根木棒之長度比其它**99**根木棒長度之和還短，利用這**100**根木棒可以構造出一個**100**邊形。（由等比級數求和公式知，**$\sum_{k=0}^{98} 2^k = 2^{99}-1 > 2^{99}-2$**）**

依題意任取這100**根木棒當中的部份木棒（即有少許木棒不被使用）來拼出一個多邊形，如果這些被取出的木棒當中含有最長的那一根木棒，則它的長度仍然比其他被取出的木棒之長度總和還長，所以它們無法構造出一個多邊形。若最長的那一根木棒不在被取出的木棒當中，則當中最長的那根木棒為**2^m**，其中**$m \le 98$**，它仍會比其他被取出的木棒之長度總和還長（因為其他被取出的這些木棒之長度總和**$\le \sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^m - 1 < 2^m$**），所以它們還是無法構造出一個多邊形。**

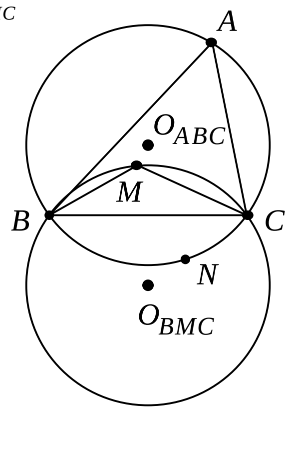
因此這樣構造出的100**邊形是符合題述的條件，題述的**100**邊形是存在的。**

3. **平面上的**$\triangle ABC$**及其內部一點**M**，已知**$\triangle AMB$**、**$\triangle BMC$**、**$\triangle CMA$**之外接圓半徑全都不小於**$\triangle ABC$**之外接圓半徑。試證：這**4**個外接圓半徑都相等。（四分）**

參考解答：

我們以符號O_{ABC}**表示**$\triangle ABC$**的外接圓。如右圖示，若**O_{ABC}**與**O_{BMC}**半徑相等，則因為兩個等圓相交區域的弧長相等，我們有**

$$\angle BMC = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BMC} = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BNC}$$
$$= 180° - \angle BAC$$



現在考慮題設條件，由O_{BMC}**之半徑不小於**O_{ABC}**之半徑可知**

$$\overset{\frown}{BMC} < \overset{\frown}{BNC}$$

所以，$\angle BMC = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BMC} \ge 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BNC} = 180° - \angle BAC$

同理，$\angle CMA \ge 180° - \angle CBA$ **且** $\angle AMB \ge 180° - \angle ACB$

考慮O_{BMC}，則

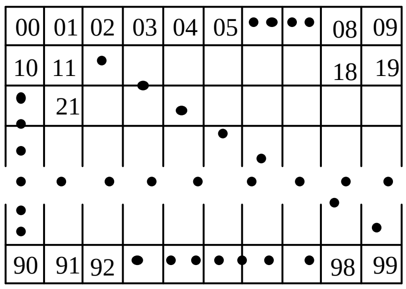
$$\begin{aligned}360^\circ &= \angle CMA + \angle AMB + \angle BMC \\ &\geq 540^\circ - (\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB) \\ &= 540^\circ - 180^\circ \\ &= 360^\circ\end{aligned}$$

上式只有當這些外接圓的半徑相等時，等號才成立。所以，這4 個外接圓半徑都相等。

4. 將數列00, 01, 02, 03, ...,99中依下列方法重新排列構成一個新的數列：新數列中的每一個後繼項都是將前一項中的一個數字加1 或減1 而得到的（例如，29的後繼項只可以是19，39或 28，但不可以是30或 20）。將這些構成的新數列與原數列比對，請問最多能有多少項仍然保留在原位置不動？（五分）

參考解答：

考慮在10×10方格表中由小到大、從左到右依序逐列地填入00　99這 100個數，如下圖所示。由題設知新的數列的下一項必是與所在方格有共同邊的一個相鄰方格。所以，新數列的排列如同西洋棋中“城堡”的行走路徑，而要這新數列仍然有最多保留在原位置不動，數列的前幾項位置能應盡可能保持不變。

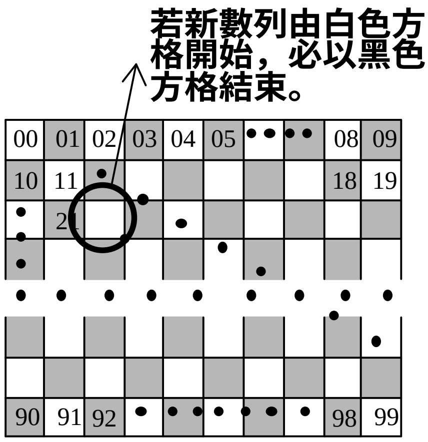


考慮下面這個構造方法：城堡從第一列，由最左邊方格至最右邊方格逐格移動，接著下移到第二列，從右到左，再下移到第三列，再從左至右，⋯，到最後一列，即右下角是99，然後從右到左依序為98，97，⋯，90。可以發現，城堡行經所有奇數列時，方格表上編號次序都是由小到大依序出現，而在偶數列時，則是由大到小出現。如果還沒移動至最旁邊的方格就往下一列移動，那必減少數列保留在原位置的數量。所以，這個依“城堡”的行走路徑所構造的新數列與原數列比對之下，能有50項保留在原位置不動。

我們宣稱，所有在新數列中最多也只能有50項保留在原位置不動。

將方格表黑白塗色。若方格表內的數字和為奇數，則塗上黑色；若為偶數，則塗上白色（考慮00是塗白色的方格）。所以，城堡的行經的方格塗色必是黑白交替的。

如果從白色方格開始，在黑色方格結束，則新的數列的某一項能保留在原位置不動，只有當這個數是偶數且在白色方格，或是奇數且在黑色方格上。滿足這個性質的只有在奇數列的方格，所以最多可以有50項保留在原位置不動。

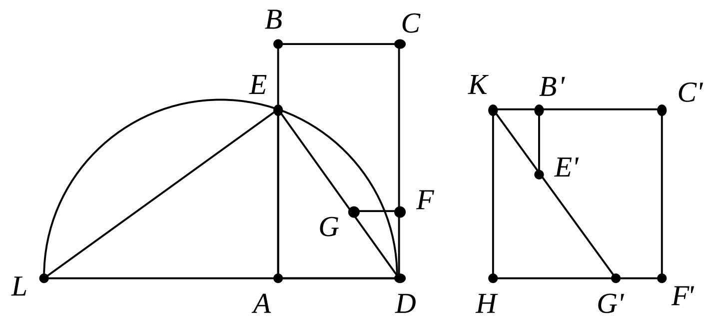


5. 有一個$a\times b$的矩形，其中$\frac{b}{2}<a<b$。試證：有方法可以將此矩形切成三片，然後再將這三片拼成一個正方形。（五分）

參考解答：

假設$ABCD$是邊長為$a\times b$的矩形，$AD=a$，$AB=b$。我們考慮下述方式來分割矩形：

(1). **沿長**DA**到** L **使得**$AL=b$。**如下圖所示。**



(2). **以** LD**為直徑作一半圓，交**AB**於** E **點。所以** $AE=\sqrt{AD\cdot AL}=\sqrt{ab}$ **，這個長度將是新的正方形的邊長。**

(3). **在** CD**邊上取一點**F **使得**$CF=AE$，**過點**F **作** AD**的平行線交直線**DE**於** G **點。**

因為 $a>\dfrac{b}{2}>\dfrac{b}{4}$ **，我們有** $2\sqrt{a}>\sqrt{b}$ **，因此**$2\sqrt{ab}>b$ **且**$\sqrt{ab}>b-\sqrt{ab}$ **， 即**$EA>FD$，**所以點** G **落在線段**DE**上。沿著線段**DE**及** FG**將矩形**$ABCD$**切開可得到題設所需的三片圖形。**

現在我們再考慮一個邊長為$\sqrt{ab}$ **的正方形**$C'F'HK$ **，令**B' **與**G' **分別是**$C'K$ **與** HF' **上的一個點，使得**$B'C'=HG'=a$ **，過點**B' **作** $C'K$ **的垂線交**KG' **於** E'**點。因為**$2\sqrt{a}>\sqrt{b}$ **，所以點**E' **必落在線段**KG' **上。如上圖所示。**

我們宣稱：沿線段KG' **與** $B'E'$ **割開所得到的三片圖形與上述矩形分割的三片完全一致。**
證明：

(a). **考慮三角形**ADE**與三角形**$HG'K$ **，因為**

$$AE=HK=\sqrt{ab}\text{，} AD=HG'=a\text{，} \angle DAE=G'HK=90^\circ$$

所以三角形ADE**與三角形**$HG'K$ **全等。**

(b). **因為三角形**FGD**與三角形**ADE**相似。**$FG=\dfrac{AD\cdot DF}{AE}=\dfrac{a(b-\sqrt{ab})}{\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}-a=B'K$ 。

又從三角形$B'KE'$ **與三角形**$HG'K$ **可知，** $B'E'=\dfrac{HK\cdot B'K}{HG'}=\dfrac{\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-a)}{a}=b-\sqrt{ab}=FD$ **，** $\angle DFG=E'B'K=90^\circ$。**所以三角形**$FGD$**與三角形** $B'KE'$ **全等。**

(c). **最後，因為**$BE=b-\sqrt{ab}=B'E'$**，**$BC=a=B'C'$**，**$CF=\sqrt{ab}=C'F'$ **且** $GF=\sqrt{ab}-a=G'F'$ **，它們組成的角度都是直角。所以五邊形**$BCFGE$**與五邊形** $B'C'F'G'E'$ **全等。**

由(a) (c)**得知，上述矩形與正方形分割的三片圖形完全一致。**