

注意：

允許學生個人、非營利性的圖書館或公立學校合理使用本基金會網站所提供之各項試題及其解答。可直接下載而不須申請。

重版、系統地複製或大量重製這些資料的任何部分，必須獲得財團法人臺北市九章數學教育基金會的授權許可。

申請此項授權請電郵 ccmp@seed.net.tw

Notice:

Individual students, nonprofit libraries, or schools are permitted to make fair use of the papers and its solutions. Republication, systematic copying, or multiple reproduction of any part of this material is permitted only under license from the Chiuchang Mathematics Foundation.

Requests for such permission should be made by e-mailing Mr. Wen-Hsien SUN ccmp@seed.net.tw

2014 小學高年級組第二輪檢測試題詳解

1. 請問算式 $32 \times 37 \times 75$ 的值為多少？

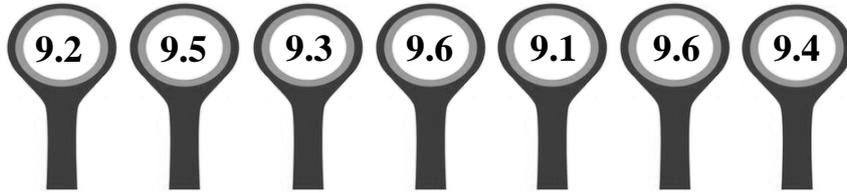
- (A) 88075 (B) 88800 (C) 88200 (D) 74000 (E) 80800

【參考解法】

$$32 \times 37 \times 75 = 8 \times 4 \times 25 \times 3 \times 37 = 800 \times 111 = 88800。$$

答案：(B)

2. 某項體育比賽的計分規則是：每位運動員表演結束後，七名裁判給這位運動員打出分數，先去掉一個最高和一個最低的分後，餘下五名裁判的分數的平均值作為該運動員的實際得分。在這項比賽中，若七名裁判給某位運動員的打分為 9.2、9.5、9.3、9.6、9.1、9.6、9.4，請問該運動員的實際得分是多少？



- (A) 9.3 (B) 9.38 (C) 9.4 (D) 9.42 (E) 9.5

【參考解法】

去掉一個最高分 9.6 和一個最低分 9.1，餘下五名裁判的分數的平均值為 $(9.2 + 9.3 + 9.4 + 9.5 + 9.6) \div 5 = 9.4$ 分。

答案：(C)

3. 有 39 位小朋友在操場上排成若干排，第一排有 4 位，後面每排都比前一排多一位，請問最後一排有多少位小朋友？

- (A) 5 (B) 6 (C) 9 (D) 15 (E) 35

【參考解法 1】

根據題意，因為 $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ ，所以最後一排有 9 位小朋友。

【參考解法 2】

根據題意，可知第一排後面總共有 $39 - 4 = 35$ 位；

而第二排有 5 位，故第二排後面總共有 $35 - 5 = 30$ 位；

而第三排有 6 位，故第三排後面總共有 $30 - 6 = 24$ 位；

而第四排有 7 位，故第四排後面總共有 $24 - 7 = 17$ 位；

而第五排有 8 位，故第五排後面總共有 $17 - 8 = 9$ 位；

而第六排恰有 9 位，故知共有六排，而最後一排有 9 位小朋友。

【參考解法 3】

假設第一排前面還有 3 排，人數分別為 1、2、3 位，則總人數為 $39 + 1 + 2 + 3 = 45$ ，而知 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ ，所以最後一排有 9 位小朋友。

答案：(C)

4. 若正整數 n 的平方減去 200 後所得的差是一個 4 的倍數之三位數，請問這樣的正整數 n 總共有多少個不同的取值？

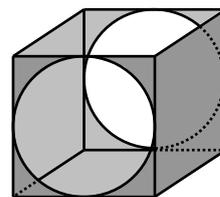
- (A) 8 (B) 9 (C) 16 (D) 17 (E) 32

【參考解法】

因為 200 也是 4 的倍數，所以滿足要求的三位數與 200 之和必為偶數的平方，並且這個完全平方數不小於 300、不大於 1199。而已知 $16^2 = 256 \leq 300 \leq 324 = 18^2$ 且 $34^2 = 1156 \leq 1199 \leq 1296 = 36^2$ 。因此這樣的三位數有： $18^2 - 200 = 124$ 、 $20^2 - 200 = 200$ 、 $22^2 - 200 = 284$ 、 $24^2 - 200 = 376$ 、 $26^2 - 200 = 476$ 、 $28^2 - 200 = 584$ 、 $30^2 - 200 = 700$ 、 $32^2 - 200 = 824$ 、 $34^2 - 200 = 956$ ，共 9 個。

答案：(B)

5. 一個無蓋的正方體盒子，在它的兩個側面各挖去一個圓，如圖所示，請問下列哪一項是它的平面展開圖？



- (A) (B) (C) (D) (E)

【參考解法】

將各選項的展開圖摺起來並旋轉後，可得如下五個圖，其中只有 (C) 選項符合要求，其它選項摺起來後都使得兩個圓在相鄰的面上。

- (A) (B) (C) (D) (E)

答案：(C)

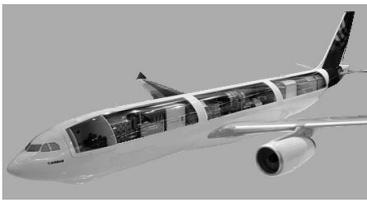
6. 一台印表機，如果按定價減價 10% 出售，可盈利 220 元，如果按定價減價 20% 出售，則要虧損 100 元，請問這台印表機的定價為多少元？

【參考解法】

由題意可知這台印表機的定價為 $(220+100) \div (0.9-0.8) = 3200$ 元。

答案：3200 元

7. 某架貨機有三個貨艙：前艙、中艙、後艙。三個貨艙所能裝載的貨物的最大重量和體積都有限制，如下表所示。並且為了保持飛機的平衡，三個貨艙中實際裝載貨物的重量必須與其最大容許重量的比例相同。現有一批足夠多的貨物 A，且每噸貨物 A 的體積為 6 m^3 。請問該貨機一次飛行最多能裝載多少噸貨物 A？（結果用小數表示，以四捨五入精確到小數點後兩位）



	前艙	中艙	後艙
質量限制/噸	10	16	8
體積限制/ m^3	66	84	51

【參考解法】

因為體積的限制 $66 > 6 \times 10$ 、 $84 < 6 \times 16$ 、 $51 > 6 \times 8$ ，所以中艙最多能裝載

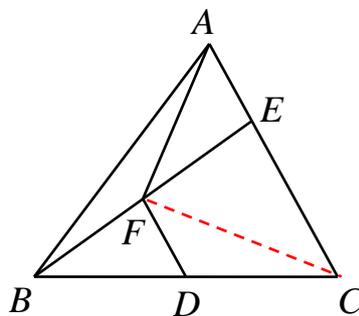
$84 \div 6 = 14$ 噸貨物 A。由題意，前艙最多能裝載 $10 \times \frac{14}{16} = 8.75$ 噸貨物 A，後艙最多

能裝載 $8 \times \frac{14}{16} = 7$ 噸貨物 A。所以該貨機一次飛行最多能裝載 $8.75 + 14 + 7 = 29.75$

噸貨物 A。

答案：29.75 噸

8. 在 $\triangle ABC$ 中，E 為 AC 邊上的一點，D 為 BC 邊的中點，F 為線段 BE 的中點，若 $\triangle ABC$ 和四邊形 AFDC 的面積分別為 120 cm^2 和 80 cm^2 ，請問 $\triangle BDF$ 的面積為多少 cm^2 ？



【參考解法】

連接 FC，令記號 S 表示面積，由題目條件可知 $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AFE}$ 、 $S_{\triangle BCF} = S_{\triangle FCE}$ ，

即 $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 60 \text{ cm}^2$ 。故 $S_{\triangle BDF} = S_{\triangle FDC} = S_{AFDC} - S_{\triangle AFC} = 80 - 60 = 20 \text{ cm}^2$ 。

答案：20 cm^2

9. 要寫出一個算式是由一個四位數減去一個三位數，所得的差是一個一位數，
例如： $1000-991=9$ 、 $1001-994=7$ ，請問總共可寫出多少個不同的算式？

【參考解法】

顯然這樣的四位數最小為 1000，最大為 1008，否則四位數與三位數之差大於或等於 $1009-999=10$ 。

當四位數為 1000 時，三位數可以選取 991 至 999，共有 9 個算式；

當四位數為 1001 時，三位數可以選取 992 至 999，共有 8 個算式；

當四位數為 1002 時，三位數可以選取 993 至 999，共有 7 個算式；

當四位數為 1003 時，三位數可以選取 994 至 999，共有 6 個算式；

當四位數為 1004 時，三位數可以選取 995 至 999，共有 5 個算式；

當四位數為 1005 時，三位數可以選取 996 至 999，共有 4 個算式；

當四位數為 1006 時，三位數可以選取 997 至 999，共有 3 個算式；

當四位數為 1007 時，三位數可以選取 998、999，共有 2 個算式；

當四位數為 1008 時，三位數可以選取 999，共有 1 個算式；

所以最多可寫出 $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ 個不同的算式。

答案：45 個

10. 在 3×5 的棋盤上，有一隻螞蟻從小方格 A 的中心出發，只能水平或鉛直行走，並要經過其它所有小方格的中心各恰一次，最後到達小方格 B 的中心。請問這隻螞蟻總共有多少種不同的路徑？

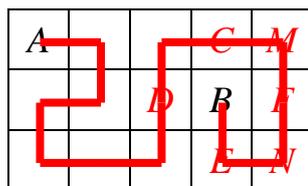
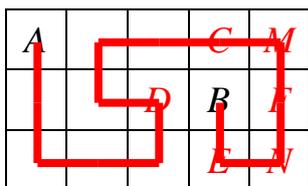
A			C	M
		D	B	F
			E	N

【參考解法】

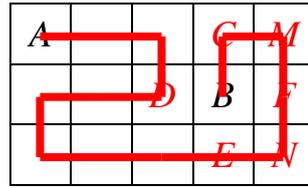
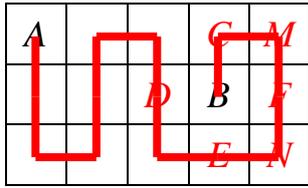
如圖所示，將小方格 B 周圍的小方格標上字母。由題目的條件可知，螞蟻只能經過小方格 C 、 D 、 E 或 F 而最後到達小方格 B 。

(i) 若螞蟻通過小方格 F 到達小方格 B ，則小方格 F 前面一個小方格只能是 M 或 N ，但無論是哪一個，都沒法經過另外一個小方格而倒推回到小方格 A 。所以螞蟻不能通過小方格 F 到達小方格 B 。

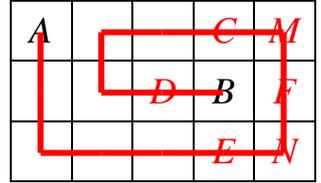
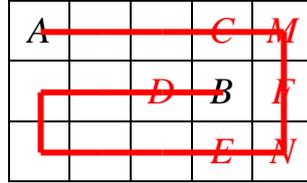
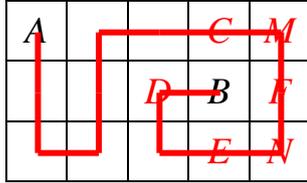
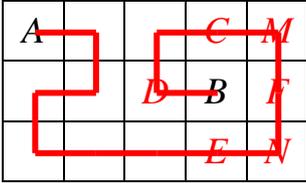
(ii) 若螞蟻通過小方格 E 到達小方格 B ，則小方格 E 前面一個小方格只能是 N ，否則小方格 N 沒法經過。小方格 N 前面一個小方格只能是 F ，依此類推，得到這種情況下有 2 種不同的路徑，如下圖所示。



(iii) 若螞蟻通過小方格 C 到達小方格 B ，則小方格 C 前面一個小方格只能是 M ，否則小方格 M 沒法經過。小方格 M 前面一個小方格只能是 F ，依次類推，得到這種情況下有 2 種不同的路徑，如下圖所示。



(iv) 若螞蟻通過小方格 D 到達小方格 B ，同上面的討論，這種情況下有 4 種不同的路徑，如下圖所示。



綜上所述，這隻螞蟻共有 8 種不同的路徑。

答案：8 種

11. 小莉的電話號碼是能同時被 3 與 5 整除的八位數。小明只記得這個電話號碼的前六碼 892015□□，請問小明最多要試撥多少次就能正確撥通此電話？

【參考解法】

因為 892015□□ 能被 5 整除，所以個位數只能是 0 或 5。

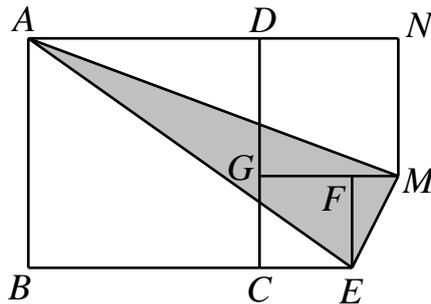
若個位數是 0，則 892015□0 能被 3 整除，因此 $8+9+2+0+1+5+\square+0 = 25+\square$ 能被 3 整除。所以十位數的「□」只能是 2、5、8；

若個位數是 5，則 892015□5 能被 3 整除，因此 $8+9+2+0+1+5+\square+5 = 30+\square$ 能被 3 整除。所以十位數的「□」只能是 0、3、6、9。

綜上所述，這樣的電話號碼最多有 $3+4=7$ 個，小明最多要試撥 7 次就能正確撥通此電話。

答案：7 次

12. 已知 $ABCD$ 、 $CEFG$ 、 $DGMN$ 都為正方形，其中點 G 在邊 CD 上，點 F 在邊 GM 上， $AB = 10\text{ cm}$ ， $MN = 6\text{ cm}$ ，如圖所示，請問 $\triangle AEM$ 的面積為多少 cm^2 ？

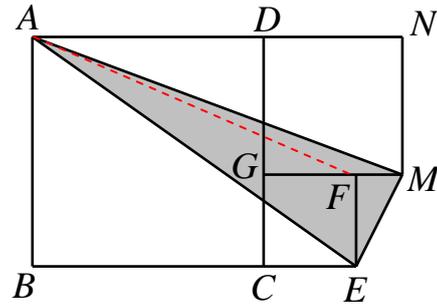
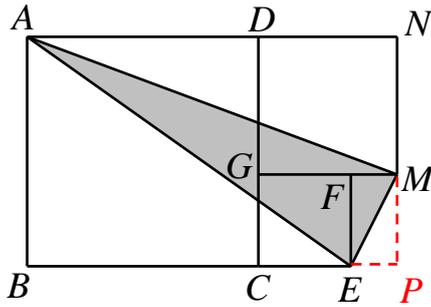


【參考解法 1】

延長 BC 、 NM 交於 P 點，如下圖左所示。

可知 $ABPN$ 是矩形，且 $AN = 10 + 6 = 16\text{ cm}$ ，正方形 $CEFG$ 的邊長為 $10 - 6 = 4\text{ cm}$ ，所以 $BE = 10 + 4 = 14\text{ cm}$ ， $EP = 6 - 4 = 2\text{ cm}$ 。故

$$\begin{aligned} S_{\triangle AEM} &= S_{ABPN} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle EPM} - S_{\triangle AMN} \\ &= 10 \times 16 - \frac{1}{2} \times 10 \times 14 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 16 \times 6 \\ &= 38\text{ cm}^2 \end{aligned}$$



【參考解法 2】

連接 AF ，如上圖右所示。由題意可得正方形 $CEFG$ 的邊長為 $10 - 6 = 4\text{cm}$ ，

$FM = 6 - 4 = 2\text{cm}$ ，所以 $S_{\triangle AFM} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6\text{cm}^2$ 、 $S_{\triangle FEM} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4\text{cm}^2$ 、

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times (10 + 4) = 28\text{cm}^2$ ，因此

$$S_{\triangle AEM} = S_{\triangle AFM} + S_{\triangle FEM} + S_{\triangle AEF} = 6 + 4 + 28 = 38\text{cm}^2。$$

答案：38 cm²

13. 將正整數 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 分成兩組，使得其中一組的所有數之和等於 n ，而另一組的所有數之積也等於 n ，請問正整數 n 的最大值是什麼？

【參考解法】

當 $n = 42$ 時，將 1、2、3、 \dots 、10 分成兩組，第一組為 1、2、3、4、5、8、9、10，和為 42，第二組為 6、7，積為 42，滿足條件。

當 $n = 43$ 、44、46、47 時， n 分別含有大於 10 的質因數 43、11、23、47，無法讓第二組數的積為 n ；當 $n = 45$ 時，由於 $45 = 3 \times 3 \times 5 = 5 \times 9$ ，第二組只能為 5 與 9，但此時第一組為 1、2、3、4、6、7、8、10，和為 41，不合條件。

當 $n \geq 48$ 時，第一組所有數之和不小於 48，故第二組所有數之和不大于 $1 + 2 + \dots + 10 - 48 = 7$ ，顯然第二組所有數之積不可能大於等於 48，矛盾。

綜上所述，正整數 n 的最大值是 42。

答案：42

【注】先考慮第二組只有兩個數 a 、 b 的情況，由題意可得 $55 - (a + b) = ab$ ，整理得 $(a + 1)(b + 1) = 56 = 7 \times 8$ ，故僅有 $a = 6$ 、 $b = 7$ 或 $a = 7$ 、 $b = 6$ ，此時 $n = 42$ 。

14. 將三個質數(不必相異)各加 1，然後將這三個和相乘，請問所得的乘積中有哪些數是介於 1999 與 2021 之間？

【參考解法 1】

不妨設三個質數為 $p \leq q \leq r$ ，下面對 p 、 q 、 r 分情況討論。

- (i) 若 $p = q = 2$ ，則 $n = 9(r + 1)$ ，即 n 能被 9 整除，1999 至 2021 之間只有 2007 和 2016 被 9 整除。

當 $n = 2007$ 時，則 $r + 1 = 223$ ，即 $r = 222$ ，但 222 不是質數，所以 2007 在這種情況下不是「好數」；

當 $n = 2016$ 時，則 $r + 1 = 224$ ，即 $r = 223$ 為質數，所以 2016 是「好數」。

(ii) 若 $p=2$ ， $2 < q \leq r$ ，則 $n=3(q+1)(r+1)$ ，且 $q+1$ 和 $r+1$ 都為大於 2 的偶數，即 n 能被 3 和 4 整除，所以 n 只能是 2004 和 2016。由上面可知 2016 已經是「好數」。

當 $n=2004$ 時，則 $(q+1)(r+1)=668=2^2 \times 167$ ，故知 668 不能分解成兩個大於 2 的偶數的乘積，所以 2004 在這種情況下不是「好數」。

(iii) 若 $2 < p \leq q \leq r$ ，則 $p+1$ 、 $q+1$ 和 $r+1$ 都為大於 2 偶數，即 n 能被 8 整除，所以 n 只能是 2000、2008 和 2016。由上面可知 2016 已經是「好數」。

當 $n=2000$ 時，則 $(p+1)(q+1)(r+1)=2^4 \times 5^3$ ，所以 $p+1$ 、 $q+1$ 和 $r+1$ 中只有一個為 4 的倍數，不妨設 $r+1$ 不是 4 的倍數，但是 $2 \times 5 - 1 = 9$ 、 $2 \times 5^2 - 1 = 49$ 、 $2 \times 5^3 - 1 = 249$ 都不是質數，所以 2000 不是「好數」；

當 $n=2008$ 時，則 $(p+1)(q+1)(r+1)=2^3 \times 251$ ，所以 $p+1$ 、 $q+1$ 和 $r+1$ 中只有一個可以是 2 的偶數，所以 2008 不是「好數」。

綜上所述，介於 1999 與 2021 之間的所有「好數」只有 2016。

【參考解法 2】

不妨設三個質數為 $p \leq q \leq r$ ，下面對 p 、 q 、 r 分情況討論。

因 $p+1$ 、 $q+1$ 與 $r+1$ 之值只能等於 3 或是大於 3 的偶數，故 $(p+1)(q+1)(r+1)$ 之值只能是 3 的倍數或是 8 的倍數。在 1999 至 2021 之間，只要討論 2000、2001、2004、2007、2008、2010、2013、2014、2016、2019 等數是否為「好數」即可。

2000 = $2^4 \times 5^3$ ，不是 3 的倍數，將 2000 寫成三個大於 3 的偶數相乘的寫法有：
 $2000 = 2^2 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5^2) = 4 \times 10 \times 50$

$$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2^2 \times 5) = 10 \times 10 \times 20$$

但 $10=9+1$ ，而 9 不為質數，故不合；

2001 = $3 \times 23 \times 29$ ，而 23、29 不是大於 3 的偶數，故不合；

2004 = $2^2 \times 3 \times 167$ ，除了 3 之外，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

2007 = $3^2 \times 223$ ，除了 3 之外，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

2008 = $2^3 \times 251$ ，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

2010 = $2 \times 3 \times 5 \times 67$ ，除了 3 之外，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

2013 = $3 \times 11 \times 67$ ，除了 3 之外，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

2014 = $2 \times 19 \times 53$ ，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

2016 = $2^5 \times 3^2 \times 7$ ，將 2016 寫成三個等於 3 或是大於 3 的偶數相乘的寫法中有：
 $2016 = 3 \times 4 \times 168$ ，其中 $3=2+1$ 、 $4=3+1$ 、 $168=167+1$ ，而 2、3、167 為質數，故滿足題意，即 2016 為好數；

2019 = 3×673 ，除了 3 之外，因數不都是大於 3 的偶數，故不合；

綜上所述，介於 1999 與 2021 之間的所有「好數」只有 2016。 答案：2016

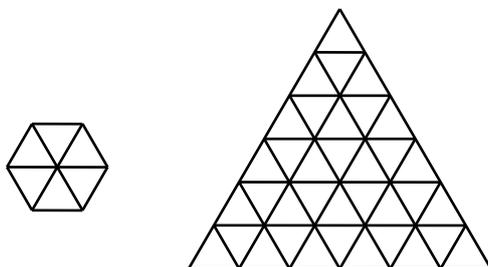
【評分標準】

(1) 知 $p+1$ 、 $q+1$ 與 $r+1$ 之值只能等於 3 或是大於 3 的偶數得 5 分。

(2) 討論除了 2016 外，其它的數不是「好數」得 10 分。

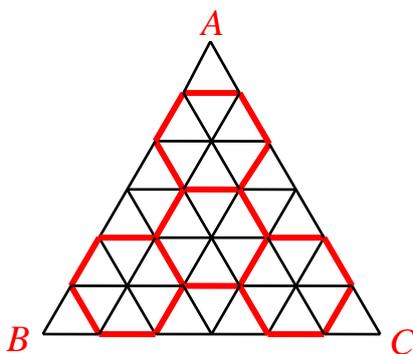
(3) 只給正確答案得 5 分，若有多餘的答案則不給分。

15. 將一個大正三角形的每條邊用 5 個點將它 6 等分，然後以平行於三角形各邊的直線將這些點相連接，把大正三角形分割為 36 個小正三角形，如下右圖所示。下左圖是由 6 個小正三角形所構成的正六邊形，請問在大正三角形內最多能不重疊地沿著格線放入多少個這樣的正六邊形？



【參考解法 1】

最多能放入 4 個這樣的正六邊形，擺放位置如圖所示。



下面證明不能放入多於 4 個正六邊形。我們考慮有多少個小正三角形不能作為正六邊形的一部分。觀察有條邊與 BC 共線的正六邊形。

若沒有正六邊形的邊在 BC 上，則正三角形網格最底下一行有 11 個小正三角形不屬於正六邊形；

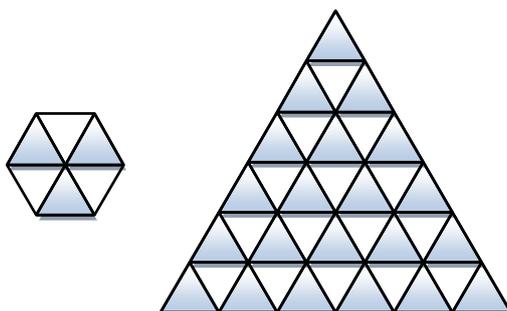
若只有一個正六邊形有邊在 BC 上，則正三角形網格最底下一行有 8 個小正三角形不屬於正六邊形；

若有兩個正六邊形有邊在 BC 上，則正三角形網格最底下一行有 5 個小正三角形不屬於正六邊形。

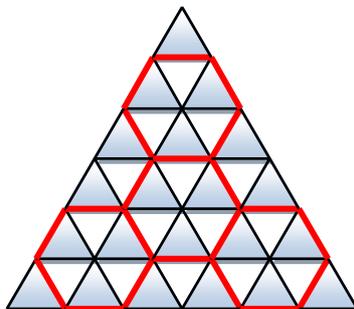
根據對稱性， $\triangle ABC$ 的每條邊上至少有 5 個小正三角形不屬於正六邊形。除去重複的小正三角形，圖中至少有 $5 \times 3 - 3 = 12$ 個小正三角形不屬於正六邊形。而圖中共有 36 個小正三角形，所以正六邊形的個數不超過 $(36 - 12) \div 6 = 4$ 個。

【參考解法 2】

如圖，依照小三角形的方向將小三角形相間塗色。



可知大正三角形中白色小三角形有 15 個，而正六邊形中白色小三角形為 3 個，故至多恰可擺放 5 個正六邊形。但現觀察排成水平方向的白色小正三角形，可知大正三角形中最下面一排有 5 個白色小正三角形，但正六邊形中水平方向一排至多有 2 個白色小正三角形，因此大正三角形最下面一列至多只能擺放 2 個正六邊形，即至少有一個白色三角形無法放在正六邊形中，因此大正三角形中至多只能有 14 個白色小三角形可依題意要求放在正六邊形中，即至多恰可擺放 4 個正六邊形，下圖所示為一例子。



答案：4 個

【評分標準】

- (1) 知 $\triangle ABC$ 的每條邊上至少有 5 個小正三角形不屬於正六邊形，得 10 分。
 - (2) 知圖中至少有 12 個小正三角形不屬於正六邊形得 5 分。
 - (3) 只給正確答案並畫出圖形得 5 分。
- 或
- (1) 知將 $\triangle ABC$ 內的小正三角形相間塗色得 10 分。
 - (2) 知最下面一列至少有一個白色三角形無法放在正六邊形中得 5 分。
 - (3) 只給正確答案並畫出圖形得 5 分。