

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2003 春季賽 國中組 高級卷 參考解答

1. 小杰和小丁依下列規則玩遊戲。首先，小杰寫下一個二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 a, b, c 都是正整數。接著，小丁可以隨意地將這個方程式中的0個、一個或二個“+”號改為“-”號。如果改變後的方程式有二個整數根，則小杰獲勝；如果改變後的方程式沒有實數根或至少有一個根不是整數，則小丁獲勝。請問小杰有沒有必勝的策略？（四分）

參考解答：

小杰有必勝的策略。只要他寫出的二次方程式的係數為 $a = 1, b = 5$ 及 $c = 6$ ，那麼他一定會贏。因為當這個二次方程式是 $x^2 \pm 5x + 6 = 0$ 時， $x^2 \pm 5x + 6 = (x \pm 3)(x \pm 2) = 0$ ，而方程式是 $x^2 \pm 5x - 6 = 0$ 時， $x^2 \pm 5x - 6 = (x \pm 6)(x \mp 1) = 0$ 。

2. 給定一個三角形 ABC ，已知 R 為其外接圓半徑， r 為其內切圓半徑， a 為三角形 ABC 中最長的邊之邊長， h 為三角形 ABC 中最短的高之長度。試證： $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$ 。（四分）

參考解答：

因為圓內接三角形的最大邊長不會比圓的直徑還長，所以 $2R \geq a$ 。其次，因為三角形的內切圓的直徑總是比三角形的三個高還短，所以 $2r < h \Rightarrow \frac{1}{2r} > \frac{1}{h}$ 。

因此， $\frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} \geq \frac{a}{2r} > \frac{a}{h}$ ，證畢。

3. 在某次競賽中，共有15個隊伍參賽。已知每一隊都與其它各隊恰好比賽一次。每次賽局開始之前，先計算預備參加這次賽局的二個隊伍已賽過的場數之和，如果其和為奇數，則稱此賽局為「奇賽局」。
- (a) 試證：在這次競賽的所有賽局中，至少有一次賽局為「奇賽局」。（四分）
- (b) 在這次競賽的所有賽局中，是否可能恰好只有一次「奇賽局」？（三分）

參考解答：

- (a) 因為每一隊都與其他14隊各賽一場，所以在每一場賽局開始時，參賽隊伍已賽過的場次應為 $0, 1, 2, 3, \dots, 13$ 這14個數當中的某一數，而當中只有7個是奇數。考慮所有與賽隊伍，則在210個賽局中有105場開始時已比賽過的賽次為奇數次。因為這些賽局無法成對，所以至少有一場賽局開始時，參賽的一隊已賽過奇數次，而另一隊已賽過偶數次，如此生成一個“奇賽局”。

- (b) 可以安排賽程，使得在所有賽局中恰好只有一次“奇賽局”。方法如下：假設全部參賽隊伍依次編號為 $0 \sim 14$ ，第14隊比較晚入場，所以比賽由第 $0 \sim 13$ 隊開始。這14支隊伍，不含與第14隊競賽的那一場次，每隊應賽為13場。

我們安排賽程如下：在第 k 輪時， $1 \leq k \leq 13$ ，當 $i + j \equiv k \pmod{13}$ ， $0 \leq i, j \leq 12$ ，第 i 隊與第 j 隊比賽；當 $13 + k = m \times 2$ 或 $k = m \times 2$ 時，第 $m \pmod{13}$ 隊與第13隊比賽。所以依此規則，賽程應為：

第 1 輪	(1, 0), (2, 12), (3, 11), (4, 10), (5, 9), (6, 8), (7, 13).
第 2 輪	(2, 0), (3, 12), (4, 11), (5, 10), (6, 9), (7, 8), (1, 13).
第 3 輪	(3, 0), (4, 12), (5, 11), (6, 10), (7, 9), (1, 2), (8, 13).
第 4 輪	(4, 0), (5, 12), (6, 11), (7, 10), (8, 9), (1, 3), (2, 13).
第 5 輪	(5, 0), (6, 12), (7, 11), (8, 10), (1, 4), (2, 3), (9, 13).
第 6 輪	(6, 0), (7, 12), (8, 11), (9, 10), (1, 5), (2, 4), (3, 13).
第 7 輪	(7, 0), (8, 12), (9, 11), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (10, 13).
第 8 輪	(8, 0), (9, 12), (10, 11), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 13).
第 9 輪	(9, 0), (10, 12), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (11, 13).
第 10 輪	(10, 0), (11, 12), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 13).
第 11 輪	(11, 0), (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (12, 13).
第 12 輪	(12, 0), (1, 11), (2, 10), (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 13).
第 13 輪	(1, 12), (2, 11), (3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7), (0, 13).

其中 (i, j) 表示第 i 隊與第 j 隊比賽。

每輪賽次開始前，各隊都已比賽過相同次數，所以在該輪中，競賽的兩隊的已賽過次數和都為“偶數”。我們令第 14 隊在第 13 輪已賽過三場，(1, 12)、(2, 11)、(3, 10)，之後入場比賽，則這時第 1, 2, 3, 10, 11 及 12 隊已賽 13 場，第 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 及 13 隊已賽 12 場。將第 14 隊的賽程安插在當中，從第 4 隊開始，和這兩組隊伍交錯進行賽事，直到與第 0 隊賽過。其次序為 1, 5, 2, 6, 3, 7, 10, 8, 11, 9, 12, 0。

不難發現，這 13 場比賽開始時，參賽的兩隊已賽過次數和都為偶數，當第 14 隊與第 13 隊比賽時，兩隊已賽過次數和則為 $13 + 12 = 25$ ，為奇數。所以，(14, 13) 這一場賽為“奇賽局”。而剩下的 (4, 9), (5, 8), (6, 7), (0, 13) 四場賽事，因為各隊都與第 14 隊比賽一場，所以不影響其賽次和的奇偶性。

因此，在這種安排下，全部賽局中只出現一次“奇賽局”。

4. 有一塊邊長為 n 的正三角形形狀的巧克力片，用一些直線將此片巧克力劃分為 n^2 個邊長全都為 1 的小正三角形（將原正三角形的三個邊各作 n 等分點，然後過這些等分點分別作與正三角形的邊平行的直線）。二人輪流玩遊戲，每一個輪到的人，如果他拿到的不是一片邊長為 1 的小正三角形巧克力，則必須沿著其內部一條直線，剝下一塊正三角形形狀的巧克力，把它吃掉，而將剩下的部份遞交給另一個人，依此規則繼續玩下去。得到最後一片邊長為 1 的小正三角形巧克力，或使對手無法依上述規則繼續玩下去的人獲勝。請問有哪些 n 值，先手有必勝的策略？有哪些 n 值，後手有必勝的策略？（七分）

參考解答：

除非正三角形形狀的巧克力片的邊長 n 為 1，否則先手不能吃掉整個三角形巧克力片。因為 $n \geq 2$ 時，當先手取走一塊正三角形巧克力片後，必留下一塊形狀如等腰梯形的巧克力片，而後手只可以取走一塊正三角形巧克力片，所以他可以使留下的巧克力片呈現“平行四邊形”或“五邊形”。

當他所留下給先手進行下一輪遊戲的巧克力片為五邊形時，則先手可以取走某一小正方形巧克力片，造成一個六邊形巧克力片留下來。此時，無論是誰，都無法依題設條件進行遊戲。所以，後手留下的巧克力片必須是形如“平行四邊形”的巧克力片。

同理，先手必須將“平行四邊形”的巧克力片變成形如“等腰梯形”的巧克力片。

最後，後手留下的“平行四邊形”的巧克力片必是一個菱形，而先手必可取走一塊正三角形巧克力片造成一個塊邊長為 m 的正三角形巧克力片留下。當 $m = 1$ 時，則後手獲勝。

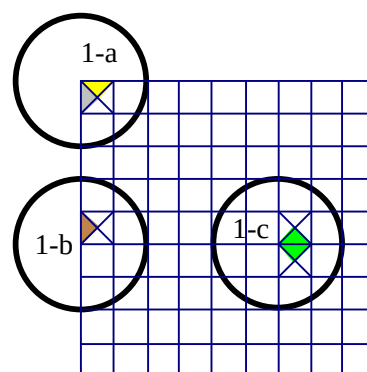
如果 n 為質數，則後手於遊戲進行中所產生的第一個平行四邊形巧克力片必為兩鄰邊互質的平行四邊形巧克力片。因為當 n 是質數時， $\gcd(n-d, d) = 1$ 。所以最後 m 必須是1，而後手獲勝。

如果 n 不是質數， p 是 n 最小的質因數，則先手可以在開始時取走一塊邊長為 $n-p$ 的正三角形巧克力片，使得留下的等腰梯形巧克力片的兩腰長為 p ，則最後 $m=p$ 。因為接下來輪到後手，所以，先手必勝。因此，只有 n 為質數時，後手才有必勝的策略。

5. 在一塊 9×9 的正方形方格紙板中。請問最多可以挑選多少個小方格，使得沿著這些被挑選出的小方格中每個小方格的二條對角線割開後，原正方形方格紙板不會被分裂為二片或二片以上（即沒有小片紙板會從原正方形紙板中分離出來）？（七分）

參考解答：(A2071, 鍾榮哲)

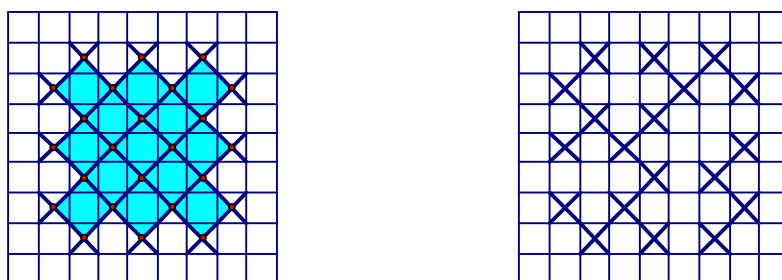
- (1) 如圖(1-a)，被選取的小方格不能在四個角上，因為方格紙頂角上的小方格會因割開對角線而剝離出兩個小三角形，造成原正方形方格紙板分裂為二片以上。
- (2) 如圖(1-b)，被選取的小方格不能在邊上，因為方格紙邊上的小方格因割開對角線而剝離出一個三角形，造成原正方形方格紙板分裂為二片。
- (3) 如圖(1-c)，被選取的小方格不能有兩兩相鄰，因為若割開兩兩相鄰的小方格的對角線，會因而剝離出一個小正方形，造成原正方形方格紙板分裂為二片。



根據此規則，方格數要最多，可以分成兩種情況：

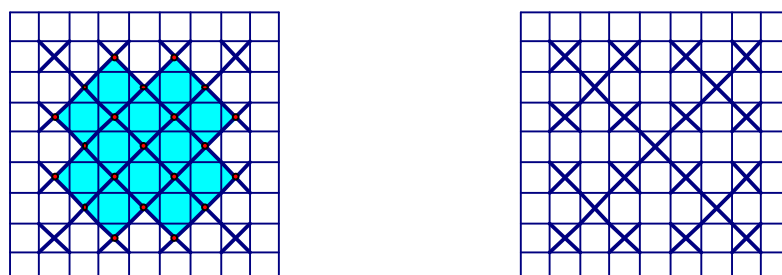
一、如圖(2)，雖然符合規則，但還是會被割下13塊正方形；除了中間的九個小方格外，若少剪一個方格，最多只能少分離出3個正方形，所以要少剪4個外圍的正方形，外加一個中間的方格，所以總共要少剪5個小方格，共剪 $24 - 5 = 19$ 個方格。

圖(2)：



二、如圖(3)，雖然符合規則，但還是會被割下12塊正方形；除了中間的九個小方格外，若少剪一個方格，最多只能少分離出3個正方形，所以少剪4個外圍的正方形可以少分離12塊正方形，共剪 $25 - 4 = 21$ 個方格。

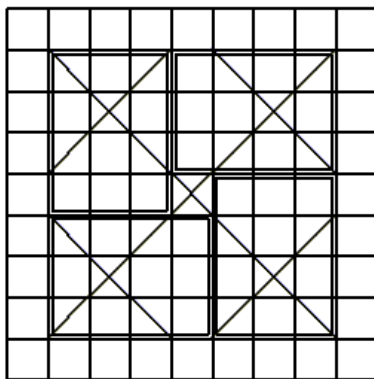
圖(3)：



因此，從這兩種情形來看，最多只能剪21個小方格。

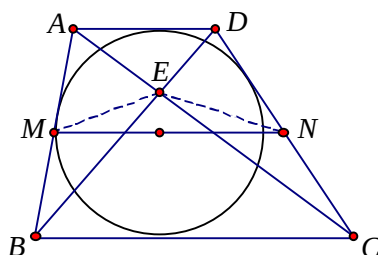
以下我們證明最多只能剪21塊方格。考慮 3×4 的方格表，因為鄰格不能同時切割，所以每一列至多可以剪2個方格。如果我們真得每一列都剪下2個方格，而這6個方格沒有任何二個相鄰，則在 3×4 的方格表黑白相間塗色的情形下，這些被剪的方格必為同一種顏色。當中4個被剪開的方格必產生一個被分離、孤立的區域，這不合題意，所以 3×4 的方格表最多只能剪開5個方格。

在 9×9 的方格表中，外圍的方格不可被剪開，剩下內部 7×7 的方格表，可以分成四個 3×4 的方格表及正中間的小方格，如下圖所示。所以最多只能剪21塊方格。



6. 一個上底與下底分別為 BC 與 AD 的梯形外切於一個圓，梯形的兩條對角線相交於點 E 。
試證： $\angle AED$ 不是銳角。（七分）

參考解答：



如上圖所示，設 M 與 N 分別為 AB 與 CD 的中點，則

$$MN = \frac{1}{2}(AB + CD), \quad ME + EN > MN.$$

若 $\angle AEB = \angle DEC$ 為鈍角，則點 E 會落在分別以 AB 、 CD 為直徑，點 M 與 N 為圓心的圓內部，因此

$$ME + EN < MA + ND = \frac{1}{2}(AB + CD) = MN \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

所以， $\angle AEB = \angle DEC$ 為非鈍角，即 $\angle AED = \angle BEC$ 為非銳角。

International Mathematics Tournament of Towns

環球城市數學競賽

2003 春季賽 高中組 高級卷 參考解答

1. 給定一個三角錐 $ABCD$ ，已知 R 為其外接球的半徑， r 為其內切球的半徑， a 為三角錐 $ABCD$ 中最長的稜邊之邊長， h 為三角錐 $ABCD$ 中最短的高之長度（三角錐的高，是指從某個頂點到其對應底面的垂直距離）。試證： $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$ 。（四分）

參考解答：

證明：(1) 球內最大弦 $a \leq$ 球的直徑 $2R$

所以， $a \leq 2R$

(A)

（給出此式者給1分，有說明理由者給2分）

(2) 設三角錐之四個三角形面積（表面積）為 $S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq S_4$

則 $\frac{1}{3}S_1h = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)r$ （給1分）

(B)

又 $S_1 < S_2 + S_3 + S_4$ （三側面積和大於底面積） （給2分）

(C)

(C)代入(B)得到

$$\frac{1}{3}S_1h > \frac{2}{3}S_1r$$

所以 $h > 2r$ （給1分）

(D)

(3) 由(A) ÷ (D) 得 $\frac{R}{r} > \frac{a}{h}$ （給1分）

2. 給定一個實係數多項式 $P(x)$ ，已知每項都是相異自然數的無窮數列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 滿足 $P(a_1) = 0, P(a_2) = a_1, P(a_3) = a_2, \dots$ 。請問 $P(x)$ 所有可能之次數是多少？（五分）

參考解答：

(1). $P(x) = 0$ 或 $\deg P(x) = 0$ 明顯不合題意。

當 $\deg P(x) = 1$ 時，取 $P(x) = x - 1$ 即可。

(2). 現在證明“二次”以上不可能。

設 $\deg P(x) = n, n \geq 2$ ，所以

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad (c_n \neq 0)$$

若 $c_n < 0$ ，則存在夠大之 N 使得當 $x > N$ 時， $P(x) < 0$ 。

取 $x = a_{N+1}$ ， $P(a_{N+1}) = a_N < 0 \rightarrow \leftarrow$

所以 $c_n > 0$ 。

$\Rightarrow$ 可以取到夠大之 N_1 使 $x > N_1$ ， $P(x) > x$ 。

方法1：

存在 $N > a_1$ ，使得對所有 $x > N$ ， $P(x) > x$ 。所以，在 $\{a_1, a_2, \dots, a_{N+1}\}$ 中，有一個 $a_i > N$ 使得

$$f(a_i) = a_{i-1} > a_i > N$$

$$\Rightarrow f(a_{i-1}) = a_{i-2} > a_{i-1} > N$$

$\vdots$

$$\Rightarrow f(a_2) = a_1 > a_2 > N \rightarrow \leftarrow$$

所以 $P(x)$ 為一次式。

方法 2：

存在 N ，使得對所有 $x > N$ ， $P(x)$ 為遞增的。

取 $\{1, 2, \dots, N\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ，所以 $\{a_{m+j}\}_{j=1}^{\infty}$ 為遞增數列，

$$f(a_{m+2}) = a_{m+1} > a_{m+2} \rightarrow \leftarrow$$

所以 $P(x)$ 為一次式。

3. 請問能否用三張三角形紙片，不重疊地剛好黏貼成一個正立方體的表面？（五分）

參考解答：

答案是否定的。

已知事實：1. 任一片三角形紙片是無法依題設覆蓋正立方體的任意一個頂點的。

2. 正立方體的頂點也不可能被某二個三角形的邊所覆蓋。

利用反證法，假設可以用三片三角形紙片不重疊地覆蓋一個正立方體表面。考慮在正立方體表面上的點，如果在這一個點上，某個三角形的頂點與另一個三角形的某一邊上的點接觸，則我們稱這一個點是“好的”點。

假設 N 是正立方體表面上的所有“好的”點的個數，則因為三個三角形共有 9 個頂點，所以顯然 N 的值小於或等於 9。

若 $N = 9$ ，則表示在每一個“好的”點上，只有某一個三角形的某一個頂點接觸到這個點。在這個情形下，這 9 個“好的”點必須是在正立方體的頂點上。但這是不可能的，因為正立方體只有 8 個頂點。因此 $N \leq 8$ 。

在正立方體的一個頂點處展開的角度是 $\frac{3}{2}p$ ，所以正立方體的 8 個頂點的角度之和為 $12p$ 。因為正立方體的頂點不可能被覆蓋在三角形的內部，也不會是被某二個三角形的邊所覆蓋，所以正立方體的所有頂點展開的角度的和最多是 $Np + 3p$ 。

但是， $12p \leq Np + 3p \leq 11p$ ，產生矛盾。

因此，我們無法用三片三角形紙片不重疊地覆蓋一個正立方體表面。

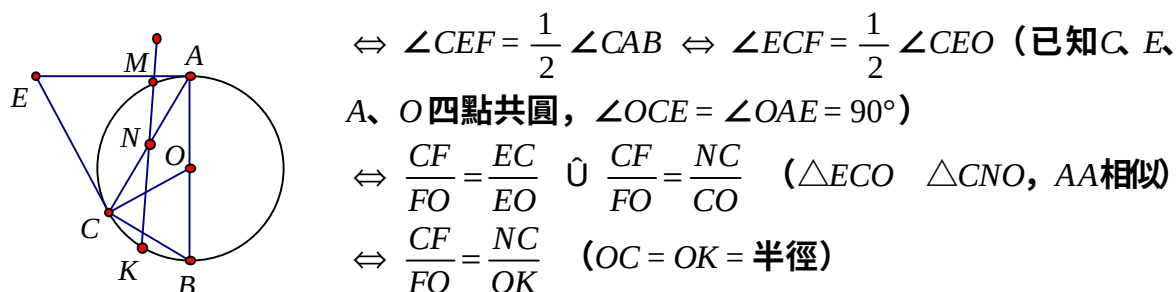
4. 直角三角形 ABC 內接於圓 O ，其斜邊為 AB 。令點 K 為劣弧 $\widehat{BC}$ （不包含 A 點的弧）之中點，點 N 為線段 $\overline{AC}$ 之中點，射線 $\overrightarrow{KN}$ 與圓 O 之交點為點 M ，由點 A 與點 C 分別作圓 O 之切線，這兩條切線相交於點 E 。試證： $\angle EMK = 90^\circ$ 。（六分）

參考解答：

作法一：(B5006, 侯景維)

設 OC 交 KN 於 F ，欲證 $\angle EMK = 90^\circ$ ，又知 $\angle ECF = 90^\circ$ ，即證 E, M, F, C 四點共圓。

(i) E, M, F, C 四點共圓 $\Leftrightarrow \angle CEF = \angle CMF \Leftrightarrow \angle CEF = \angle CAK$

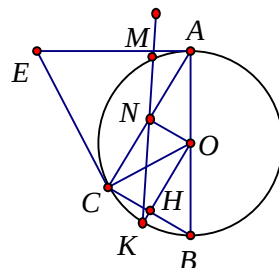


$$\Leftrightarrow \angle CEF = \frac{1}{2} \angle CAB \Leftrightarrow \angle ECF = \frac{1}{2} \angle CEO \quad (\text{已知 } C, E, A, O \text{ 四點共圓, } \angle OCE = \angle OAE = 90^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \frac{CF}{FO} = \frac{EC}{EO} \quad \hat{=} \quad \frac{CF}{FO} = \frac{NC}{CO} \quad (\triangle ECO \sim \triangle CNO, \text{ AA 相似})$$

$$\Leftrightarrow \frac{CF}{FO} = \frac{NC}{OK} \quad (OC = OK = \text{半徑})$$

- (ii) 另一方面，又 $OK \perp BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，所以 $OK \parallel NC \Rightarrow \triangle OKF \sim \triangle CNF$ 。
 $\Rightarrow \frac{CF}{FO} = \frac{NC}{OK}$ （此式成立，代入 (i) 的結論逆推得）
 $\Rightarrow E、M、F、C$ 四點共圓。
 $\Rightarrow \angle EMK = 90^\circ$ 。



作法二：(A4001, 王琨傑)

- (a). 連 $EO、OC、OK$ ，因為 K 為 $\widehat{BC}$ 之中點， O 為圓心，所以 OK 平分 BC ，設交點為 H 。又 ON 平分 AC ， O 亦為 AB 的中點。所以， $NH \parallel AB$ ， $NO \parallel BC$ ， $OH \parallel AC$ 。
 $\Rightarrow \triangle ONH \sim \triangle CBA \Rightarrow \angle NOH = 90^\circ$
- (b). 因為 $EA = EC$ 且 $EA \perp AO$ ， $EC \perp CO$ ，所以 E 在 $\angle AOC$ 的角平分線上。又 $AO = CO =$ 半徑， $NO = NO$ ， $AN = NC$ ，所以 $\triangle AON \cong \triangle CON$ 。
 $\Rightarrow \angle AON = \angle CON$
 所以， N 亦在 $\angle AOC$ 的角平分線上， $E、N、O$ 三點共線。
 又因 $M、N、K$ 共線，所以 $\angle ENM = \angle KNO$ 。
- (c). 因為 $\angle EAO + \angle ECO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ，所以 $E、A、O、C$ 四點共圓。
 又 EO 與 AC 交於 $N \Rightarrow EN \cdot NO = AN \cdot NC \dots\dots (1)$
- (d). 因為 $A、M、C、K$ 四點內接於圓 O ，且 AC 與 MK 相交於 N ，所以
 $\Rightarrow MN \cdot NK = AN \cdot NC \dots\dots (2)$
- 綜合(1)、(2)得 $EN \cdot NO = MN \cdot NK \Rightarrow \frac{EN}{MN} = \frac{NK}{NO}$ ，又因為 $\angle ENM = \angle KNO$ （由(c)知）
 所以， $\triangle EMN \sim \triangle KON \Rightarrow \angle EMN = \angle KON = 90^\circ$ ，即 $\angle EMK = 90^\circ$ 。

5. 小強和小文依下列規則玩遊戲。小強任選一個大於100之整數不讓小文知道。接著，小文喊出一個大於1的整數 d 。若小強所選的數可被 d 整除，則小文獲勝。如果不能，則小強將所選的數減去 d 作為新選之數，同樣地，也不讓小文知道，小文再喊出另外一個大於1的整數，依此方式再繼續玩下去；規定小文所喊出過的數不可以重複。若在遊戲進行中，小強所選的數變為一個負數，則小強獲勝。請問小文在此遊戲中是否有必勝的策略？（六分）

參考解答：

作法一：(A4001, 王琨傑)

小文在此遊戲中有必勝的策略。設小強所選的數為 x ，且 $x \equiv k \pmod{12}$ ($0 \leq k < 12$)，小文只須依下面的猜法即可獲勝：

- (1) 小文喊2，若小強說錯，則
 $x \not\equiv 0 \pmod{2}$ ， $k \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
- (2) 小文喊3，若小強說錯，則
 $x - 2 \not\equiv 0 \pmod{3}$ ， $x \not\equiv 2 \pmod{3}$ ，又 $3 \mid 12$ ，此時 $k \in \{1, 3, 7, 9\}$
- (3) 小文喊4，若小強說錯，則
 $x - 5 \not\equiv 0 \pmod{4}$ ， $x \not\equiv 1 \pmod{4}$ ，又 $4 \mid 12$ ，此時 $k \in \{3, 7\}$
- (4) 小文喊6，若小強說錯，則
 $x - 9 \not\equiv 0 \pmod{6}$ ， $x \not\equiv 3 \pmod{6}$ ，又 $6 \mid 12$ ，此時 $k \in \{7\}$
- (5) 小文喊12，若小強仍說錯，則下一次的新數必為 $x - 31$ ，此時，因為
 $x - 31 \equiv 7 - 31 \equiv -24 \equiv 0 \pmod{12}$

所以小文下次只須猜12即可獲勝！

作法二：(A4039, 駱家淮)

小文有必勝的策略，其叫法為：2, 3, 4, 6, 8, 20, 24, 在7次之內必能成功。

證明：設小強最先選擇的數為 n ，故 $n \geq 101$ 。

- (1) 第一次叫2，如果 n 是2的倍數，則小文獲勝；如果不是，則 n 為奇數。
- (2) 第二次叫3，如果 $n-2$ 是3的倍數，則小文獲勝；如果不是，則 $n \div 3$ 的餘數必為1或0。
- (3) 第三次叫4，如果 $n-5$ 是4的倍數，則小文獲勝；如果不是，則因為 n 為奇數， $n-5$ 為偶數，所以 $(n-5) \div 4$ 的餘數為2，即 $n \div 4$ 的餘數為3。
- (4) 第四次叫6，如果 $n-9$ 是6的倍數，則小文獲勝；如果不是，則因為 $n-9$ 為偶數，所以 $(n-9) \div 3$ 的餘數為1或2，即 $n \div 3$ 的餘數為1或2。又由(2)知道 $n \div 3$ 的餘數為1或0，所以 $n \div 3$ 的餘數必為1。
- (5) 第五次叫8，如果 $n-15$ 是8的倍數，則小文獲勝；如果不是，則因為 $n \div 4$ 的餘數為3，所以 $n-15$ 為4的倍數，又 $n-15$ 不是8的倍數。所以 $(n-15) \div 8$ 的餘數為4，即 $n \div 8$ 的餘數為3。
- (6) 第六次叫20，如果 $n-23$ 是20的倍數，則小文獲勝；如果不是，則小文於第七次叫24必可獲勝。理由如下：
 - (a). 因為 $n \div 8$ 的餘數為3，又 $n-43 = n-3 \pmod{8}$ ，所以 $n-43$ 為8的倍數。
 - (b). 因為 $n \div 3$ 的餘數為1，又 $n-43 = n-1 \pmod{3}$ ，所以 $n-43$ 為3的倍數。

由(a)、(b)可知， $n-43$ 必須是24的倍數，又 $n-43 \geq 101-43=58 > 0$ ，所以小文依此方法進行遊戲必可獲勝！

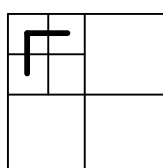
6. 在一個 4×4 的方格表的每個小方格內任意寫上“+”或“-”號形成一個圖案。在此圖案上允許將一個小方格及其所有相鄰小方格內的符號作“+”與“-”號的互換改變。從任意給定的一個圖案開始，依上述方式操作有限次後，請問我們最多可以得到多少種不同圖案的方格表？（七分）

（註：二個相鄰的小方格是指它們有一個共同的邊。二個不同圖案的方格表是指二個圖案中至少有一個相對應位置的小方格上的符號不同。）

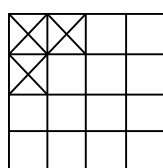
參考解答：(A4018, 莫立平)

操作有16種，其中12種互相獨立。最多可以得到 2^{12} 種不同圖案的方格表。

設下面圖(a)是只指將圖(b)方格表中3個打×的格子做“+”和“-”號的互換，則下述圖(c)中的操作 $\tilde{A}$ 、 $\tilde{C}$ 、 $\tilde{E}$ 、 $\tilde{N}$ 顯然是互相獨立的（即無法用其中幾種疊加成另一種的效果）。

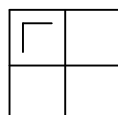


圖(a)

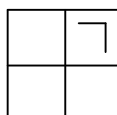


圖(b)

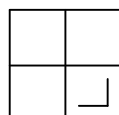
圖(c)



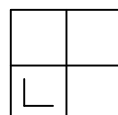
$\tilde{A}$



$\tilde{C}$

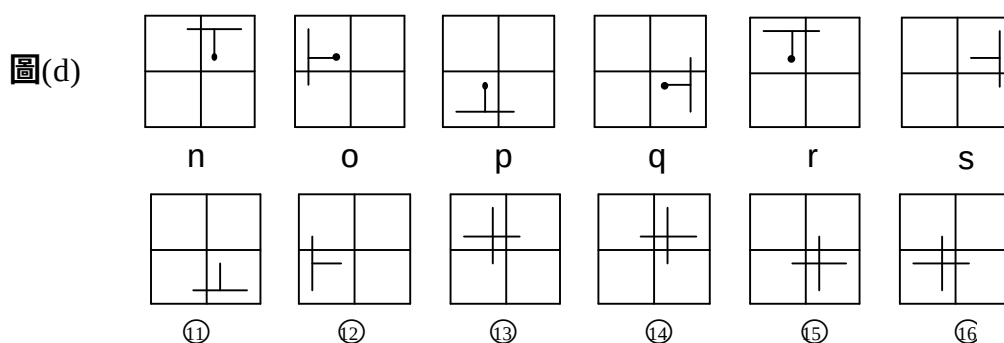


$\tilde{E}$

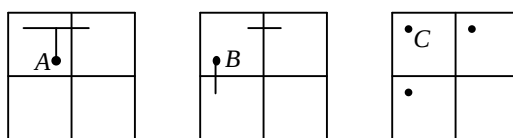


$\tilde{N}$

而操作 n ，因為圖中標示“ $\cdot$ ”的這個方格是操作 $\hat{A}$ $\hat{N}$ 所做不到改變的一格，故 n 和 $\hat{A}$ $\hat{N}$ 相互獨立。同理可以得到 o q 也具相同性質，所以 j q 都相互獨立。

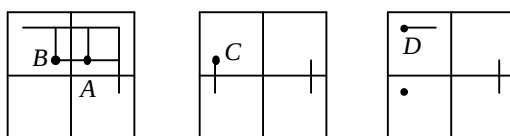


在操作 r 圖中，若它可由前8個操作得到，則 $r = a_1 \hat{A} + a_2 \hat{C} + a_3 \hat{E} + \dots + a_8 q$ ，其中因為任何操作重複做2次等於沒做，所以可令 $a_n = 0$ 或 1 。

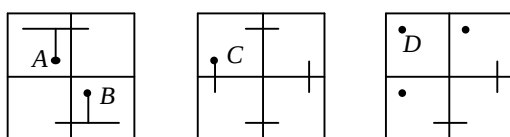


由上面左圖中， A 格只有操作 o 能改變，所以 $a_6 = 1$ 。而中間的圖即表示 $r - o$ ，又在 B 格只有 $\hat{A}$ 跟 o 能改變，但 o 已操作過一回，若再操作一次則等於沒做過，所以只能考慮是由 $\hat{A}$ 給出的作用，得到 $a_1 = 1$ 。最後，右圖即表示 $r - o - \hat{A}$ ，又 C 格也只有 $\hat{A}$ 和 o 能改變，但它們都操作過一次，這與先前假設矛盾。故不存在操作 j q 使得 $r = a_1 \hat{A} + a_2 \hat{C} + a_3 \hat{E} + \dots + a_8 q$ 成立，即 r 與 j q 都相互獨立。

在操作 s 圖中，若它可由前9個操作得到，則 $s = a_1 \hat{A} + a_2 \hat{C} + a_3 \hat{E} + \dots + a_9 r$ ，同理可知 $a_n = 0$ 或 1 。若 $a_9 = 0$ ，將此圖和 j q 都左旋 90° ，由上可知不存在這種 a_1 a_8 可以生成它，所以 $a_9 = 1$ 。而 $s - r$ 可表示如下面左圖，由 A 和 B 得到操作 n 和 o 一定有操作過，所以 $a_5 = a_6 = 1$ 。接著將 $s - r - n - o$ 表述如中間的圖，而 C 這位置因為 o 已操作過，所以只能 $a_1 = 1$ 。而 $s - r - n - o - \hat{A}$ 表述如右圖，由 D 這位置因為 $\hat{A}$ 、 o 、 r 都已操作過，所以得到矛盾。所以 s 和 $\hat{A}$ r 都相互獨立。



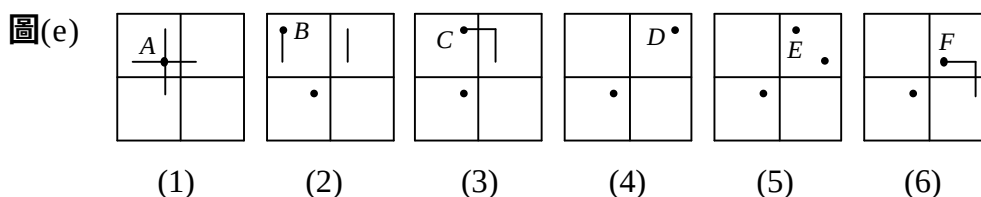
在操作 ⑪ 中，若它可由前10個操作得到，則 $⑪ = a_1 \hat{A} + a_2 \hat{C} + \dots + a_{10} s$ 。考慮 $a_9 = 0$ ，將此圖和 j q 及 s 都左旋 90° ，則不存在 a_1 a_8 及 a_{10} 可以生成它，所以 $a_9 = 1$ 。又因為 $⑪ - r$ 可表示如下面左圖，同理由 A 和 B 得到 $a_6 = a_8 = 1$ 。⑪ - $r - o - q$ 表述如中間的圖，由 C 可知 $a_1 = 1$ 。⑪ - $r - o - q - j$ 表述如右圖，由 D 這位置可得矛盾。所以，⑪ 和 $\hat{A}$ s 都相互獨立。



在操作 ⑫ 中，因為 $⑫ = n + o + p + q + r + s + ⑪$ ，所以 ⑫ 和 $\hat{A}$ ⑪ 不獨立。即其次數可由 a_1 a_{11} 決定。

設 $⑬ = a_1 \hat{A} + a_2 \hat{C} + \dots + a_{11} ⑪$ 。在圖(e)中的(1)，因為能改變 A 格的只有操作 o 與 r ，所以有 $a_6 + a_9 = 1$ 。不失一般性，可設 $a_6 = 0$ ， $a_9 = 1$ 。所以 ⑬ - r 可表示圖(e)中的(2)， B

格只有 $\dot{A}$, o , r 能改變, 所以只能是 $a_1 = 1$ 。而 $\textcircled{13} - r - \dot{A}$ 可表述如(3), 因為 C 只有操作 n 可以改變, 所以 $a_5 = 1$ 。 $\textcircled{13} - r - \dot{A} - n$ 表述如(4), D 點可由 ζ 或 s 操作改變, 但這兩個操作分別會改變 E 與 F 點: $a_2 = 1$, 則 $\textcircled{13} - r - \dot{A} - n - \zeta$ 如圖(5); $a_{10} = 1$, 則 $\textcircled{13} - r - \dot{A} - n - s$ 如圖(6), 都造成矛盾。所以, $\textcircled{13}$ 和 $\dot{A}$ $\textcircled{11}$ 都相互獨立。



因為

操作 $\textcircled{14}$: $\textcircled{14} = \textcircled{13} + o + r + q + \dot{E} + \tilde{N} + p$;

操作 $\textcircled{15}$: $\textcircled{15} = \textcircled{14} + n + s + p + \tilde{N} + \dot{A} + o$;

操作 $\textcircled{16}$: $\textcircled{16} = \textcircled{15} + q + \textcircled{11} + o + \dot{A} + \zeta + n$,

所以, $\textcircled{14}$ $\textcircled{16}$ 都可用 $\dot{A}$ $\textcircled{11}$ 及 $\textcircled{13}$ 表示。

因為 $\dot{A}$ $\textcircled{11}$ 及 $\textcircled{13}$ 之間相互獨立, 而做一次 $\textcircled{12}$, $\textcircled{14}$, $\textcircled{15}$ 或 $\textcircled{16}$ 相當於做多次的 $\dot{A}$ $\textcircled{11}$, $\textcircled{13}$ 的操作, 所以只有 12 種操作。而這 12 種皆可選擇操作或不操作, 所以共有 2^{12} 種方式, 也就是說共有 2^{12} 種不同的圖案。

7. 在一個正方形內部選取數個點, 用線段將這些點以及正方形的頂點連接, 使得這些線段除了在端點以外, 彼此都互不相交, 並且把正方形內部完全分割為許多個三角形。這些被選取的點都是三角形的頂點, 而且沒有任何一個三角形的頂點落在線段上。對於選取的點及正方形的頂點, 分別計算由每一點所連接出去的線段數。請問這些線段數是否可能全部都是偶數? (八分)

參考解答:

答案是否定的。

假設 P 是依題設方法, 利用其內部數點及其頂點, 將它自身分割成許多三角形的多邊形, 並且這些三角形的頂點不會在任何二個頂點的連線段上, 從每個三角形的每一個頂點連結出去的線段數都是偶數。也就是假設存在有多邊形可以滿足題設。

那麼, 對於 P 的每一個邊, 我們將包含該邊的三角形都一一切除, 可以得到新的多邊形 Q 。因為操作中, 多邊形 P 的每個頂點處所移除的線段數都是 2, 所以, 這個操作並不影響頂點連結線段數的奇偶性。因此, 多邊形 Q 同樣符合題設條件。

當從多邊形 P 切除三角形時, 可能的情形有三種: (1) 切除只含有 P 的某一個邊的三角形; (2) 切除含有 P 的某二個相鄰邊的三角形; (3) 切除含有 P 的三個邊的三角形。最後這種情形只有當多邊形 P 的邊數為 3 時才可能發生。從多邊形 P 開始, 因為三角形數是有限的, 所以持續這種操作則有 $P \rightarrow Q_{k1} \rightarrow Q_{k2} \rightarrow \dots \rightarrow 0$, 其中 k_i 表示多邊形 Q_{k_i} 的邊數。不難發現, 若多邊形 P 的邊數為 n , $n > 3$, 則 Q_{k1} 的邊數為

$$m + 2(n - 2m) = 2n - 3m$$

其中 m 為在多邊形 P 被移除的三角形中, 含有二個邊為原多邊形 P 的某個二鄰邊的三角形個數。而且只有當 n 為 3 的倍數時, $2n - 3m \equiv n \pmod{3}$ 。

如果 n 不是 3 的倍數, 則無限次地持續這種操作過程, 將導致矛盾。所以依題設, 由正方形內部選取的數個點及正方形的頂點, 所連接出去的線段數是不可能全部為偶數。